Одиннадцатый Турнир, 1989-1990

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осень 1989 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Полное решение каждой задачи оценивается в три балла. Оценка работы равна сумме трёх лучших оценок. Оценка выступления на осеннем туре равна максимуму из оценок за тренировочный и основной варианты. Баллы восьмиклассников умножаются на 4/3, баллы десятиклассников - на 5/4)

Задача 1.
Три бегуна - X, Y и Z - участвуют в забеге. Z задержался на старте и выбежал последним, а Y выбежал вторым. Z во время забега менялся местами с другими участниками 6 раз, а X - 5 раз. Известно, что Y финишировал раньше X. В каком порядке они финишировали?
Фольклор

Задача 2.
Длины сторон остроугольного треугольника - последовательные целые числа.
Докажите, что высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит её на отрезки, разность которых равна 4.
Фольклор

Задача 3.
Дано 1989 чисел. Известно, что сумма любых 10 из них положительна.
Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.
Фольклор

Задача 4.
Решить в натуральных числах уравнение:
$x + 1/(y + 1/z) = 10/7$
Г. Гальперин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 29 октября 1989 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Найти число решений в натуральных числах уравнения:
[x/10]=[x/11]+1 (через [A] обозначается целая часть числа A; например [2,031]=2, [2]=2 и т. д.).
Фольклор

Задача 2.(3)
Шестиугольник ABCDEF вписан в окружность; AB=BC=a, CD=DE=b, EF=FA=c.
Докажите, что площадь треугольника BDF равна половине площади шестиугольника.
И. П. Нагель, Евпатоия

Задача 3.(3)
Плоскость разбита тремя сериями параллельных прямых на равные между собой равносторонние треугольники. Существуют ли 4 вершины этих треугольников, образующие квадрат?
Фольклор

Задача 4.(2+4)
Дано натуральное число N. Рассматриваются такие тройки различных натуральных чисел (a,b,c), что a+b+c=N. Возьмём наибольшую возможную такую систему троек, что никакие две тройки системы не имеют общих элементов. Число троек в этой системе обозначим через K(N). Докажите, что
а)(2) K(N) > N/6-1;
б)(4) K(N) < 2N/9.
Л. Курляндчик

Задача 5.(2+4)
Имеется прямоугольная доска M*N, разделенная на клетки 1*1. Кроме того, имеется много косточек домино размером 1*2. Косточки уложены на доску, так что каждая косточка занимает две клетки. Доска заполнена не целиком, но так, что сдвинуть косточки невозможно (доска имеет бортики, так что косточки не могут выходить за пределы доски).
Докажите, что число непокрытых клеток
а)(2) меньше (1/4)MN;
б)(4) меньше (1/5)MN.
Фольклор

Задача 6.(7)
Правильный шестиугольник разрезан на N равновеликих параллелограммов.
Доказать, что N делится на 3.
В. Прасолов, И. Шарыгин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осень 1989 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Полное решение каждой задачи оценивается в три балла. Оценка работы равна сумме трёх лучших оценок. Оценка выступления на осеннем туре равна максимуму из оценок за тренировочный и основной варианты. Баллы восьмиклассников умножаются на 4/3, баллы десятиклассников - на 5/4)

Задача 1.
10 друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.
Фольклор

Задача 2.
На плоскости заданы точки K, L и M, являющиеся серединами трёх последовательных сторон четырёхугольника, которые равны между собой. Восстановить четырёхугольник.
Фольклор

Задача 3.
Существует ли 1000000 различных натуральных чисел, таких что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?
Фольклор

Задача 4.
Числа 2^{1989} и 5^{1989} выписали одно за другим (в десятичной записи). Сколько всего цифр выписано?
Г. Гальперин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 29 октября 1989 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Можно ли так выбрать шар, треугольную пирамиду и плоскость, чтобы всякая плоскость, параллельная выбранной, пересекала шар и пирамиду по фигурам равной площади?
Фольклор

Задача 2.(3)
Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества {1,2,3,...,N}, не содержащие двух соседних чисел.
Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна (N+1)!-1.
по мотивам R. P. Stanley

Задача 3.(5)
Внутри круга радиуса R взята точка A. Через неё проведены две перпендикулярные прямые. Потом прямые повернули на угол U относительно точки A. Хорды, высекаемые окружностью из этих прямых, замели при повороте фигуру, имеющую форму креста с центром в точке A.
Найдите площадь креста.
Фольклор

Задача 4.(2+3)
Натуральный ряд представлен в виде объединения некоторого множества попарно непересекающихся целочисленных бесконечных арифметических прогрессий с положительными разностями d_1, d_2, d_3, ... Может ли случиться, что при этом сумма
$1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3+$... не превышает 0,9 ? Рассмотрите случаи:
а)(2) общее число прогрессий конечно;
б)(3) прогрессий бесконечное число (в этом случае условие нужно понимать в том смысле, что сумма любого конечного числа слагаемых из бесконечной суммы не превышает 0,9).
А. Толпыго

Задача 5.(6)
Отмечено 100 точек - N вершин выпуклого N-угольника и 100-N точек внутри этого N-угольника. Точки как-то обозначены, независимо от того, какие являются вершинами N-угольника, а какие лежат внутри. Известно, что никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре - на двух параллельных прямых. Разрешается задавать вопросы типа: чему равна площадь треугольника XYZ (X, Y, Z - из числа отмеченных точек).
Докажите, что 300 вопросов достаточно, чтобы выяснить, какие точки являются вершинами и чтобы найти площадь N-угольника.
Д. Фомин

Задача 6.(8)
В прямоугольной таблице m строк и n столбцов (m<n). В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бз одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.
А. Разборов

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1990 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Докажите, что при любом натуральном n

$$(1/n)^2 + (1/n + 1/(n-1))^2 + (1/n + 1/(n-1)+...+1)^2 = 2n-(1 +1/2+...+1/n)$$

С. Манукян, Ереван

Задача 2.(4)
Даны две окружности, лежащие вне друг друга. A_1 и A_2 - наиболее удалённые друг от друга точки пересечения этих окружностей с их линией центров, так что A_1 лежит на первой окружности, A_2 - на второй. Из точки A_1 проведены два луча, касающиеся второй окружности, и построен круг K_1, касающийся этих лучей и первой окружности изнутри. Из точки A_2 проведены два луча, касающиеся первой окружности, и построен круг K_2, касающийся этих лучей и второй окружности изнутри. Докажите, что круги K_1 и K_2 равны.
Й. Табов, София

Задача 3.(5)
Дано 27 кубиков одинакового размера: 9 красных, 9 синих и 9 белых. Можно ли сложить из них куб таким образом, чтобы каждый столбик из трёх кубиков содержал кубики ровно двух цветов? (Рассматриваются столбики, параллельные всем ребрам куба, всего 27 столбиков.)
С. Фомин

Задача 4.(8)
Дана 61 монета одинакового внешнего вида. Известно, что две из них - фальшивые, что все настоящие одинакового веса, что фальшивые - тоже одинакового веса, отличающегося от веса настоящих монет. Но не известно, в какую сторону отличаются веса фальшивых монет от настоящих. Как можно это узнать с помощью трёх взвешиваний на двухчашечных весах без гирь? (Определить фальшивые монеты не требуется).
Д. Фомин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 18 марта 1990 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
На какое максимальное число частей могут разбить координатную плоскость x0y графики 100 квадратных трехчлёнов вида $y=a_nx^2+b_nx+c_n$ (n = 1, 2, ..., 100)?
Н. Васильев

Задача 2.(6)
Если повернуть квадрат вокруг его центра на 45^o , то стороны повернутого квадрата разобьют каждую сторону первоначального квадрата на три отрезка, длины которых относятся как a:b:a (эти отношения легко вычислить). Для произвольного выпуклого четырёхугольника сделаем аналогичное построение: разобьем каждую его сторону в тех же отношениях a:b:a и проведем прямую через каждые две точки деления, соседние с вершиной (лежащие на сходящихся к ней сторонах). Докажите, что площадь четырёхугольника, ограниченного четырьмя построенными прямыми, равна площади исходного четырёхугольника.
А. Савин

Задача 3.(8)
В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.
Ф. Назаров

Задача 4.(8)
ABCD - ромб. На стороне BC взята точка P, через A, B и P проведена окружность, которая пересекается с прямой BD ещё раз в точке Q. Через точки C, P и Q проведена окружность, которая пересекается с BD ещё раз в точке R. Докажите, что точки A, R и P лежат на одной прямой.
Д. Фомин

Задача 5.(10)
Сколько существует пар натуральных чисел (m,n), каждое из которых не превышает 1000, таких что
$m/(n+1) < 2^{1/2} < (m+1)/n$
Д. Фомин

Задача 6.(4+8)
Рассматривается набор гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь равен 200 граммов. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее вес, выраженный целым числом граммов от 1 до 200, может быть уравновешено некоторым количеством гирь набора, и притом единственным образом (тело кладется на одну чашку весов, гири - на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми).
а)(4) Приведите пример правильного набора, в котором не все гири по одному грамму.
б)(8) Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гиря участвует в этих наборах не одинаковое число раз.)
Д. Фомин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1990 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
Построить треугольник по двум сторонам, если известно, что медиана, проведенная к третьей стороне, делит угол треугольника в отношении 1:2.
В. Чикин

Задача 2.(3+4)
Докажите, что
а)(3) если натуральное число n можно представить в виде n=4k+1, то существуют n нечётных натуральных чисел, сумма которых равна их произведению;
б)(4) если n нельзя представить в таком виде, то таких n нечётных натуральных чисел не существует.
М. Концевич

Задача 3.(2+5)
Какое минимальное количество точек на поверхности
а)(2) додекаэдра,
б)(5) икосаэдра
надо отметить, чтобы на каждой грани была хотя бы одна отмеченная точка?
Напоминание: додекаэдр - многогранник из 12 пятиугольных граней, пересекающихся по три в каждой вершине; икосаэдр состоит из 20 треугольников, пересекающихся по пять в каждой вершине.
Г. Гальперин

Задача 4.(7)
Даны 103 монеты одинакового внешнего вида. Известно, что две из них - фальшивые, что все настоящие одинакового веса, что фальшивые - тоже одинакового веса, отличающегося от веса настоящих монет. Но не известно, в какую сторону отличаются веса фальшивых монет от настоящих. Как можно это узнать с помощью трёх взвешиваний на двухчашечных весах без гирь? (Отделить фальшивые монеты не требуется).
Д. Фомин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 18 марта 1990 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
Докажите, что при любом натуральном n найдётся ненулевой многочлен P(x) с коэффициентами, равными 0, -1, 1 степени не больше 2^n, который делится на $(x-1)^n$ без остатка.
Д. Фомин

Задача 2.(4+6)
Рассматривается набор гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь равен 500 граммов. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее вес, выраженный целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешено некоторым количеством гирь набора, и притом единственным образом (тело кладется на одну чашку весов, гири - на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми).
а)(4) Приведите пример правильного набора, в котором не все гири по одному грамму.
б)(6) Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гиря участвует в этих наборах не одинаковое число раз.)
Д. Фомин

Задача 3.(10)
Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q взаимно просты). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?
Д. Фомин

Задача 4.(10)
В трапеции ABCD: AB - основание, AC=BC, H - середина AB. Пусть l - прямая, проходящая через H и пересекающая прямые AD и BD в точках P и Q соответственно.
Докажите, что либо углы ACP и QCB равны, либо их сумма равна 180^o.
И. Шарыгин

Задача 5.(4+6)
Существует ли выпуклый многогранник, одно из сечений которого - треугольник (сечение не проходит через вершины), и в каждой вершине сходятся
а)(4) не меньше пяти ребер,
б)(6) ровно пять ребер?
Г. Гальперин

Задача 6.(12)
На квадратный лист бумаги со стороной a посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Оказалось, что каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы.
Докажите, что суммарная площадь клякс не больше a.
А. Разборов