Точки Нагеля, Жергонна и Фейербаха и их свойства

1. Вводные задачи

А.Якубов, М.Дидин, А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков

0. *Теорема Чевы.* Докажите, что[1] три чевианы AA', BB', CC' треугольника $\triangle ABC$ проходят через одну точку или параллельны, тогда и только тогда, когда $BA' \cdot CB' \cdot AC' = -CA' \cdot AB' \cdot BC'$ (отрезки рассматриваются как направленные).

Рассмотрим треугольник ABC. Его вписанная окружность касается соответствующих сторон треугольника в точках A_0, B_0, C_0.

1. Прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке G.

Точка из предыдущей задачи называется *точкой Жергонна* данного треугольника. Рассмотрим вневписанную окружность треугольника, касающуюся стороны BC. Она касается прямой AB в точке C_A, AC в точке B_A, BC в точке A_A.

2. Прямые AA_A,BB_A и CC_A пересекаются в одной точке G_A.

Точку из предыдущей задачи назовем *внешней точкой Жергонна* данного треугольника, соответствующей вершине A. Аналогично определим точки A_B, B_B, C_B, G_B, A_C, B_C, C_C, G_C.

Введем некоторые стандартные обозначения. Пусть I — центр вписанной в треугольник окружности. I_A, I_B, I_C — центры его вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно. Be, Be_A, Be_B, Be_C - центры окружностей, описанных около треугольников $I_AI_BI_C$, II_BI_C, I_AII_C, I_AI_BI соответственно (точку Be принято назвать *точкой Бэвена*, остальные точки, как и в случае с точками Жергонна, мы назовем *внешними точками Бэвена*). O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H — точка пересечения его высот, M - медиан. A', B', C' — точки, симметричные соответствующим вершинам треугольника относительно середин противоположных сторон. H' — ортоцентр треугольника $A'B'C'$.

3. Точки O, M, H лежат на одной прямой, причем $\frac{\overline{OM}}{\overline{MH}} = \frac{1}{2}$.

[1] В дальнейшем в формулировках задач слова "Докажите, что" будут опускаться

Прямая из предыдущей задачи называется *прямой Эйлера* данного треугольника.

3'. $\frac{\overline{H'M}}{\overline{H'O}} = \frac{4}{3}$.

Середины соответствующих сторон треугольника ABC назовём A'',B'',C''.

4. Пусть точки X_A, X_B, X_C, лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC соответственно, таковы, что прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в точке X. Пусть Y_A, Y_B, Y_C — точки симметричные X_A, X_B, X_C относительно A'', B'', C'' соответственно. Тогда прямые AY_A, BY_B, CY_C пересекаются в одной точке Y.

Точки X и Y из предыдущей задачи называются *изотомически сопряженными* относительно данного треугольника.

5. Прямые AA_A, BB_B, CC_C пересекаются в одной точке N, причем эта точка изотомически сопряжена точке Жергонна данного треугольника.

Точку из предыдущей задачи назовем *точкой Нагеля*.

6. Прямые AA_0, BB_C, CC_B пересекаются в одной точке N_A, причем эта точка изотомически сопряжена внешней точке Жергонна данного треугольника, соответствующей вершине A.

Точку из предыдущей задачи назовем *внешней точкой Нагеля*, соответствующей вершине A. Аналогично определяются точки N_B и N_C.

Каждому направлению на плоскости сопоставим бесконечно удаленную точку, соответствующюю данному направлению, и будем считать, что она лежит на всех прямых, у которых такое направление. Три точки назовем *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой. Прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 назовем *конкурентными*, если они пересекаются в одной точке или параллельны. Треугольник $X_1Y_1Z_1$ и треугольник $X_2Y_2Z_2$ назовем *перспективными*, если прямые X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 конкурентны. Если прямые пересекаются в некоторой точки плоскости, то точку пересечения этих прямых назовем *центром перспективы* двух данных перспективных треугольников. Если же прямые параллельны, то центром перспективы назовем бесконечно удаленную точку, которая соответствует направлению данных прямых.

7. Точка M делит каждый из отрезков IN, I_AN_A, I_BN_B, I_CN_C в отношении

1:2.
Следствие. Треугольники $I_AI_BI_C$ и $N_AN_BN_C$ перспективны, при этом центром их перспективы является центр масс данного треугольника.

8. Точка O является серединой отрезков BeI, Be_AI_A, Be_BI_B, Be_CI_C.
Следствие: Треугольники $I_AI_BI_C$ и $Be_ABe_BBe_C$ перспективны, при этом центром их перспективы является центр описанной окружности данного треугольника.

9. Be, Be_A, Be_B, Be_C - середины отрезков $H'N$,$H'N_A$,$H'N_B$,$H'N_C$ соответственно.

Следствие: Треугольники $Be_ABe_BBe_C$ и $N_AN_BN_C$ гомотетичны в H' с коэфициентом 2. А значит они и перспективны с центром перспективы H'.

10. Прямые C_CG_A, A_AG_C, BG конкурентны.

11. Прямые A_BC_0, G_BG, BI, C_BA_0 конкурентны.

11'. Прямые A_AC_C, G_AG_C, I_AI_C, A_CC_A конкурентны(все аналогичные прямые, разумеется, тоже конкурентны).

12. $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be, N коллинеарны.

12'. $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be_B, N_B коллинеарны.

13. I_AG_A, I_BG_B, I_CG_C и IG пересекаются в H'.
Следствие: Треугольники $I_AI_BI_C$ и $G_AG_BG_C$ перспективны, при этом центром их перспективы является H'(ортоцентр антисерединного треугольника, антисерединным треугольником треугольника ABC называется треугольник $A'B'C'$).

Точки Нагеля, Жергонна и Фейербаха и их свойства

2. Основные задачи

А.Якубов, А.Зайков, М.Дидин, А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков

14. Прямые A_0B_0, C_0I и CC'' пересекаются в одной точке.

Пусть P — произвольная точка, не лежащая на сторонах треугольника ABC. Тогда прямые, симметричные AP, BP, CP относительно биссектрис углов A, B, C соответственно, пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удаленной). Эта точка называется *изогонально сопряженной* P относительно треугольника ABC.

Введём дальнейшие обозначения. Пусть I_1, I_{A_1}, I_{B_1}, I_{C_1}, H_1 - точки, изотомически сопряжённые I, I_A, I_B, I_C, H соответственно относительно треугольника ABC; точки G_2, N_2 изогонально сопряжены G и N относительно треугольника ABC. Аналогично определим G_{A_2}, N_{A_2}, G_{B_2}, N_{B_2}, G_{C_2}, N_{C_2}.
L'- точка Лемуана $\triangle A'B'C'$.

15. N_2 и G_2 — центры внешней и внутренней гомотетий вписанной и описанной окружности ABC соответственно.

16. H_1, I_1, N, G лежат на одной прямой, причём они образуют гармоническую четвёрку.

16'. Таким же свойством обладают четвёрки точек H_1, I_{A_1}, N_A, G_A и т. д.

17. Прямые $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC конкурентны.

17'. Прямые $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC конкурентны.

18. Прямые $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC, GG_A конкурентны.

18'. Прямые $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC, G_BG_C. конкурентны.

19. NG, N_AG_A, N_BG_B, N_CG_C пересекаются в L'.
Следствие: Треугольники $N_AN_BN_C$ и $G_AG_BG_C$ перспективны, при этом центром их перспективы является точка Лемуана антисерединного треугольника.

20. Прямые IL и NG параллельны.
20'. Параллельны пары прямых N_AG_A и I_AL, N_BG_B и I_BL, N_CG_C и I_CL.

Пусть даны два перспективных треугольника XYZ и $X_1Y_1Z_1$. По *теореме Дезарга*, $XY \cap X_1Y_1$, $XZ \cap X_1Z_1$, $ZY \cap Z_1Y_1$ коллинеарны. Полученную прямую назовём *осью перспективы двух указанных треугольников*.

21. Оси перспективы треугольников $N_AN_BN_C$ и ABC, а также $G_AG_BG_C$ и ABC совпадают. Данная прямая перпендикулярна IG.

(*Теорема Сонда*). Если треугольники XYZ и $X_1Y_1Z_1$ одновременно и перспективны и ортологичны, то два центра ортологичности и центр перспективы этих треугольников лежат на одной прямой, перпендикулярной оси перспективы $\triangle XYZ$ и $\triangle X_1Y_1Z_1$

22. I — центр ортологичности треугольников $N_AN_BN_C$ и ABC.

23. Решите задачу 20, используя задачи 21 и 22(возможно и какие-то другие задачи из предыдущих).

3. Дополнительные задачи

Пусть U - некая точка на плоскости, не лежащая на прямых XY, YZ, ZX. Тогда ось перпективы треугольника XYZ и чевианного треугольника точки U назовём *трилинейной полярой* U относительно $\triangle XYZ$.

24. Трилинейная поляра точки G перпендикулярна прямой IG.

25. Пусть U - точка на описанной около $\triangle XYZ$ окружности, отличная от X,Y,Z. L_0 - точка Лемуана $\triangle XYZ$. Тогда трилинейная поляра точки U относительно $\triangle XYZ$ проходит через L_0.

26. Пусть дан треугольник XYZ и точка Q, не лежащая на прямых, содержащих стороны треугольника. $XQ \cap YZ = X_1$;$YQ \cap XZ = Y_1$; $ZQ \cap YX = Z_1$; $Y_1Z_1 \cap YZ = X_2$. Тогда четвёрка точек Y,Z,X_1,X_2 гармоническая.

27. Пусть U и V - точки плоскости, не лежащие на прямых XY, XZ, YZ. U' и V' изогонально (изотомически) сопряжены им относительно $\triangle XYZ$. V лежит на трилинейной поляре U'. Тогда U лежит на трилинейной поляре V'.

28. Оси перспективы треугольников $N_AN_BN_C$ и ABC, а также $G_AG_BG_C$

и ABC совпадают с трилинейной полярой I_1 относительно треугольника ABC.

29. Трилинейная полярой I_1 относительно треугольника ABC параллельна трилинейной поляре G относительно треугольника ABC.

30. Решите задачу 20, используя задачи 24-28(возможно и какие-то другие задачи из предыдущих), но НЕ используя теорему Сонда.

31. Если точка P лежит на трилинейной поляре G, то трилинейная поляра P касается вписанной окружности.

Теорема Фейербаха. Окружность девяти точек треугольника ABC касается его вписанной и внеспианных окружностей. Точки касания F, F_A, F_B, F_C называются *точками Фейербаха*.

31'. Если P — бесконечно удаленная точка трилинейной поляры G, то ее трилинейная поляра касается вписанной окружности в точке F.

32. Точки, симметричные F относительно сторон треугольника $A_0B_0C_0$, лежат на прямой OI.

33. Точки A_A, B_B, C_C и F лежат на одной окружности.

34. Сформулируйте аналоги задач 31', 32, 33 для точек F_A, F_B, F_C.

Точки Нагеля, Жергонна и Фейербаха и их свойства

1. Вводные задачи

А.Якубов, А.Зайков, М.Дидин, А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков

1. Следует из теоремы Чевы.

2. Следует из теоремы Чевы.

3. Используем гомотетию с центров в точке M с коэффициентом -2.

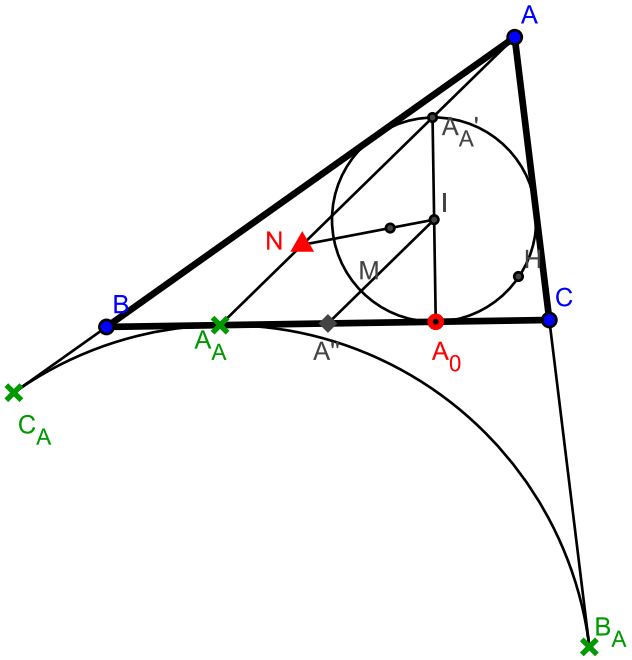
3'. Следуюет из задачи 3 с применением гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2.

4. Следует из теоремы Чевы.

5. Следует из теоремы Чевы.

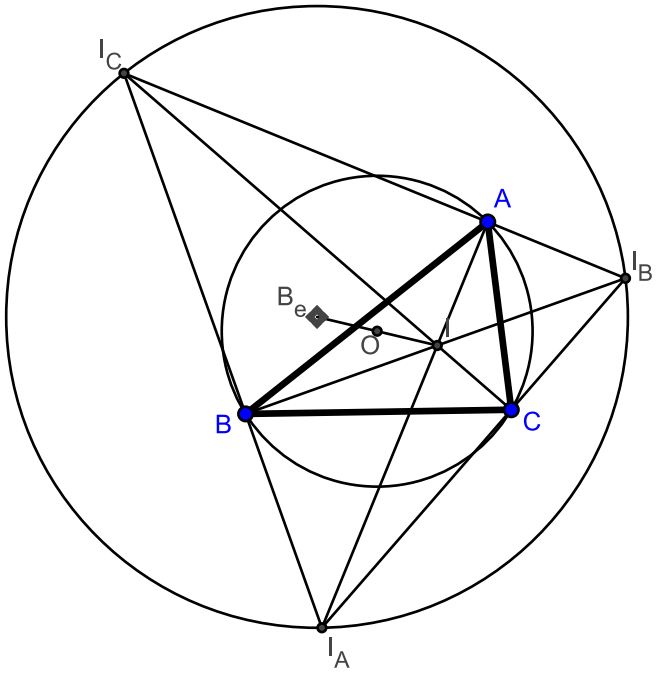
6. Следует из теоремы Чевы.

7. Как известно, $BA_0 = CA_A$. A''-середина A_0A_A. По определению изотомического сопряжения, N лежит на прямой AA_A. Сделаем гомотетию с центром в A, переводящую вневписанную окружность, касающуюся стороны BC, во вписанную. A_A перейдёт в точку A'_A. Касательная к вписанной окружности в точке A'_A параллельна касательной к вневписанной в точке A_A, то есть прямой BC. При этом очевидно, что A'_A отлична от A_0. Значит, A_0 и A'_A диаметрально противоположны. Отсюда I-середина $A_0A'_A$. $A''I$-средняя линия $\triangle A'_AA_0A_A$. Значит, $AA_A \| A''I$. Аналогично, $BB_B \| B''I$; $CC_C \| C''I$. Следовательно, при гомотетии с центром в M и коэффициентом -2, переводящей $\triangle A''B''C''$ в $\triangle ABC$ точка I перейдёт в N. Таким образом, точка M делит IN в отношении 1:2.

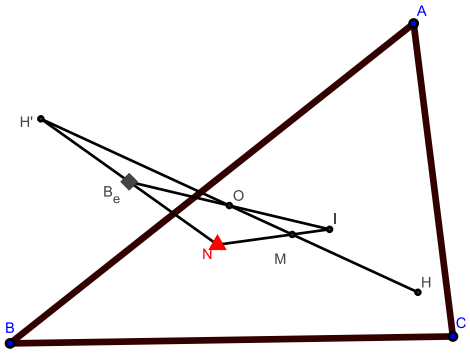


Для отрезков I_AN_A,I_BN_B,I_CN_C утверждение доказывается аналогично.

8. Известно, что внутренняя биссектриса любого угла перпендикулярна его внешней биссектрисе. Отсюда следует, что точка I - ортоцентр треугольника $I_AI_BI_C$, а I_A,I_B,I_C-ортоцентры $\triangle II_BI_C$, $\triangle I_AII_C$, $\triangle I_AI_BI$ соответственно. Основаниями высот во всех четырёх указанных треугольниках являются точки A,B,C. Следовательно, O-центр окружности девяти точек для данных треугольников. Центр окружности 9 точек любого треугольника является серединой отрезка, соединяющего центр его описанной окружности с его ортоцентром. Отсюда непосредственно следует наше утверждение.



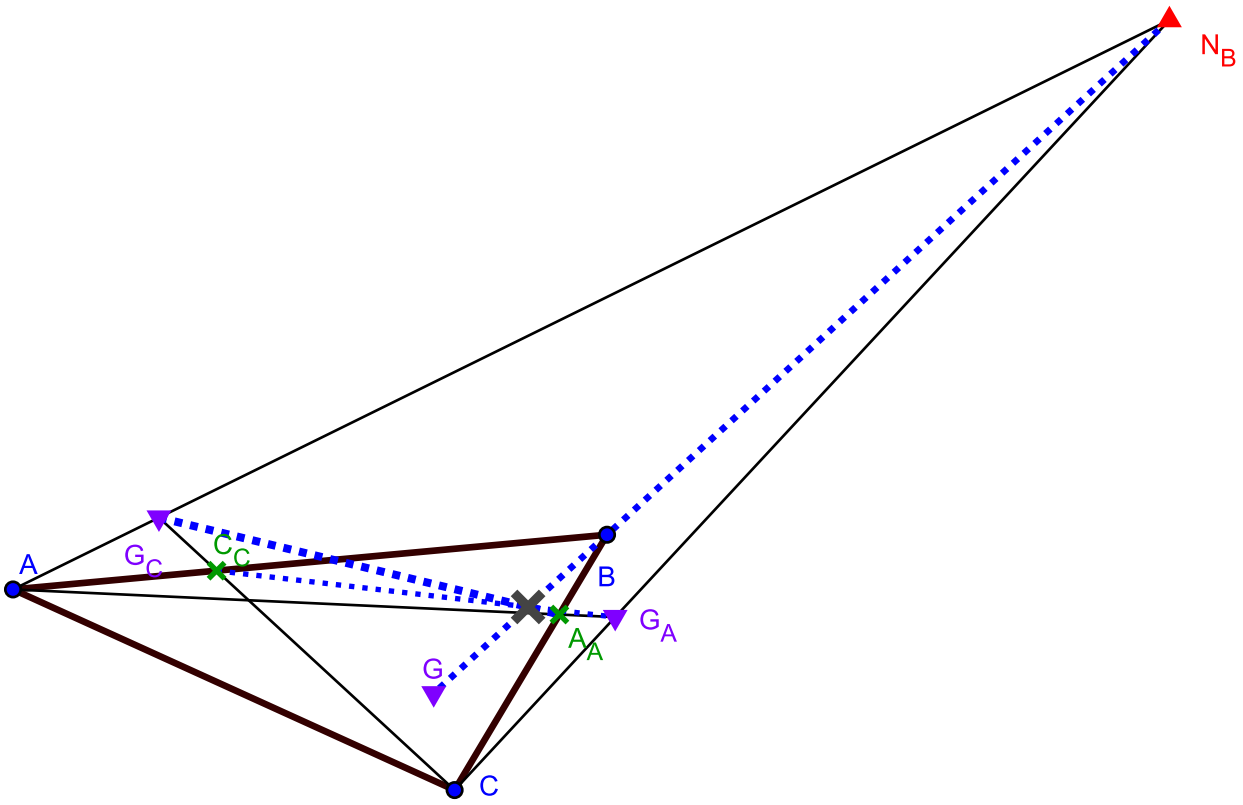
9. По доказанным выше утверждениям, $\frac{\overline{H'M}}{\overline{H'O}} = \frac{4}{3}$; $\frac{\overline{NI}}{\overline{NM}} = \frac{3}{2}$; $\frac{\overline{BeO}}{\overline{BeI}} = \frac{1}{2}$ По теореме Менелая для $\triangle OMI$, точки H',N, Be лежат на одной прямой. Применим теперь теорему Менелая для прямой MO и треугольника $IBeN$. Получим, что $\frac{\overline{H'Be}}{\overline{H'N}} = \frac{\overline{OBe}}{\overline{OI}} \cdot \frac{\overline{MI}}{\overline{MN}}$
$\frac{\overline{OBe}}{\overline{OI}} = -1$; $\frac{\overline{MI}}{\overline{MN}} = -\frac{1}{2}$. Значит, $\frac{\overline{H'Be}}{\overline{H'N}} = \frac{1}{2}$, то есть Be - середина отрезка $H'N$, что и требовалось доказать.



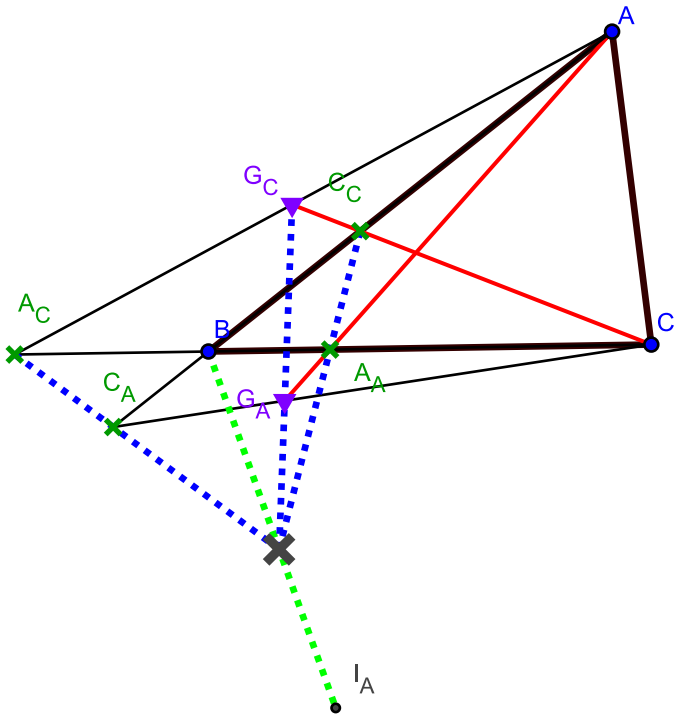
Утверждение про Be_A,Be_B,Be_C доказывается аналогично.

Замечание. Пусть l - прямая, проходящая через H',Be,N. Аналогично можно определить прямые l_A,l_B,l_C. Если $\triangle ABC$ неранобедренный, то прямые l,l_A,l_B,l_C попарно различны. Действительно, пусть, например, совпали l и l_A. Сделаем гомотетию с центром в точке M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Точки N,N_A,N_B,N_C перейдут в I,I_A, I_B, I_C соответственно, H' - в H. Раз l и l_A совпали, точки I_A,I, H лежат на одной прямой. Эта прямая - внутренняя биссетриса угла BAC. Поскольку на ней лежит H, она является и высотой треугольника. Это противоречит неравнобедренности трегольника ABC.

10. Точки A, A_A, G_A лежат на одной прямой. Аналогично, на одной прямой лежат C, C_C, G_C. Применим для двух указанных троек точек теорему Паппа. Получим, что точки $AC_C \cap CA_A$, $C_CG_A \cap A_AG_C$, $AG_C \cap CG_A$ коллинеарны. $AC_C \cap CA_A = B$. Осталось показать, что $AG_C \cap CG_A$ лежит на прямой BG. AG_C проходит через A_C, CG_A - через C_A, BG - через B_0. Значит, прямые AG_C, CG_A, BG проходят через N_B. Утверждение доказано.


N_B
A
G_C
C_C
B
G_A
A_A
G
C

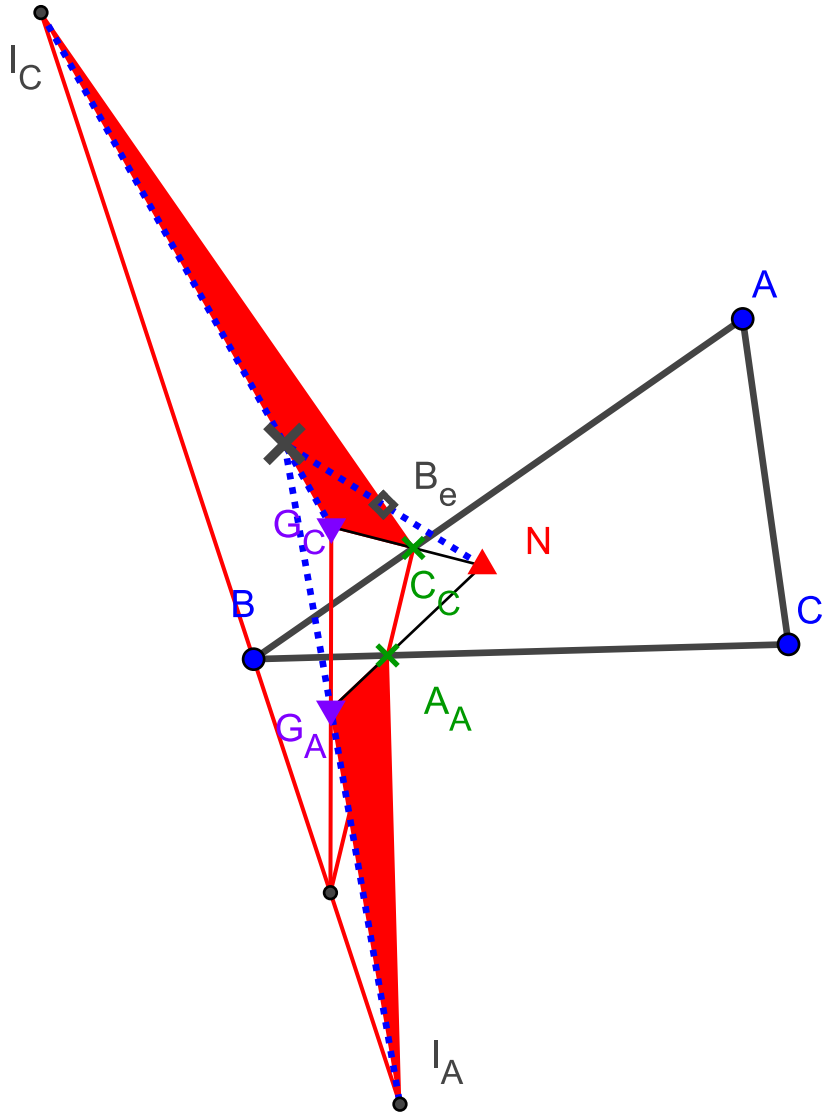
11'. Применим теорему Паппа для троек точек A, A_A, G_A и C, G_C, C_C. точки $AC_C \cap CG_A$, $C_CA_A \cap G_AG_C$, $AG_C \cap CA_A$ коллинеарны. Заметим, что $AC_C \cap CG_A = C_A$; $AG_C \cap CA_A = A_C$. Значит, прямые C_CA_A, C_AA_C, G_AG_C конкурентны. Отрезки BC_A и BA_A равны как касательные к вневписанной окружности, касющейся стороны BC. Значит, C_A и A_A симметричны относительно внешней биссектрисы угла B. Аналогично, C_C и A_C симметричны относительно внешней биссетрисы угла B. Следовательно, прямые A_AC_C и A_CC_A пересекутся на прямой I_AI_C. Значит, прямые C_CA_A, C_AA_C, G_AG_C, I_AI_C конкурентны, что и требовалось показать.



11. Аналогично, конкурентны, например, прямые A_BC_0, C_BA_0, G_BG, BI. Теорему Паппа нужно применить для троек точек A, G_B, B_A и C, C_0, G. Можно найти ещё аналогичные четвёрки конкурентных прямых.

12. Согласно утверждению задачи 11, прямые A_AC_C, G_AG_C, I_AI_C конкурентны. Следовательно, треугольники $A_AG_AI_A$ и $C_CG_CI_C$ перспективны. По теореме Дезарга, точки $A_AG_A \cap C_CG_C$, $A_AI_A \cap C_CI_C$, $G_AI_A \cap G_CI_C$ коллинеарны. $A_AG_A \cap C_CG_C = N$. $\triangle ABC$ является ортотреугольником в $\triangle I_AI_BI_C$. Поскольку $I_CC_C \perp AB$ (стороне ортотреугольника), I_CC_C проходит через центр описанной около $\triangle I_AI_BI_C$ окружности. Аналогично, через него

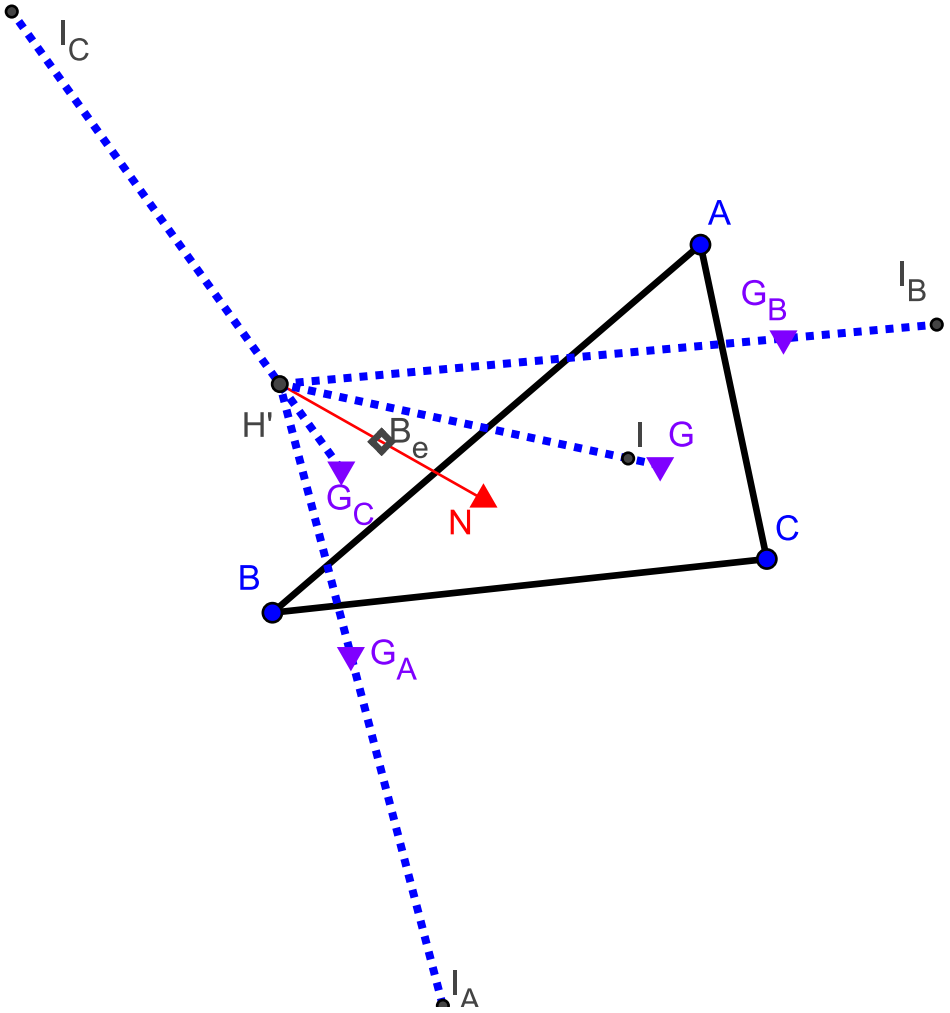
проходит и I_AA_A. Таким образом, $A_AI_A \cap C_CI_C = Be$. Значит, $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be, N коллинеарны, что и требовалось доказать.



12'. Применив теорему Дезарга для $\triangle C_AG_AI_A$ и $\triangle A_CG_CI_C$, получаем, что $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be_B, N_B коллинеарны.

13. Согласно утверждению задачи 12, $I_AG_A \cap I_CG_C$ лежит на прямой l. Аналогично, $I_AG_A \cap I_CG_C$ лежит на прямой l_B. Если $\triangle ABC$ неравнобедренный, l и l_B различны. При этом обе указанные прямые проходят через H' по утверждению задачи 9. Следовательно, $I_AG_A \cap I_CG_C = H'$. Так же, IG и I_BG_B проходят через H'. Для равнобедренных треугольников наше

утверждение следует из соображений непрерывности.



Точки Нагеля, Жергонна и Фейербаха и их свойства

А.Якубов, А.Зайков, М.Дидин, А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков

2. Основные задачи. Решения.

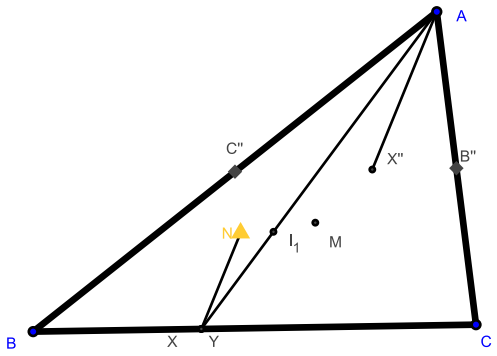
14. Рассмотрим полярное преобразование относительно вписанной окружности. Прямая A_0B_0 перейдет в точку C. Прямая C_0I перейдет в точку на бесконечно удаленной прямой соответствующую направлению AB. Следовательно точка $S = A_0B_0 \cap C_0I$ перейдет в прямую n проходящую через C и параллельную AB. Тогда, по определению полярного преобразования четверка прямых CA_0, CB_0, CS и n образуют гармоническую четверку. При проекции из точки C на прямую AB мы получим точки A, B, бесконечно удаленную и середину стороны (т.к. отношение -1), а значит, C, S и C'' на одной прямой.

15. Сделаем композицию инверсии относительно окружности с центром в A радиуса $\sqrt{AB \cdot AC}$ и симметрии относительно внутренней биссектрисы угла BAC. Заметим, что точки B и C поменялиясь местами. Значит, прямая BC перешла в окружность, описанную около треугольника ABC. Вписанная окружность перешла в окружность, касающуюся лучей AB и AC, а также окружности ABC внешним образом в точке X, где X — образ точки A_0 в результате данных преобразований. Следовательно, G_2 лежит на прямой AX. Так как A — внешний центр гомотетии, перводящей вписанную окружность в её образ в результате наших преобразований, а X — центр внутренней гомотетии, переводящей образ вписанной окружности в описанную, то, по теореме о трёх гомотетиях, центр внутренней гомотетии, переводящей вписанную в $\triangle ABC$ окружность в его описанную, лежит на прямой AX, то есть на прямой AG_2. Аналогично он лежит на прямых BG_2 и CG_2. Таким образом, он совпадает с G_2. То, что N_2 — центр внутренней гомотетии, доказывается аналогично.

16. Как известно, изогональное и изотомическое сопряжение переводят прямые в коники, содержащие вершины треугольника, и наоборот (коники, содеражщие вершины, — в прямые). Значит, композиция изогонального и изотомического сопряжений переводит прямые в прямые, т.е. является проективным преобразованием. Это преобразование переводит точку N_2 в G, G_2 — в N, I — в I_1, O — в H_1. Согласно задаче 15, O, I, G_2, N_2 —

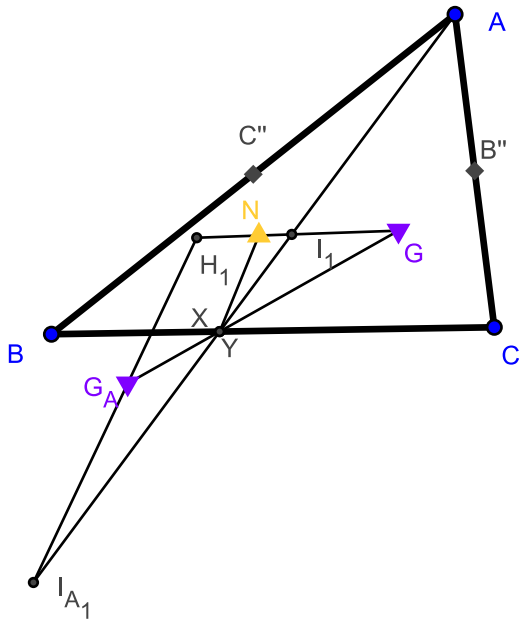
гармоническая четвёрка точек, лежащих на одной прямой. Следовательно, четвёрка H_1, I_1, N, G обладает этим же свойством. Для остальных указанных в утверждении четвёрок доказательство производится аналогично.

17. Пусть X — точка пересечения NN_A и BC, Y — точка пересечения $I_{A_1}I_1$ и BC. Так как I_1 и I_{A_1} изотомически сопряжены I и I_A соответственно, то $\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{AC}{AB}$. Сделаем гомотетию с центром в M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. По задаче 7, прямая NN_A перейдёт в прямую II_A, то есть внутреннюю биссектрису угла A. Точки B и C перейдут в B'' и C''' соответственно, X — в X''. По свойству биссектрисы, $\frac{\overline{B''X''}}{\overline{X''C''}} = \frac{B''A}{C''A} = \frac{CA}{BA} = \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}}$. При этом, $\frac{\overline{B''X''}}{\overline{X''C''}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}$. Значит, X и Y совпадают. Таким образом, $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC конкурентны.



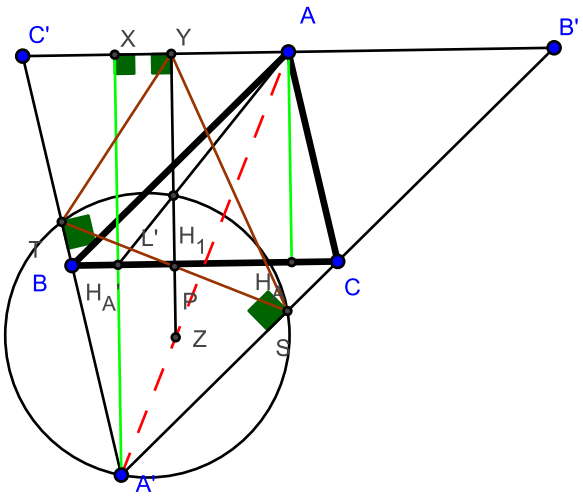
Конкурентность $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC доказывается аналогично.

18. Точки I_1, H_1, N, G лежат на одной прямой; I_{A_1}, H_1, N_A, G_A лежат на одной прямой. При этом двойное отношение четвёрки I_1, H_1, N, G равно -1, и двойное отношение четвёрки I_{A_1}, H_1, N_A, G_A равно -1. Следовательно, прямые $I_{A_1}I_1$, NN_A, GG_A конкурентны. Применяя задачу 17, получаем требуемое.

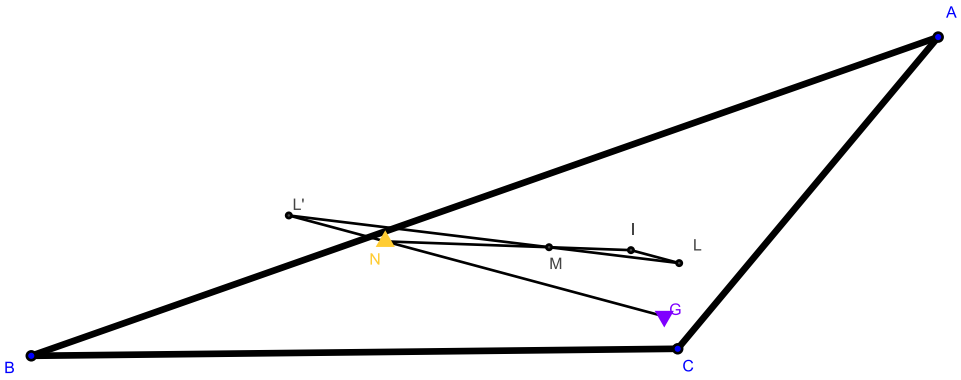


19. Согласно задаче 16, все указанные прямые проходят через H_1. Значит, необходимо и достаточно доказать, что H_1 и L' совпадают. Для этого покажем, что AH_1 проходит через L'. Пусть X и Y — проекции A' и L' на прямую $B'C'$ соответственно, Z симметрично Y относительно L'. Прямая AH_1 проходит через точку, симметричную H_A относительно A''. Заметим, что при симметрии относительно A'' высота из A на BC переходит в прямую $A'X$. Прямая BC делит отрезок $A'X$ пополам. Следовательно, AH_1 проходит через середину $A'X$. Четырехугольник $ZYXA'$ — трапеция, а точка L' — середина основания YZ. Поэтому AH' проходит через середину основания $A'X$. Чтобы показать, что AH' проходит через L' покажем, что A — точка пересечения боковых сторон трапеции, то есть, что A, Z, A' лежат на одной прямой. Пусть S и T — проекции L' на прямые $A'B'$ и $A'C'$ соответственно. Треугольник STY — педальный треугольник точки L' относительно треугольника $A'B'C'$. Так как L' — точка Лемуана $\triangle A'B'C'$, она является точкой пересечения медиан в своём педальном треугольнике. Пусть P — точка пересечения ST и YL'. Тогда YP — медиана треугольника YST. Следовательно, $\frac{\overline{YL'}}{\overline{L'P}} = 2$, $\overline{YL'} = \overline{L'Z}$. Отсюда P — середина $L'Z$. Отрезки ST и $L'Z$, пересекаясь, делятся пополам. Значит, $SL'TZ$ — параллелограмм. Так как $SL' \perp SA'$ и $TL' \perp TA'$, то $SZ \perp A'T$ и $TZ \perp A'S$, т.е. Z — ортоцентр треугольника $SA'T$, а

L' — точка его описанной окружности, диаметрально противоположная A'. Отсюда прямые $A'L'$ и $A'Z$ симметричны относительно внутренней биссектрисы угла $B'A'C'$, т.е. $A'L'$ — симедиана в $\triangle A'B'C'$, следовательно, $A'Z$ — его медиана. Поскольку A — середина $B'C'$, точки A', Z, A лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.



20. При гомотетии с центром в M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ точки N и L' перейдут в I и L соответственно. Итак, прямые IL и NL' параллельны. Осталось заметить, что, по задаче 19, точки L', N, G лежат на одной прямой.



Аналогично параллельны пары прямых N_AG_A и I_AL, N_BG_B и I_BL, N_CG_C

и $I_C L$.

21. Оси перспективы треугольников $N_A N_B N_C$ и ABC, а также $G_A G_B G_C$ и ABC совпадают, согласно задаче 18, с прямой через $AB \cap I_{A_1} I_{B_1}$, $AC \cap I_{A_1} I_{C_1}$, $BC \cap I_{B_1} I_{C_1}$.
Перпендикулярность доказывается либо через теорему Сонда (задача 23) либо с помозью трилинейной поляры (задачи 25-29).

22. Треугольник $N_A N_B N_C$ гомотетичен треугольнику $I_A I_B I_C$ с центром в M. Значит, $N_A N_B \parallel I_A I_B$, т.е. $N_A N_B \perp CI$. Аналогично, $N_A N_C \perp BI$; $N_B N_C \perp AI$. Значит I — центр ортологичности треугольников $N_A N_B N_C$ и ABC.

23. Треугольники $N_A N_B N_C$ и ABC перспективны с центром в точке G. Достаточно показать, что I является одним из центров ортогональности этих треугольников, что следует из задачи 22.

3. Дополнительные задачи. Указания.

24. Трилинейная поляра точки G совпадает с ее полярой относительно вписанной окружности.

25. Достаточно доказать утверждение задачи для правильного треугольника.

26. Следует из теорем Чевы и Менелая.

27. Проективным преобразованием сводится к задаче 25.

31. Достаточно доказать утверждение задачи для правильного треугольника.

31', 32. Оба утверждения равносильны следующему: касательная к вписанной окружности в точке Фейербаха касается также вписанного *эллипса Штейнера*, касающегося сторон треугольника в их серединах (см. [1]).

33. Из задачи 16 следует, что точка Нагеля лежит на *гиперболе Фейербаха* (см. [2]).

Список литературы

[1] http://www.http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp23-31.pdf

[2] А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

The Nagel, Gergonne, and Feuerbach points and their properties

1. Introductionary problems

A.Jakubov, M.Didin, P.Kozhevnikov, D.Krekov, A.Zaslavsky, O.Zaslavsky

0. *Ceva theorem.* Let A', B', C' be points on the sidelines of a triangle ABC. Prove that AA', BB', CC' are conurrent or parallel iff $BA' \cdot CB' \cdot AC' = -CA' \cdot AB' \cdot BC'$ (here we consider directed segments).

Let ABC be a triangle. Let the inscribed circle touches the sides BC, CA, AB at points A_0, B_0, C_0, respectively.

1. Prove that[1] AA_0, BB_0, CC_0 have a common point G.

The point G from the previous problem is called *the Gergonne point* of the triangle. Consider the excircle touching the side BC. Let this excircle touches AB, AC, and BC at C_A, B_A, and A_A, respectively.

2. AA_A,BB_A, and CC_A have a common point G_A.

Let us call the point G_A from the previous problem *the external Gergonne point* corresponding to A. Similarly define points A_B, B_B, C_B, G_B, A_C, B_C, C_C, G_C.

Introduce some standart notation. Let I be the incenter, and I_A, I_B, I_C be the centers of the excircles. Let Be, Be_A, Be_B, Be_C be the centers of the circles $I_AI_BI_C$, II_BI_C, I_AII_C, I_AI_BI, respectively (Be is called *the Bevan point*, let us call Be_A, Be_B, Be_C *the external Bevan points*). Let O, H, M be the circumcenter, the orthocenter, the centroid of ABC, respectively. Let A'',B'',C'' be the midpoints of BC, CA, AB, respectively. Let A',B',C' be reflections of A, B, C in A'',B'',C'', respectively, let H' be the orthocenter of $A'B'C'$.

3. O, M, H are collinear, and $\frac{\overline{OM}}{\overline{MH}} = \frac{1}{2}$.

The line from the previous problem is called *the Euler line* of the given triangle.

3'. $\frac{\overline{H'M}}{\overline{H'O}} = \frac{4}{3}$.

[1] in the next problems the words "Prove that" will be omitted

4. Let X_A, X_B, X_C be points on the sides BC, CA, AB, respectively, so that AX_A, BX_B, CX_C intersect at point X. Let Y_A, Y_B, Y_C be reflections of X_A, X_B, X_C in A'', B'', C'', respectively. AY_A, BY_B, CY_C have a common point Y.

Points X and Y from the previous problem are called *isotomically conjugates* with respect to ABC.

5. AA_A, BB_B, CC_C have a common point N which is isotomically conjugate to the Gergonne point.

The point from the previous problem is called *the Nagel point*.

6. Lines AA_0, BB_C, CC_B have a common point N_A that is isotomically conjugate to G_A.

The point from the previous problem is called *the external Nagel point* corresponding to A. Points N_B and N_C defined similarly.

To each direction put into correspondence a point at infinity (assume that this point of infinity lies on each line of this direction). Triangles $X_1Y_1Z_1$ and $X_2Y_2Z_2$ are called *perspective* if lines X_1X_2, Y_1Y_2, and Z_1Z_2 are concurrent. In this case the common point of X_1X_2, Y_1Y_2, and Z_1Z_2 is called *the perspector* of triangles $X_1Y_1Z_1$ and $X_2Y_2Z_2$ (the perspector could be a point at infinity).

7. M cuts each of segments IN, I_AN_A, I_BN_B, I_CN_C at ratio 1:2.
Corollary. Triangles $I_AI_BI_C$ and $N_AN_BN_C$ are perspective with M as a perspector.

8. O is the midpiont of segments BeI, Be_AI_A, Be_BI_B, Be_CI_C.
Corollary. Triangles $I_AI_BI_C$ and $Be_ABe_BBe_C$ are perspective with O as a perspector.

9. Be,Be_A,Be_B,Be_C are the midpoints of the segments $H'N$,$H'N_A$,$H'N_B$,$H'N_C$, respectively.
Corollary. Triangles $Be_ABe_BBe_C$ and $N_AN_BN_C$ are homothetic (hence perspective) with center H' and ratio 2.

10. Lines C_CG_A, A_AG_C, BG are concurrent.

11. Lines A_BC_0, G_BG, BI, C_BA_0 are concurrent.

11'. Lines A_AC_C, G_AG_C, I_AI_C, A_CC_A are concurrent (as well as analogous triples of lines).

12. $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be, N are collinear.

12'. $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be_B, N_B are collinear.

13. I_AG_A, I_BG_B, I_CG_C, and IG, meet at H'.
Corollary: Triangles $I_AI_BI_C$ and $G_AG_BG_C$ are perspective with perspector H'.

The Nagel, Gergonne, and Feuerbach points and their properties

2. Main problems

A.Yakubov, A.Zaykov, M.Didin, P.Kozhevnikov, D.Krekov, A.Zaslavsky, O..Zaslavsky

14. A_0B_0, C_0I, CC'' are concurrent.

Suppose P be an arbitrary point not lying on the sidelines of ABC. Then lines symmetric to AP, BP, CP in bisectors of angles A, B, C, respectively, have a common point (perhaps a point at infinity). This point is called *isogonally conjugate* to P with respect to ABC.

Further notation. Let I_1, I_{A_1}, I_{B_1}, I_{C_1}, H_1 be isotomically conjugates to I, I_A, I_B, I_C, H, respectively; let G_2, N_2 be isogonally conjugates to G, N, respectively. Similarly define G_{A_2}, N_{A_2}, G_{B_2}, N_{B_2}, G_{C_2}, N_{C_2}. Let L' be the Lemoinne point of $\triangle A'B'C'$.

15. N_2 and G_2 are centers of homotheties taking the incircle of ABC to the circumcircle of ABC.

16. H_1, I_1, N, G are collinear and form a harmonic quadruple.

16'. Same for quadruples H_1, I_{A_1}, N_A, G_A, etc.

17. $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC are concurrent.

17'. $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC are concurrent.

18. $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC, GG_A are concurrent.

18'. $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC, G_BG_C are concurrent.

19. NG, N_AG_A, N_BG_B, N_CG_C meet at L'.
Corollary: Triangles $N_AN_BN_C$ and $G_AG_BG_C$ are perspective with perspector L'.

20. Lines IL and NG are parallel.

20'. $N_AG_A \parallel I_AL$, $N_BG_B \parallel I_BL$, $N_CG_C \parallel I_CL$.

Let XYZ and $X_1Y_1Z_1$ be perspective triangles. By Desargue theorem, $XY \cap$

X_1Y_1, $XZ \cap X_1Z_1$, $ZY \cap Z_1Y_1$ lie on a line called *the perspective axis* of given triangles.

21. The perspective axis of $N_AN_BN_C$ and ABC coincides with the perspective axis of $G_AG_BG_C$ and ABC. This axis if perpendicular to IG.

(*Sondat theorem*). Suppose triangles XYZ and $X_1Y_1Z_1$ are perspective and orthologic simultaneously. Then two centers of orthology and the perspector lie on a line одновременно и перспективны и ортогологичны, то два центра ортологичности и центр перспективы этих треугольников лежат на одной прямой, перпендикулярной оси перспективы $\triangle XYZ$ и $\triangle X_1Y_1Z_1$

22. I is the orthology center of triangles $N_AN_BN_C$ and ABC.

23. Solve the problem 20 using problems 21 and 22 (and perhaps some of previous).

3. Additional problems

Let U be an arbitrary point not lying on XY, YZ, ZX. The perspective axis of traingle XYZ and the cevian traingle of U is called *the trilinear polar line* of U with respect to $\triangle XYZ$.

24. The trilinear polar line of G is perpendicular to IG.

25. Let U be a point of the circumcircle of $\triangle XYZ$, $U \neq X$,$U \neq Y$,$U \neq Z$. Suppose L_0 is the Lemoinne point of triangle $\triangle XYZ$. Then the trilinear polar line of U with respect to $\triangle XYZ$ passes through L_0.

26. Given a triangle XYZ and a point Q not lying on the sidelines of XYZ. Suppose that $XQ \cap YZ = X_1$;$YQ \cap XZ = Y_1$; $ZQ \cap YX = Z_1$; $Y_1Z_1 \cap YZ = X_2$; then Y,Z,X_1,X_2 is a harmonic quadruple.

27. Let U and V be points not lying on XY, XZ, YZ. Let U' and V' be its isogonally (or isotomically) conjugates with respect to $\triangle XYZ$. If V lies on the trilinear polar line of U', then U lies on the trilinear polar line of V'.

28. Perspective axis of $N_AN_BN_C$ and ABC, or $G_AG_BG_C$ and ABC, is the trilinear polar line of I_1 with respect to ABC.

29. The trilinear polar lines of I_1 and G with respect to ABC are parallel.

30. Solve the problem 20 using problems 24-28 (and perhaps some other previous problems) WITHOUT applying Sondat theorem.

31. If P lies on the trilinear polar line of G, then the trilinear polar line of P touches the incircle.

The Feuerbach theorem. The nine-point circle of triangle ABC touches its incircle and excircles. The touching points F, F_A, F_B, F_C are called *the Feuerbach points.*

31'. Suppose P is the point at infinity of the trilinear polar line of G; then the trilinear polar line of P touches the incircle at F.

32. The reflections of F in the sidelines of $\triangle A_0B_0C_0$ lies on OI.

33. A_A, B_B, C_C, and F are concyclic.

34. Formulate analogues of problems 31', 32, 33 for points F_A, F_B, F_C.

The Nagel, Gergonne, and Feuerbach points and its properties

1. Introductory problems. Solutions

A.Yakubov, A.Zaykov, M.Didin, P.Kozhevnikov, D.Krekov, A.Zaslavsky, O..Zaslavsky

1. Follows from the Ceva theorem.

2. Follows from the Ceva theorem.

3. Consider the homothety with center M and coefficient -2.

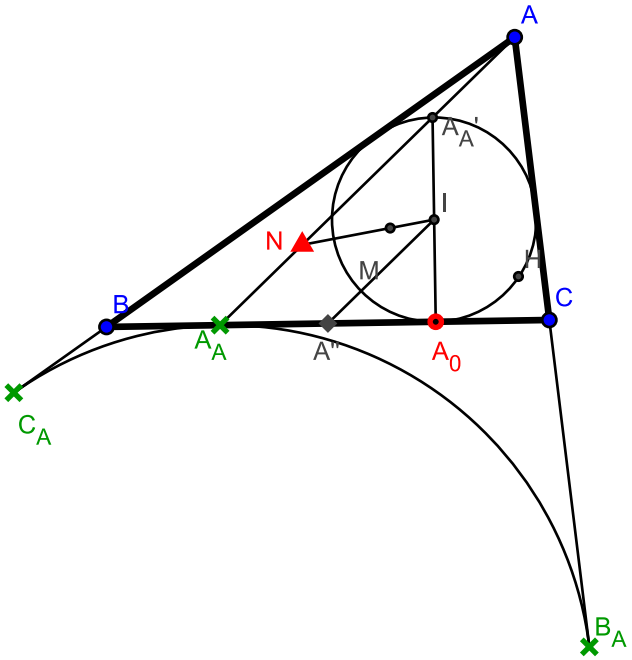
3'. Use the assertion of problem 3 and the homothety with center M and coefficient -2.

4. Follows from the Ceva theorem.

5. Follows from the Ceva theorem.

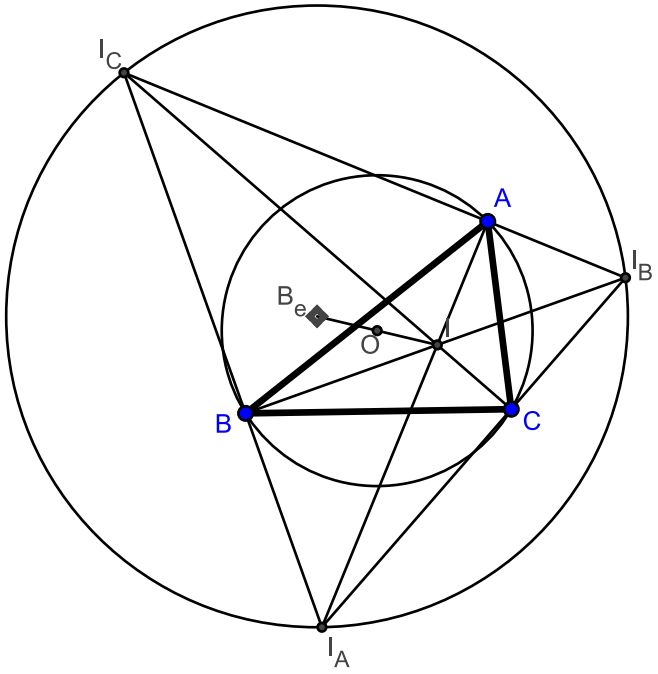
6. Follows from the Ceva theorem.

7. It is kn0wn that $BA_0 = CA_A$, hence A'' is the midpoint of segment A_0A_A. By the definition of isotimic conjugation N lies on AA_A. Take the homothety with center A transforming the excircle touching the side BC to the incircle. Let it map A_A to A'_A. The tangent to the incircle at A'_A is parallel to eh tangent to the excircle at A_A coinciding with the line BC. Also it is clear that A'_A is distinct from A_0. Therefore A_0 and A'_A are opposite and I is the midpoint of $A_0A'_A$. Hence $A''I$ is a medial line of $\triangle A'_AA_0A_A$. Hence $AA_A \| A''I$. Similarly $BB_B \| B''I$; $CC_C \| C''I$. Therefore the homothety with center M and coefficient -2 transforming $\triangle A''B''C''$ to $\triangle ABC$ maps I to N. Thus M divides IN in ratio 1:2.

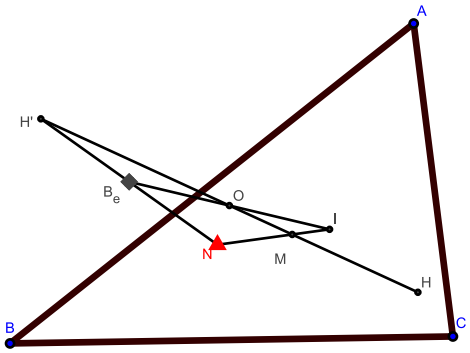


The assertion for the segments I_AN_A, I_BN_B, I_CN_C may be proved similarly.

8. The internal and the external bisectors of an arbitrary angle are perpendicular. Therefore I is the orthocenter of triangle $I_AI_BI_C$, and I_A, I_B, I_C are the orthocenters of $\triangle II_BI_C$, $\triangle I_AII_C$, $\triangle I_AI_BI$ respectively. The points A, B, C are the feet of altitudes in these four triangles, Therefore O is the center of their common nine-point-circle. The center of NPC bisects the segment between the circumcenter and the orthocenter. From this we obtain the required assertion.



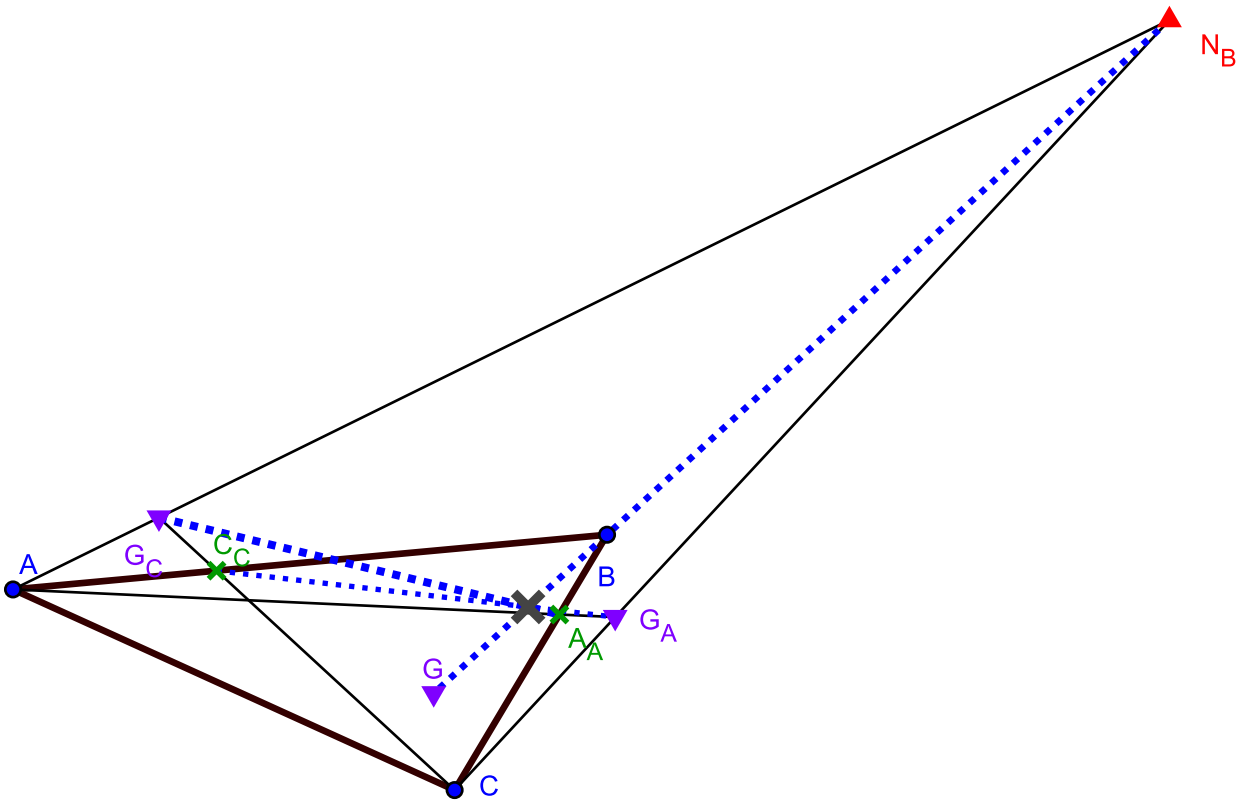
9. We proved above that $\frac{\overline{H'M}}{\overline{H'O}} = \frac{4}{3}$; $\frac{\overline{NI}}{\overline{NM}} = \frac{3}{2}$; $\frac{\overline{BeO}}{\overline{BeI}} = \frac{1}{2}$. Using the Menelaus theorem to $\triangle OMI$, we obtain that H',N, Be are collinear. Now using the Menelaus theorem to the line MO and the triangle $IBeN$ we obtain that $\frac{\overline{H'Be}}{\overline{H'N}} = \frac{\overline{OBe}}{\overline{OI}} \cdot \frac{\overline{MI}}{\overline{MN}}$
$\frac{\overline{OBe}}{\overline{OI}} = -1$; $\frac{\overline{MI}}{\overline{MN}} = -\frac{1}{2}$. Hence $\frac{\overline{H'Be}}{\overline{H'N}} = \frac{1}{2}$, i.e. Be is the midpoint of $H'N$.



The assertion for Be_A, Be_B, Be_C may be proved similarly.

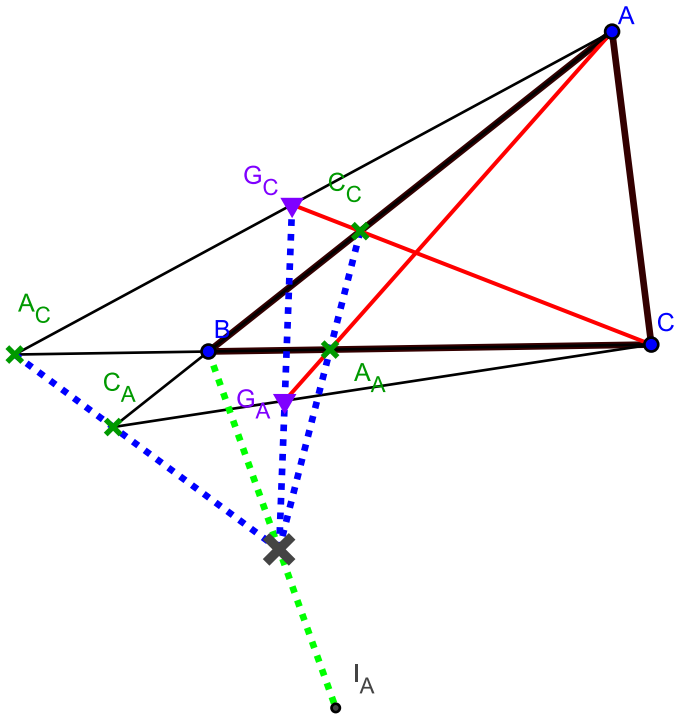
Remark. Let l be the line passing through H', Be, N. Define the lines l_A, l_B, l_C similarly. If $\triangle ABC$ is not isosceles, then the lines l, l_A, l_B, l_C are distinct. In fact, suppose for example that l and l_A coincide. Consider the homothety with center M and coefficient $-\frac{1}{2}$. It maps N, N_A, N_B, N_C to I, I_A, I_B, I_C respectively, also it maps H' to H. If l and l_A coincide, then I_A,I, H are collinear. Hence these points lie on the bisector of angle BAC. This line is also the altitude because it passes through H, therefore ABC is isosceles — contradictory.

10. The points A, A_A, G_A are collinear. Similarly C, C_C, G_C are collinear. By the Pappus theorem $AC_C \cap CA_A$, $C_CG_A \cap A_AG_C$, $AG_C \cap CG_A$ are collinear. Since $AC_C \cap CA_A = B$ we have to prove that $AG_C \cap CG_A$ lies on BG. But AG_C passes through A_C, CG_A passes through C_A, and BG passes through B_0. Therefore the lines AG_C, CG_A, BG pass through N_B.


N_B
A
G_C
C_C
B
G_A
A_A
G
C

11'. Use the Pappus theorem to A, A_A, G_A and C, G_C, C_C. We obtain that $AC_C \cap CG_A$, $C_CA_A \cap G_AG_C$, $AG_C \cap CA_A$ are collinear. Note that $AC_C \cap CG_A = C_A$; $AG_C \cap CA_A = A_C$. Therefore the lines C_CA_A, C_AA_C, G_AG_C concur.

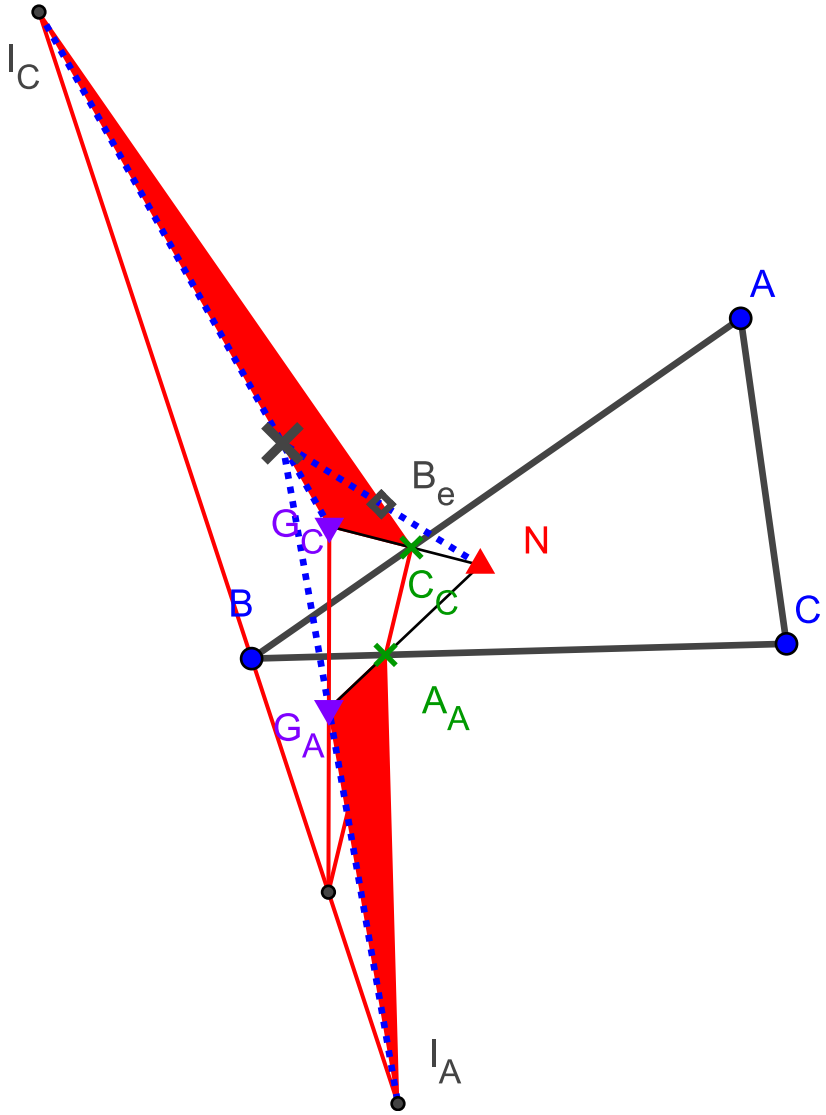
The segments BC_A and BA_A are congruent as two tangents to the excircle touching BC. Hence C_A and A_A wrt the external bisector of angle B. Similarly C_C and A_C are symmetric wrt the external bisector of angle B. Therefore the lines A_AC_C and A_CC_A meet on I_AI_C. Hence the lines C_CA_A, C_AA_C, G_AG_C, I_AI_C concur.



11. Similarly we can prove for example that A_BC_0, C_BA_0, G_BG, BI concur, applying the Pappus theorem to A, G_B, B_A and C, C_0, G.

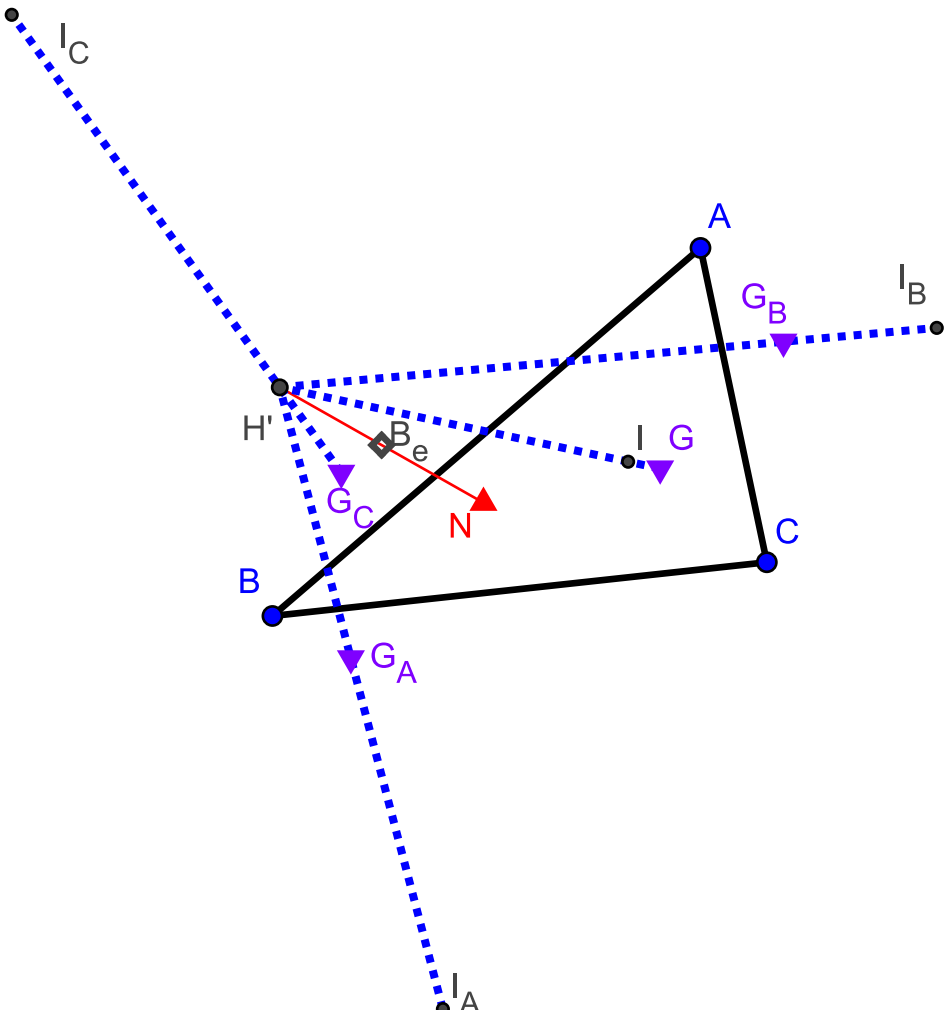
12. By the assertion of problem 11 the lines A_AC_C, G_AG_C, I_AI_C concur. Therefore the triangles $A_AG_AI_A$ and $C_CG_CI_C$ are perspective. By the Desargues theorem the points $A_AG_A \cap C_CG_C$, $A_AI_A \cap C_CI_C$, $G_AI_A \cap G_CI_C$ are collinear. Now $A_AG_A \cap C_CG_C = N$, the triangle ABC is the orthotriangle of $\triangle I_AI_BI_C$. Since $I_CC_C \perp AB$ (the sideline of the orthotriangle), we obtain that I_CC_C passes through the circumcenter of $\triangle I_AI_BI_C$. Similarly I_AA_A passes through this circumcenter. Thus $A_AI_A \cap C_CI_C = Be$. Hence

$I_AG_A \cap I_CG_C$, Be, N are collinear.



12'. Using the Desargues theorem to $\triangle C_AG_AI_A$ and $\triangle A_CG_CI_C$, we obtain thah $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be_B, N_B are collinear.

13. By the assertion of problem 12, $I_AG_A \cap I_CG_C$ lies on l. Similarly $I_AG_A \cap I_CG_C$ lies on l_B. If $\triangle ABC$ is not isosceles l and l_B are distinct. By the assertion of problem 9 both lines pass through H'. Therefore $I_AG_A \cap I_CG_C = H'$. Similarly IG and I_BG_B pass through H'. It is clear that the assertion is also correct for isosceles triangles.


I_C
A
I_B
G_B
H'
B_e
I
G
G_C
N
C
B
G_A
I_A

The Nagel, Gergonne, and Feuerbach points and their properties

A.Yakubov, A.Zaykov, M.Didin, P.Kozhevnikov, D.Krekov, A.Zaslavsky, O..Zaslavsky

2. Main problems

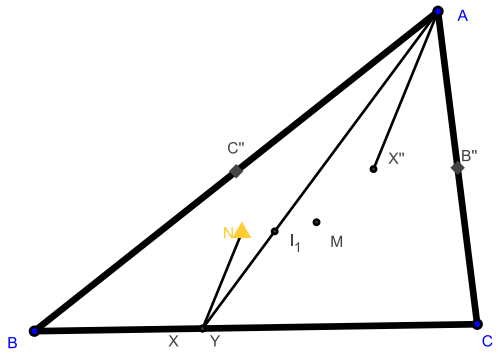
14. Consider the polar transformation wrt the incircle. Point C is the pole of line A_0B_0, and the infinite point of AB is the pole of line C_0I. Therefore $S = A_0B_0 \cap C_0I$ is the pole of line n passing through C and parallel to AB. Then the quadruple of lines CA_0, CB_0, CS and n is harmonic. These lines meet AB at A, B, infinite point and the midpoint of the side (because the cross-ratio is equal to -1), hence C, S and C'' are collinear.

15. Take the composition of the inversion with center A and radius $\sqrt{AB \cdot AC}$ and the reflection about the bisector of angle BAC. It maps B to C and vice versa. Hence the image of line BC is the circumcircle of triangle ABC. The image of the incircle touches the rays AB and AC and touches the circle ABC externally at point X which is the image of A_0. Therefore G_2 lies on AX. Since A is the external homothety center of the incircle and its image, and X is the internal homothety center of the circumcircle and the image of the incircle, we obtain that the internal homothety center of the incircle and the circumcircle lies on the line AX coinciding with AG_2. Similarly it lies on BG_2 and CG_2. Hence this center coincide with G_2. Similarly the external homothety center coincide with N_2.

16. It is known that the isogonal and the isotomic conjugations map lines to circumconics and vice versa. Therefore their composition maps lines to lines, i.e this transformation is projective. It maps N_2 to G, G_2 to N, I to I_1, and O to H_1. By the assertion of problem 15, the quadruple O, I, G_2, N_2 is harmonic. Therefore the quadruple H_1, I_1, N, G is also harmonic. The prove for the remaining quadruples is similar.

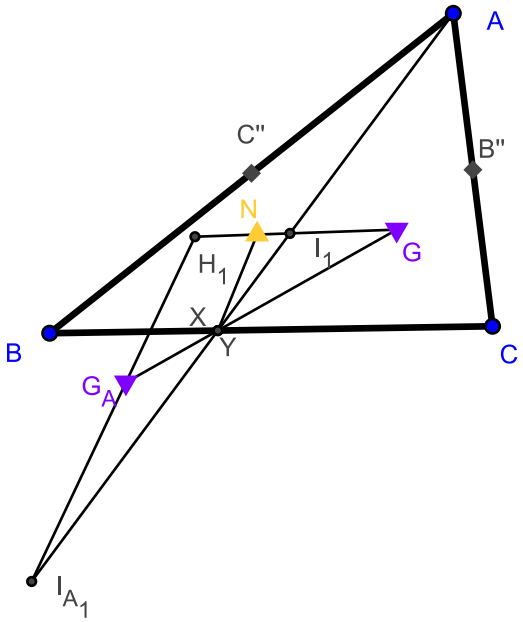
17. Let X be the common point of NN_A and BC, Y be the common point of $I_{A_1}I_1$ and BC. Since I_1 and I_{A_1} are isotomically conjugated to I and I_A respectively, we obtain that $\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{AC}{AB}$. Consider the homothety with center M and coefficient $-\frac{1}{2}$. By the assertion of problem 7 it maps the line NN_A to II_A, i.e the bisector of angle A. Also it maps B and C to B'' and C''' respectively, and X to X''. By the bisector

property $\frac{\overline{B''X''}}{\overline{X''C''}} = \frac{B''A}{C''A} = \frac{CA}{BA} = \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}}$. Also $\frac{\overline{B''X''}}{\overline{X''C''}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}$. Hence X and Y coincide. Thus $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC concur.



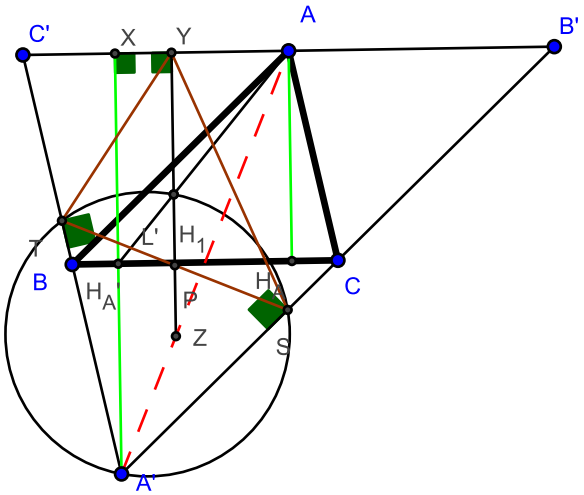
Similarly $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC concur.

18. The points I_1, H_1, N, G are collinear; and I_{A_1}, H_1, N_A, G_A are collinear. Also the quadruples I_1, H_1, N, G and I_{A_1}, H_1, N_A, G_A are harmonic. Therefore the lines $I_{A_1}I_1$, NN_A, GG_A concur. Using the assertion of problem 17 we obtain the required one.

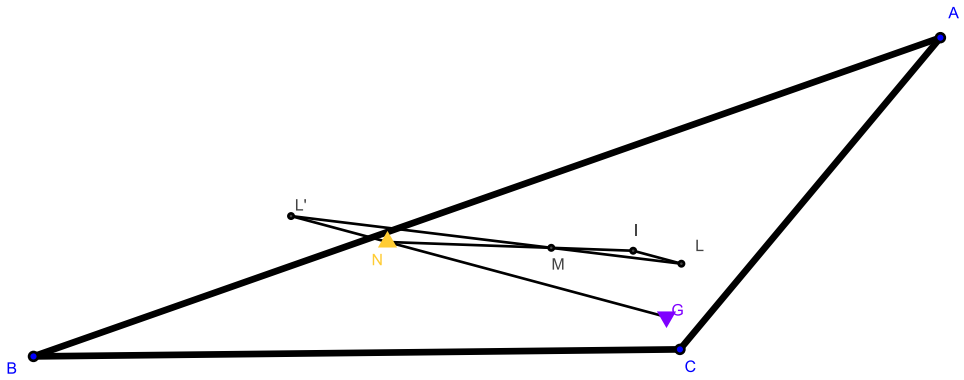


19. By the assertion of the problem 16 all indicated lines pass through H_1. Thus we have to prove that H_1 and L' coincide. Prove that

AH_1 passes through L'. Let X and Y be the projections of A' and L' respectively to $B'C'$, and let Z be the reflection of Y about L'. The line AH_1 passes through the reflection of H_A about A''. Note that the reflection about A'' maps the altitude from A to the line $A'X$. The line BC bisects $A'X$. Therefore AH_1 passes through the midpoint of $A'X$. The quadrilateral $ZYXA'$ is a trapezoid, and L' is the midpoint of its base YZ. Hence AH' passes through the midpoint of $A'X$. To obtain that AH' passes through L', prove that A is the common point of lateral sidelines, i.e. A, Z, A' are collinear. Let S and T be the projections of L' to $A'B'$ and $A'C'$ respectively. The triangle STY is the pedal triangle of L' wrt $A'B'C'$. Since L' is the Lemoine point of $\triangle A'B'C'$, we obtain that L' is the centroid of its pedal triangle. Let P be the common point of ST and YL'. Then YP is a median of triangle YST. Therefore $\frac{\overline{YL'}}{\overline{L'P}} = 2$, $\overline{YL'} = \overline{L'Z}$. From this P is the midpoint of $L'Z$. The common point of ST and $L'Z$ bisects these segments. Hence $SL'TZ$ is a parallelogram. Since $SL' \perp SA'$ and $TL' \perp TA'$, we obtain that $SZ \perp A'T$ and $TZ \perp A'S$, i.e. Z is the orthocenter of triangle $SA'T$, and L' is opposite to A' on its circumcircle. Hence the lines $A'L'$ and $A'Z$ are symmetric wrt the bisector of angle $B'A'C'$, i.e. $A'L'$ is a symedian of $\triangle A'B'C'$, and $A'Z$ is its median. Since A is the midpoint of $B'C'$, we obtain that A', Z, A are collinear.



20. The homothety with center M and coefficient $-\frac{1}{2}$ maps N and L' to I and L respectively. Thus the lines IL and NL' are parallel. But by the assertion of the problem 19 the points L', N, G are collinear.



Similarly the lines N_AG_A and I_AL, N_BG_B and I_BL, N_CG_C and I_CL are parallel.

21. By the assertion of the problem 18 the perspective axes of triangles $N_AN_BN_C$ and ABC, $G_AG_BG_C$ and ABC coincide with the line through $AB \cap I_{A_1}I_{B_1}$, $AC \cap I_{A_1}I_{C_1}$, $BC \cap I_{B_1}I_{C_1}$.
The perpendicularity can be proved by the Sondat theorem (problem 23) or the properties of trilinear polars (problems 25-29).

22. The triangle $N_AN_BN_C$ is homothetic to $I_AI_BI_C$ with center M. Hence $N_AN_B \parallel I_AI_B$, i.e. $N_AN_B \perp CI$. Similarly $N_AN_C \perp BI$; $N_BN_C \perp AI$. Therefore I is the orthology center of triangles $N_AN_BN_C$ and ABC.

23. The triangles $N_AN_BN_C$ and ABC are perspective with center G. Thus it is sufficiently to prove that I is one of their orthology centers which follows from the assertion of problem 22.

3. Additional problems. Hints.

24. The trypolar of G coincide with its polar wrt the incircle.

25. It is sufficiently to consider a regular triangle.

26. Follows from the Ceva and the Menelaus theorem.

27. A projective transformation reduces this problem to the problem 25.

31. It is sufficiently to consider a regular triangle.

31', 32. Both assertions are equivalent to the following one: the tangent to the incircle at the Feuerbach point touches also *the Steiner inellipse*, which touches the sides of the triangle at its midpoints (see. [1]).

33. By the assertion of the problem 16 the Nagel point lies on the *Feuerbach hyperbola* (see. [2]).

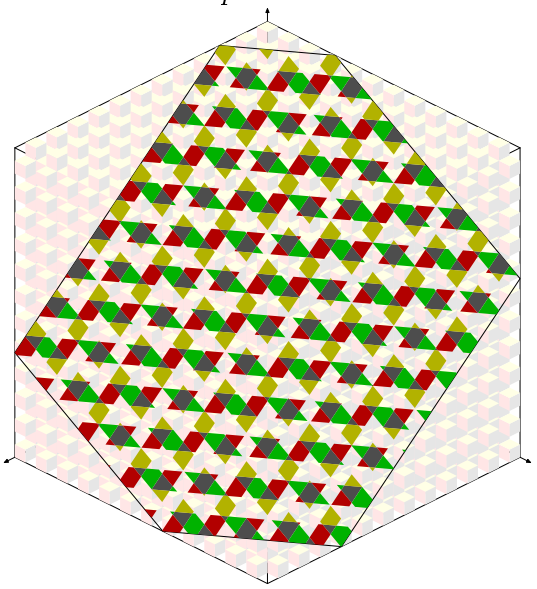
References

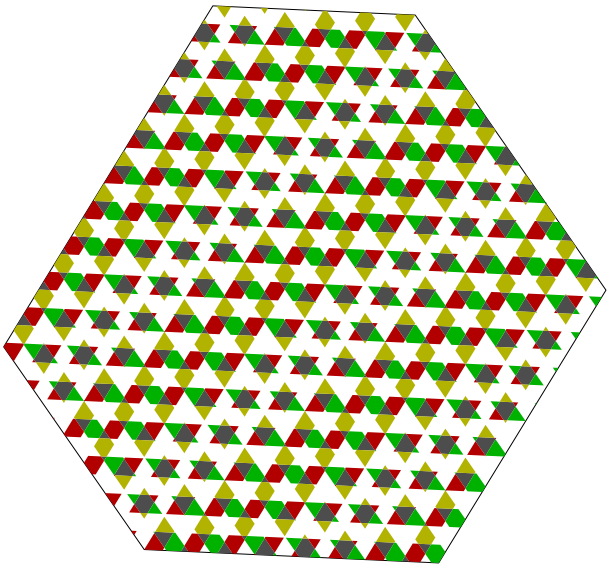
[1] http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp23-31.pdf
[2] A.V.Akopyan, A.A.Zaslavsky. Geometry of conics. AMS, 2007.

Динамика мозаик

С.А.Абрамян*, А.А.Архипова*, П.С.Белопашенцева*, И.И.Богданов, С.А.Дориченко, Ф.А.Коган*, И.В.Нетай*, А.С.Скрипченко*, К.Р.Ступаков*, А.И.Эстеров*
(* – факультет математики НИУ ВШЭ)

Этот сюжет – прогулка до одной открытой проблемы, связанной с топологией, с динамикой и даже с физикой кристаллов. Проблема посвящена геометрии примерно следующих множеств, называемых *квазипериодическими*:





Чтобы понять постановку задачи, Вам предстоит познакомиться с первыми понятиями *эргодической теории* (§2 и §3) и *топологии* (§5 и §7 – эти два параграфа независимы от остального сюжета, с них можно даже начать).

Центральный §4 про мозаики на плоскости – введение в квазипериодическую геометрию. Ей посвящены §6 и §8. Открытая проблема – в самом конце.

Но прежде чем приступать к изображенным выше мозаикам на плоскости, мы вначале исследуем *мозаики на прямой*. Если на клетчатой бумаге нарисовать прямую, то клетки разобьют ее на отрезки.

Какие длины могут быть у этих отрезков? Насколько часто они будут встречаться?

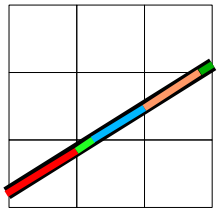
Ответу на разные аспекты этого вопроса посвящены задачи в §§1–3.

Если непонятно какое-то обозначение или вопрос, либо никак не хочет решаться задача без звездочки – спрашивайте нас!! (Мы – это Арина Архипова, Полина Белопашенцева, Илья Богданов, Сергей Дориченко, Кирилл Ступаков, Александр Эстеров)

§1 Мозаики на рациональной прямой

1. **a)** При скольких целых c прямая $6x + 8y = c$ пересекает квадрат $[0, 1]^2$?
b) Каковы длины этих пересечений? Сколько среди этих длин различных? Сколько пересечений имеют данную длину?

Прямая $ax + by = c$ разбивается линиями клетчатой бумаги на отрезки, которые будем называть *плитками*, а разбиение – *мозаикой* на прямой.



2. **a)** Сколько различных длин плиток на прямой $ax + by = c$ с данными целыми a, b и c?
b) Каков *период* этой мозаики, т.е. минимальный шаг, на который ее нужно сдвинуть вдоль прямой, чтобы мозаика перешла в себя?
c) По бильярдному столу с целочисленными длинами сторон $A \times B$ из угла по биссектисе пустили шар. Сколько раз он ударится о борта, прежде чем снова попадет в угол? Какое максимальное и минимальное расстояние он прокатится между двумя отскоками?

§2 Мозаики на иррациональной прямой

Здесь мы рассмотрим мозаики на *иррациональной* прямой $ax + by = c$, т.е. такой что a/b – иррациональное число (например, для определенности можно исследовать $x + \sqrt{2}y = c$).

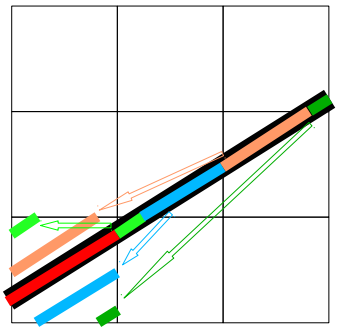
3. **a)** Могут ли быть на иррациональной прямой две плитки равной длины?
b) Может ли на ней быть или не быть бесконечно много плиток равной длины?
c) Могут ли на ней быть или не быть ровно три плитки данной длины?
d) Могут ли на ней быть или не быть бесконечно много плиток попарно различной длины?
e) Опишите геометрически все прямые, на которых есть пара плиток равной длины, отличной от всех остальных плиток.

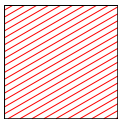
Если у Вас возникли трудности с пунктами **b-e** (а они возникли!), то решите сначала следующую задачу:

4. **a)** Докажите, что у любой ограниченной (т.е. содержащейся в отрезке) последовательности чисел есть сколь угодно близкие члены.

b) **(Лемма Дирихле)** Если λ – иррациональное число, то последовательность чисел $\{\lambda\}, \{2\lambda\}, \{3\lambda\}, \{4\lambda\}, \ldots$ (где фигурными скобками обозначается дробная часть) всюду плотна на отрезке $[0, 1]$, то есть в любой его подотрезок попадает хотя бы один член последовательности.

c) Разрежем прозрачную клетчатую бумагу, на которой нарисована прямая $ax + by = c$, на клетки, сложим все клетки в стопку, и посмотрим на них напросвет. Подмножество квадрата $[0, 1]^2$, которое мы увидим – *обмотка квадрата* $[0, 1]^2$ *прямой* $ax + by = c$ (см.рисунок ниже). Определите обмотку математически строго и докажите, что она пересекается с каждым отрезком, который не параллелен прямой $ax + by = c$. Теперь можно доделать предыдущую задачу.





§3 Пределы и средние

Напомним, что число a называется *пределом* последовательности чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если каждая окрестность a (т.е. каждый содержащий a открытый интервал) содержит все члены последовательности, кроме, быть может, конечного числа. В этом случае пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и говорят, что последовательность a_n *сходится* к a. Если Вы это **хорошо** знаете, следующую задачу можно пропустить.

5. Докажите, что **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, **b)** последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела,

c) если $c_n = a_n + b_n$, и a_n и b_n сходятся к a и b, то c_n сходится к $a+b$, **d)** (Лемма о двух полицейских) если $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, и a_n и b_n сходятся к a, то и c_n сходится к a.

6. Из угла бильярдного стола с иррациональным соотношением сторон $A \times B$ по биссектрисе с единичной скоростью выпускают шар. **a)** Найдите среднюю частоту ударов о борта, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{число ударов о борта за первые } T \text{ минут}}{T}.$$

b) Найдите частоту дуплетов, т.е. пар последовательных ударов о два параллельных борта.

Если с пунктом **b** сложности (а их не может не быть!), вернитесь к нему в конце параграфа. Назовем *частотой попадания* последовательности a_n в отрезок I предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{количество целых } n < N, \text{ для которых } a_n \text{ лежит в } I}{N}.$$

Наша цель в следующей задаче – доказать **теорему Вейля**:

> Для иррационального числа λ и любого a частота попадания последовательности $\{a + n\lambda\}$ в подотрезок I отрезка $[0,1]$ равна длине I.

Будем называть такую последовательность *прогрессией Вейля с разностью* λ.

7. **a)** Даны число ε и отрезок I. Укажите какое-нибудь иррациональное λ и целое N, такие что

$$\frac{\text{количество целых } n < N, \text{ для которых } \{a + n\lambda\} \text{ лежит в } I}{N}$$

отличается от длины отрезка I менее чем на ε.

Подсказка: попытайтесь взять λ очень маленьким, а N – очень большим.

b) Докажите, что в пункте **a** подходят все N начиная с некоторого N_0.

c) Докажите, что для сколь угодно малого δ любую прогрессию Вейля можно разбить на несколько подпоследовательностей, каждая из которых сама является прогрессией Вейля, причем с разностью меньше δ.

Подсказка: примените к данной прогрессии лемму Дирихле для отрезка $[0, \delta]$.

d) Докажите теорему Вейля.

8. **a)** В квадрате $[0,1]^2$ выбран отрезок I. Дайте определение частоты пересечений обмотки $[0,1]^2$ с отрезком I (напомним, что обмотка квадрата определена в конце прошлого параграфа). **b)** Найдите эту частоту для случая, когда I – вертикальный или горизонтальный отрезок данной длины. **c)** Найдите частоту для произвольного отрезка I.

9. **a)** Найдите *плотность* плиток мозаики на данной прямой $ax + by = 0$, т.е.

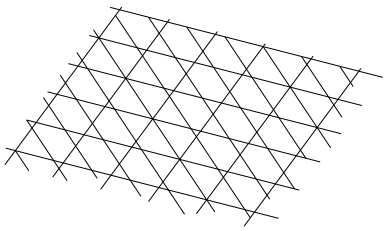
$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{число плиток на отрезке длины } T, \text{ отложенном на прямой от начала координат}}{T}.$$

b) Найдите *среднюю длину* плиток мозаики на данной прямой $ax + by = 0$, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{суммарная длина плиток на отрезке длины } T}{\text{число этих плиток}}.$$

c) Найдите плотность плиток максимальной длины.

§4 Мозаики на плоскости



10. **a)** Дайте определение мозаики и ее плиток на плоскости $Ax + By + Cz = 0$ в пространстве.
b) Какое максимальное число углов может быть у плитки?
c) Найдите число попарно различных плиток на этой плоскости, если A, B и C целые.
d) Покажите, что для плоскости $Ax+By+Cz = 0$ выполняется ровно одно из трех условий:
– 0 является единственной точкой с целыми координатами на этой плоскости (тогда плоскость называется *иррациональной*);
– все точки этой плоскости с целыми координатами имеют вид $k \cdot v$, где v – одна из этих точек, а k – целое число (тогда назовем плоскость *полуиррациональной*);
– $\lambda A, \lambda B$ и λC – целые числа при подходящем выборе множителя $\lambda \neq 0$ (*рациональная* плоскость).
e) Сформулируйте и решите аналоги задач из §2 для иррациональной плоскости.
f) Сформулируйте и решите аналоги задач из §2 для полуиррациональной плоскости.

Промежуточный финиш

Выберем на плоскости $Ax + By + Cz = 0$ какой-нибудь (удобный Вам) многоугольник P, содержащий начало координат. Обозначим через P_T его гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом T. Эта фигура будет играть для плоскости ту же роль, что отрезок длины T на прямой в §3.

11. **a)** Сформулируйте и докажите аналог теоремы Вейля для *двухпараметрической* последовательности $\{k\mu + n\lambda\}$.
b) Сформулируйте и решите аналог задачи **8** для иррациональной плоскости в пространстве.
c) Дайте определение и найдите плотность плиток на данной иррациональной плоскости.
d) Определите и найдите среднюю площадь плиток на данной иррациональной плоскости.
e) Определите и найдите плотность треугольных плиток в иррациональной плоскости.
f) Найдите вероятность того, что случайно выбранная плитка будет треугольной, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{число треугольных плиток в } P_T}{\text{общее число плиток в } P_T}.$$

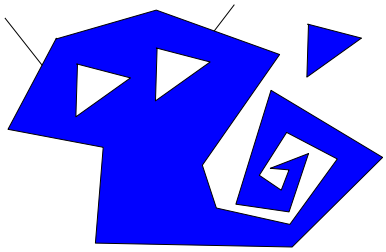
g)$^{\text{x}}$ Найдите вероятность того, что случайно выбранная точка плоскости окажется в треугольной плитке, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{суммарная площадь треугольных плиток в } P_T}{\text{суммарная площадь всех плиток в } P_T}.$$

h)$^{\text{x}}$ Определите и найдите среднюю площадь треугольной плитки на данной иррациональной плоскости.
i) Решите все пункты этой задачи с заменой треугольников на четырех-, пяти-, шести- и семиугольники.

§5 Полиэдры

Напомним, что *замкнутый (открытый) выпуклый многоугольник* – это пересечение нескольких полуплоскостей с границей (соответственно, без границы). *(Замкнутый) полиэдр* – это объединение нескольких (замкнутых) выпуклых многоугольников. *Компонента* полиэдра P – множество всех его точек, которые можно соединить с данной точкой ломаными, лежащими в P. Пример полиэдра с двумя компонентами, дополнение к которому имеет три компоненты:



12. **a)** Докажите, что объединение и пересечение (замкнутых) полиэдров, а также компонента связности (замкнутого) полиэдра – тоже (замкнутый) полиэдр.
b) Докажите, что дополнение к замкнутому полиэдру – тоже полиэдр, но не замкнутый.
c) Если мы знаем число компонент полиэдров P и Q, что можно сказать о числе компонент их объединения? Пересечения? Дополнения к P?

Назовем множество на плоскости *периодическим*, если оно не изменяется при параллельном переносе на целое расстояние в вертикальном и горизонтальном направлениях. Назовем пересечение периодического множества с единичным квадратом $[0,1]^2$ его *фундаменталъной областью*. Назовем множество *периодическим полиэдром*, если оно периодическое, и его фундаментальная область – полиэдр.

13. **a)** Могут ли разные периодические множества иметь равные фундаментальные области?
b) Может ли периодический полиэдр иметь одну компоненту связности, а его фундаментальная область – две?
c)^{x} Может ли периодический полиэдр иметь две компоненты связности?

14. Если две замкнутые несамопересекающиеся ломаные не проходят через вершины друг друга, то они пересекаются в четном количестве точек. Докажите это **a)** для случая двух треугольников, **b)** для случая, когда одна из ломаных – треугольник, **c)** в общем случае.

Предупреждение: если Вы используете в решении понятия *“внутри”* или *“снаружи замкнутой несамопересекающейся ломаной”*, то Вам нужно будет дать их определение и доказать их свойства, которые вы используете (но эту задачу проще решить, не вводя такие понятия).

15. Две вершины связного графа A на плоскости соединили новым ребром, не проходящим через другие его ребра и вершины. Докажите, что при этом число компонент дополнения к графу A возросло **a)** не более чем на 1 и **b)** не менее чем на 1.

§6 Квазипериодические множества

Квазипериодическим множеством на прямой $ax + by = c$ назовем ее пересечение с периодическим полиэдром.

16. **a)** Является ли конечное множество на иррациональной прямой квазипериодическим?
b) Если квазипериодическое множество содержится в луче, то обязательно ли оно состоит из конечного числа точек?

c) Придумайте множество на иррациональной прямой, которое не является квазипериодическим.

Мера множества на прямой – это его "одномерная площадь". Говоря строго, если множество на прямой состоит из конечного числа непересекающихся отрезков, то его *мерой* будем называть сумму длин этих отрезков. Назовем средней длиной множества Q на прямой предел

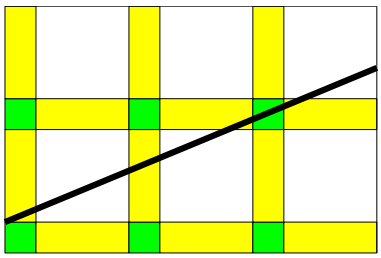
$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{мера пересечения } Q \text{ с отрезком длины } T, \text{ отложенным на прямой от точки } 0}{T}.$$

17. Пусть квазипериодическое множество Q на прямой $ax+by=c$ является пересечением этой прямой с периодическим полиэдром, имеющим фундаментальную область F.
a) Найдите среднюю длину множества Q, если F – прямоугольник, у которого одна из сторон параллельна прямой $ax+by=c$.
b) Найдите среднюю длину множества Q для произвольного F.

Подсказка: приблизьте F сверху и снизу прямоугольниками из прошлого пункта.

Замечание: теперь можно попробовать вернуться к пунктам со звездочкой в задаче **11**.

Дальше для определенности будем исследовать периодическое множество M_h, состоящее из всех точек, у которых дробная часть хотя бы одной из координат не превосходит h. На рисунке M_h изображено желтым и зеленым:



Обозначим через Q_h пересечение M_h с прямой $x+\sqrt{2}y=0$.

18. **a)** Найдите среднюю длину Q_h. **b)** Дайте определение и найдите плотность отрезков множества Q_h.

Подсказка: сначала решите пункт **(б)** для множеств $M_{1,h}$ и $M_{2,h}$, закрашенных зеленым и желтым соответственно. Затем выразите ответ для M_h через ответы для $M_{1,h}$ и $M_{2,h}$.

§7 Эйлерова характеристика

Применяя подсказку к предыдущей задаче, мы использовали следующее очевидное замечание: если множество на прямой разбить на несколько интервалов и точек, то разность числа точек и числа интервалов не будет зависеть от способа разбиения. Эта разность называется *эйлеровой характеристикой* множества на прямой.

Чтобы перейти к изучению квазипериодических множеств на плоскости, нам нужно распространить понятие эйлеровой характеристики на множества на плоскости.

Назовем *клеточным разбиением* полиэдра P такой набор открытых выпуклых многоугольников $T_1, T_2, T_3, \ldots$, интервалов $I_1, I_2, I_3, \ldots$ и точек $P_1, P_2, P_3, \ldots$ (называемых вместе *клетками* разбиения), что
– каждая точка полиэдра содержится внутри ровно одной клетки, т.е. либо в одном открытом многоугольнике T_i (без его граничных точек), либо в одном интервале I_j (без его концов), либо совпадает с одной из точек P_k.
– каждая сторона и вершина каждого многоугольника T_i и каждый конец каждого интервала I_j тоже является клеткой разбиения.

– клеток конечное число, и их объединение совпадает с полиэдром P.

19. **a)** Из замкнутого квадрата $[-1,1]^2$ выкинули открытый квадрат $(0,1)^2$. Покажите, что получился замкнутый полиэдр, и предложите его клеточное разбиение с как можно меньшим числом элементов. Может ли быть клеткой разбиения этого полиэдра треугольник с вершинами $(-1,-1)$, $(1,-1)$ и $(-1,1)$?

b) Докажите, что каждый замкнутый полиэдр допускает клеточное разбиение.

Эйлеровой характеристикой клеточного разбиения полиэдра P назовем
$\chi(P) =$(число многоугольников)$-$(число интервалов)$+$(число вершин разбиения).

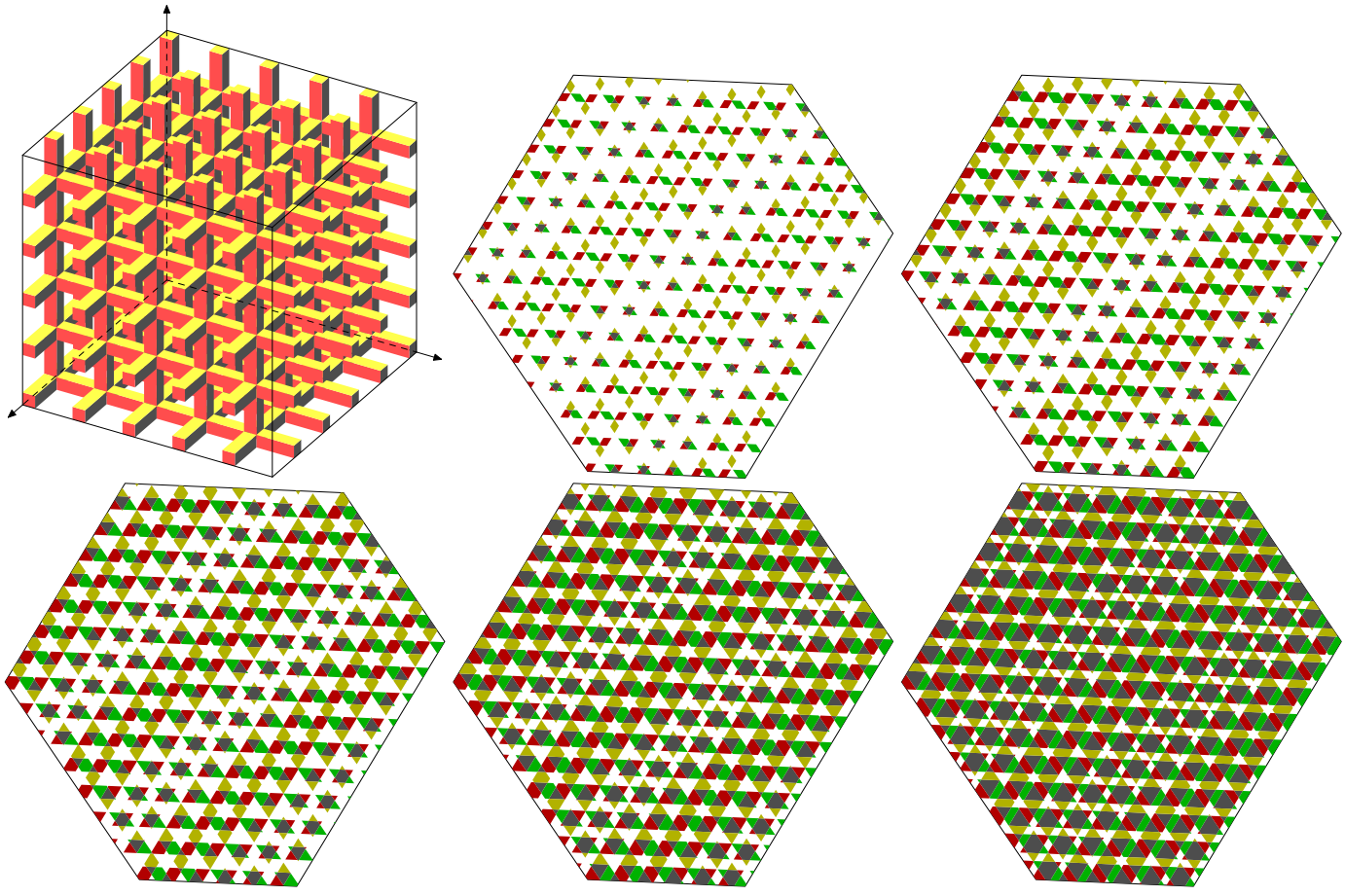
20. **a)** **(Формула Эйлера)** Эйлерова характеристика замкнутого ограниченного полиэдра равна следующему: (число его компонент)$-$(число компонент его дополнения)$+1$.

Подсказка: докажите формулу сначала для дерева, потом для графа, а потом для произвольного полиэдра, добавляя к клеточному разбиению по одной клетке.

b) Эйлерова характеристика замкнутого полиэдра не зависит от выбора его разбиения. Эйлерова характеристика многоугольника равна 1. **c)** $\chi(P)+\chi(Q)=\chi(P\cup Q)+\chi(P\cap Q)$.
d) **(Лемма Жордана)** Дополнение к замкнутой несамопересекающейся ломаной имеет ровно две компоненты.

§8 Квазипериодические множества на плоскости

Квазипериодическое множество на плоскости $Ax+By+Cz=0$ – пересечение этой плоскости с периодическим множеством в пространстве. В частности, обозначим через Q_h пересечение плоскости $x+\sqrt[3]{2}y+\sqrt[4]{2}z=0$ с множеством M_h, состоящим из всех точек, у которых дробные части хотя бы двух из трех координат не превосходят h. Множество $M_{1/4}$ и множества Q_h при $h=0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7$ выглядят так:



Аналогично задаче **11**, выберем на плоскости $x+\sqrt[3]{2}y+\sqrt[4]{2}z=0$ какой-нибудь (удобный

Вам) многоугольник P, и обозначим через P_T его гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом T.

Открытая проблема. Вычислить плотность компонент квазипериодического множества Q, т.е. предел

$$\sharp Q = \lim_{T\to\infty} \frac{\text{число компонент множества } Q \text{ в } P_T}{\text{площадь } P_T}.$$

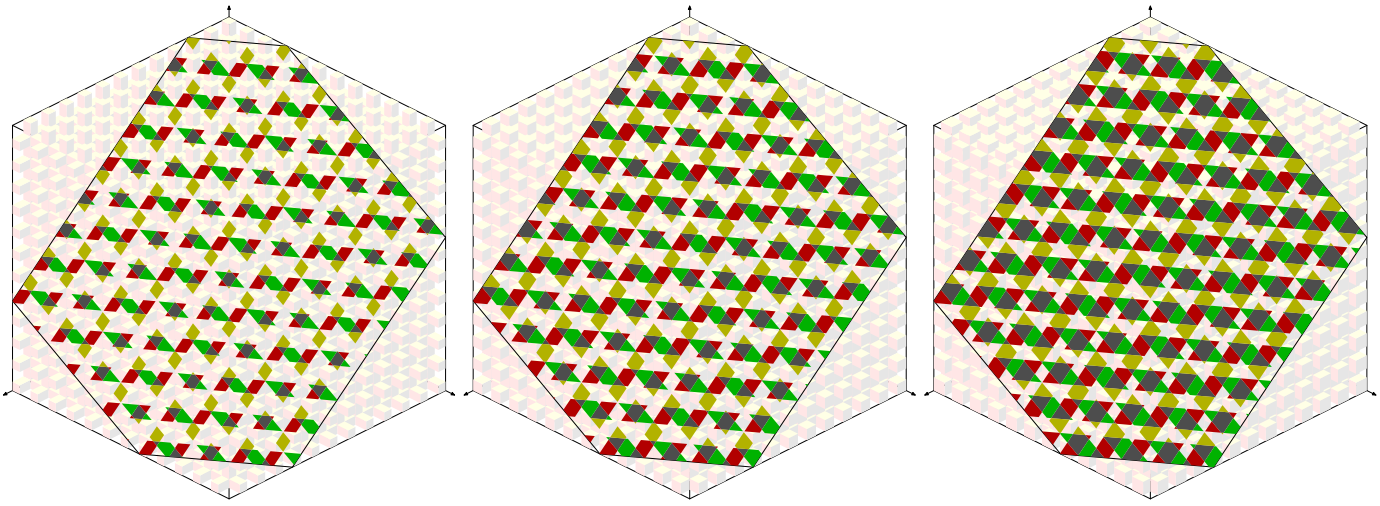
Ответ неизвестен даже для изображенных выше множеств Q_h при произвольном h.

21. **a)** Укажите по возможности меньшее $h_0 < 1$, для которого $\sharp Q_{h_0} = 0$. (Угадать какое-то подходящее h_0, хотя, возможно, далеко не самое маленькое, поможет серия картинок выше.)
b) Вычислите плотность эйлеровой характеристики множества Q_h, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{эйлерова характеристика пересечения } Q \text{ с } P_T}{\text{площадь } P_T}.$$

c) Покажите, что дополнение к множеству M_h получается из множества M_{1-h} выбрасыванием граничных точек и центральной симметрией относительно 0.
d) Как связаны $\sharp Q_h$ и $\sharp Q_{1-h}$?
e) Найдите $\sharp Q_h$ при достаточно больших и малых h, а именно при $h \geqslant h_0$ и $h \leqslant 1 - h_0$.
f) Оцените $\sharp Q_{1/2}$ как можно точнее сверху и снизу.
g) Предложите как можно большее H, для которого $\sharp Q_H > 0$, и оцените эту плотность как можно точнее снизу.
h) Рассмотрим теперь пересечение множества M_h с другой плоскостью: $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z = 0$. Это квазипериодическое множество $\tilde{Q}_h$ изображено ниже для $h = 0.4, 0.5, 0.6$. Получите какие-либо оценки на $\sharp\tilde{Q}_h$, которые бы подтверждали или ставили под сомнение следующую гипотезу: в отличие от $\sharp Q_{1/2}$, плотность $\sharp\tilde{Q}_{1/2}$ нулевая, но $\sharp\tilde{Q}_h > 0$ при $h < 1/2$.
i) (Дискретная версия задачи Арнольда 1988-17) Получите какие-либо оценки, которые бы подтверждали или ставили под сомнение следующую гипотезу для как можно больших $h < 1/2$: для каждого h существует достаточно большое число R_h, такое что каждая ограниченная компонента множества $\tilde{Q}_h$ умещается в круге радиуса R_h.

Самая точная оценка плотностей $\sharp Q_H$ или $\sharp\tilde{Q}_{1/2}$ получит приз, а их точное вычисление или решение дискретной задачи Арнольда 1988-17 Вы сможете опубликовать в математическом журнале, как только приобретете необходимую культуру изложения на младших курсах математического факультета!

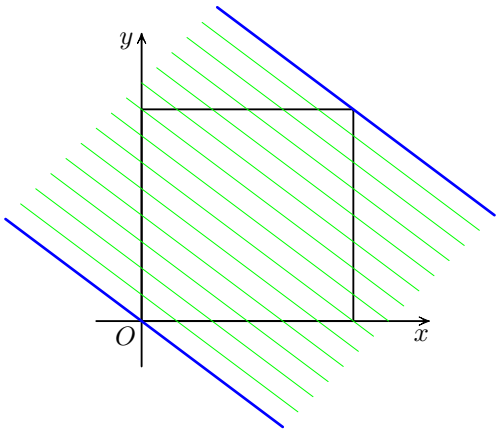


Динамика мозаик. Решения задач 1-10

Обозначения:
$\#A$ – число элементов в множестве A.
$\{x\}$ – дробная часть числа x.

Задача 1a

Рассмотрим, какие «крайние положения» может принимать прямая, пересекающая квадрат. В этом случае квадрат лежит целиком в одной из полуплоскостей, а прямая проходит ровно через одну из его вершин $(0;0)$ или $(1;1)$.



Таким образом, искомые прямые лежат между $6x+8y=0$ и $6x+8y=14$, а соответствующие целые c – все целые числа отрезка $[0;14]$. **Ответ:** 15.

Задача 1b

Возможны три случая:

(i) Прямая пересекает квадрат ровно по одной вершине. Тогда длина высекаемого отрезка равна 0. Всего таких прямых две: $6x+8y=0$ и $6x+8y=14$.

(ii) Прямая пересекает противоположные стороны квадрата (возможно, прямая при этом проходит через вершину). Все такие прямые высекают отрезки длиной $\dfrac{5}{4}$ (см. рисунок). Найдем число таких прямых. Начнем двигать прямую $6x+8y=0$, изменяя свободный член. Рассмотрим первый момент, когда прямая пересечет противоположные стороны. В этот момент прямая будет проходить через точку $(1;0)$. Ее уравнение $6x+8y=6$. В последний момент прямая будет проходить через $(0;1)$, ее уравнение $6x+8y=8$. Все искомые прямые лежат между прямыми $6x+8y=6$ и $6x+8y=8$. Получаем, что есть только 3 прямые, которые высекают отрезок длины $\dfrac{5}{4}$.

(iii) Прямая пересекает соседние стороны.

Посмотрим на первый момент, когда прямая пересекла соседние стороны, в этот момент $c=1$. Эта прямая отсекает от квадрата треугольник, обозначим его через T. Треугольник T – прямоугольный со сторонами $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$. Гипотенуза этого треугольника равна $\sqrt{\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}}$ по теореме Пифагора. Соответственно, длина высекаемого прямой $6x+8y=1$ отрезка равна $\dfrac{5}{24}$ (рисунок).

Рассмотрим остальные прямые, пересекающие соседние стороны. Каждая из них делит квадрат на треугольник и пятиугольник. Заметим, что все полученные таким образом треугольники будут подобны треугольнику T, и коэффициент подобия – натуральное число.

Найдем наибольший возможный коэффициент подобия. Рассмотрим первую прямую, пересекающую противоположные стороны квадрата. Наибольший из треугольников будет отсекаться предыдущей прямой. Уравнение этой прямой $6x+8y=5$. Получаем, что прямые, лежащие между прямыми $6x+8y=0$ и $6x+8y=6$, высекают отрезки длин $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{25}{24}$. Для каждой из этих длин также найдется отрезок, высекаемый одной из прямых между $6x+8y=8$ и $6x+8y=14$.

Ответ: возможные длины 0, $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{25}{24}$ (каждого из таких пересечений две штуки), $\frac{5}{4}$ (3 пересечения данной длины). Всего различных длин 7.

Важное обозначение. Пусть задано множество F на плоскости. Его *дробной частью* $\{F\}$ будем называть множество всех точек вида $(\{x\};\{y\})$, где $(x;y)\in F$.

Задача 2a

Пусть данная прямая ℓ имеет уравнение $ax+by=c$. Мы выясним ответ на нашу задачу при всевозможных (не только целых) значениях c. Мы будем считать, что:

- НОД$(a,b)=1$, иначе можно разделить уравнение на НОД(a,b).
- $a\geq b>0$. Случаи $a=0$ и $b=0$ мы оставляем для самостоятельного разбора, остальные случаи получаются отражением в координатных осях и заменой координат x и y.

В конце решения мы перепишем ответ в форму, не зависящей от этих предположений (но условие $ab\neq 0$ останется в силе!).

Обозначим дробную часть нашей прямой через $L=\{\ell\}$. Она состоит из нескольких полуинтервалов в единичном квадрате $[0,1)^2$.
Изучим точки множества L, лежащие на оси x. Эти точки соответствуют точкам прямой ℓ с целой ординатой; поэтому их абсциссы равны $\left\{\frac{c}{a}+n\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$ при целых n. Поскольку $\frac{b}{a}$ — несократимая дробь, этих точек будет ровно a, и их множество совпадает с множеством X всех точек вида $\frac{\{c\}}{a}+\frac{k}{a}$ (при целых k), лежащих в $[0,1)$.
Аналогично, L содержит b точек на оси y. Итого, общее число точек L на осях равно $a+b-\phi$, где $\phi=0$, если ℓ не проходит через целые точки, и $\phi=1$ иначе. Это же число есть количество отрезков в L.
Однако некоторые из полученных отрезков могут быть равными. Выясним, как часто это происходит. Из соображений решения задачи **1b**, это возможно в следующих двух случаях.

(i) Все отрезки, соединяющие противоположные стороны квадрата, равны. Поскольку $a\geq b$, это могут быть лишь горизонтальные стороны.

Число таких отрезков равно числу точек множества X на отрезке $\left[0,1-\frac{b}{a}\right]$, то есть $a-b+\phi$.

(ii) Два отрезка, симметричных относительно центра квадрата. Это происходит тогда, когда ℓ содержит точку с полуцелыми координатами (см. решение задачи **3e** далее — оно не зависит от того, рациональна ли прямая).

Итак, если случай (ii) не возникает (а тогда и $\phi = 0$), то общее число различных отрезков есть $a + b - (a - b - 1) = 2b + 1$, если $a > b$, и 2, если $a = b (= 1)$.
Если же (ii) возник, то общее число отрезков, неупомянутых в (i), равно $(a+b-\phi)-(a-b+\phi) = 2(b - \phi)$, и они разбиваются на пары равных. Итого, число различных длин в этом случае есть $b - \phi + 1$, если отрезок из условия (i) существует, и $b - \phi$ иначе (последний случай возникает лишь при $a = b$ и $\phi = 0$, так что ответ в этом случае равен b).
Этот ответ в общем случае (когда $ab \neq 0$, но a и b могут иметь произвольные знаки и не быть взаимно простыми) переписывается следующим образом.

Ответ. Если прямая проходит через целую точку и $|a| \neq |b|$, то число длин отрезков есть $\dfrac{\min(|a|, |b|)}{\text{НОД}(|a|, |b|)}$.
Если прямая проходит через полуцелую точку, но не проходит через целые точки и $|a| \neq |b|$, то число длин отрезков есть $\dfrac{\min(|a|, |b|)}{\text{НОД}(|a|, |b|)} + 1$.
Если прямая не проходит через полуцелую точку и $|a| \neq |b|$, то требуемое количество равно $\dfrac{2\min(|a|, |b|)}{\text{НОД}(|a|, |b|)} + 1$.
Если же $|a| = |b|$, то число длин равно 2, за исключением случая, когда прямая проходит через полуцелую точку, но не проходит через целые; в последнем случае все плитки равны.

Замечание 1. Условие того, что прямая $ax + by = c$ проходит через полуцелую точку, равносильно тому, что прямая $ax + by = 2c$ проходит через целую точку. Это в свою очередь, равносильно тому, что $2c$ делится на $\text{НОД}(a, b)$.

Замечание 2. Приведённый выше ответ остаётся верным и при $ab = 0$.

Задача 2в

Введём те же предположения, что и в предыдущем пункте. Сначала предъявим некоторый (возможно, не минимальный) период. Заметим, что при перемещении на вектор $(-b, a)$ как прямая, так и сетка перейдут в себя; значит, и мозаика тоже. Поэтому $\sqrt{a^2 + b^2}$ является (возможно, не минимальным) периодом мозаики. Осталось выяснить, правда ли, что этот период минимален (и что делать, если это не так).
Ответ опять зависит от возникновения случаев, упомянутых в **2а**, а также от того, возникают ли плитки, *неупомянутые* в пункте (i), то есть соединяющие две точки соседних сторон некоторого квадрата решётки. отличные от вершин. Если такие *короткие* плитки не возникают (что случается при $a + b - \phi = a - b + \phi$, то есть при $b = \phi = 1$), то все плитки равны, и период равен длине плитки, т. е. $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.
Пусть теперь короткие плитки есть. Если (ii) не возник, то каждая короткая плитка возникает один раз на отрезке длины $\sqrt{a^2 + b^2}$, так что период не может быть меньше. Если же (ii) возникает, то на отрезке длины $\sqrt{a^2 + b^2}$ плиток каждой короткой длины есть ровно две. Значит, период равен либо $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, либо $d/2 = \sqrt{a^2 + b^2}/2$. Более того, в последнем случае каждая короткая плитка идёт с периодом $d/2$.
Поскольку любые две таких плитки симметричны относительно полуцелой точки, а полуцелые точки идут также с периодом, делящимся на $\sqrt{a^2 + b^2}/2$, получаем, что период полуцелых точек обязан быть равен $\sqrt{a^2 + b^2}/2$. Отсюда уже следует, что есть ровно одна длина коротной плитки, то есть опять $b = 1$. Теперь нетрудно понять, что более короткий период получается лишь при $a = b = 1$, если c — полуцелое число, не являющееся целым.
Осталось разобраться, когда возникает последний случай. Заметим, что в этом случае полуцелые точки расположены на прямой ℓ на расстояниях $\sqrt{a^2 + b^2}/2$ друг от друга. Если теперь существует коротний отрезок, то такие отрезки расположены ровно посередине между полуцелыми точками (иначе период $d/2$ невозможен). Однако нетрудно понять, что рядом с

коротким отрезком обязательно присутствует короткий. Теперь несложно понять, что данный случай возможен лишь когда $|a| = |b| = 1$, а c — полуцелое число (не являющееся целым).

Ответ. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\text{НОД}(a,b)}$, за исключением следующих случаев:

- если $a = b$, c не делит a, но $2c$ делит, то период равен $1/\sqrt{2}$;
- Если a делится на b и прямая проходит через целую точку, то период равен $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Задача 2c

Будем считать, что длины сторон бильярда взаимно просты. Остальные случаи получаются из взаимно простого растяжением в некоторое число раз, при этом число ударов сохраняется, а длины отрезков увеличиваются в то же число раз. Так же считаем, что $B < A$.

«Распрямим» траекторию шара. Каждый раз, когда шар ударяется о борт, будем отражать стол относительно прямой, проходящий через этот борт. Поскольку угол падения шара равен углу отражения, траектория шара станет прямой $y = x$ на плоскости с сеткой из прямоугольников.

Произведем над плоскостью следующие операции: сожмем по координатам x и y в $\dfrac{1}{A}$ и $\dfrac{1}{B}$ раз соответственно. При этом сетка из прямоугольников станет привычной целочисленной сеткой, а прямая $y = x$ перейдет в прямую ℓ с уравнением $By = Ax$.

Каждому отрезку между двумя отражениями от бортов будет соответствовать отрезок мозаики, расположенный между точкой $(0, 0)$ и следующей целочисленной точкой на ℓ (эта точка есть (B, A)). Всего ненулевых отрезков $A + B - 1$. Сопоставим каждому ненулевому отрезку следующий за ним удар о борт. Тогда каждому отрезку кроме последнего сопоставится удар. Получаем, что ударов на один меньше, чем ненулевых отрезков, то есть $A + B - 2$ ударов.

Осталось разобраться с минимальным и максимальным пробегом шара. Заметим, что при сжатии отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, не меняется. Тогда наименьший/наибольший отрезок изначально будет наименьшим/наибольшим после сжатия. Наибольший отрезок, соединяющий две противоположных стороны квадрата, реализуется на первом шаге (когда шар идёт из угла к противоположной стороне). Наименьший же ровно в $\min(A, B)$ раз меньше.

Итого, в общем случае мы получаем следующий ответ.

Ответ. Количество ударов о борта равно $\dfrac{A+B}{\text{НОД}(A,B)} - 2$. Наибольший пробег равен $\sqrt{2} \cdot \min(A, B)$, наименьший — $\sqrt{2} \cdot \text{НОД}(A, B)$.

Решение Задачи 3 расположено после задачи 4.

Задача 4a

Докажем, что для данного $\varepsilon > 0$ найдется пара членов последовательности на расстоянии меньше ε. Пусть последовательность (x_n) ограничена снизу числом a, а сверху — b. Возьмем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$. Разделим отрезок на n равных частей. По принципу Дирихле среди первых x_1, x_2, …, x_{n+1} найдется по крайней мере два, попавших в одну часть. Расстояние между ними не превосходит $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$.

Задача 4b

Если $\{k\lambda\} = \{m\lambda\}$ для некоторых $k \neq m$, то число $(m-k)\lambda$ целое, то есть λ рационально, что невозможно. Значит. все члены нашей последовательности различны.
Рассмотрим произвольный отрезок $[\alpha;\beta] \subseteq [0;1]$ и докажем, что в него попадет какое-то число вида $\{k\lambda\}$. Для этого по предыдущему пункту найдем члены последовательности $\{k\lambda\}$ и $\{m\lambda\}$ (при некоторых $k > m$) на расстоянии менее $\beta - \alpha$; обозначим их разность через $\mu = \{k\lambda\} - \{m\lambda\}$; тогда $|\mu| < \beta - \alpha$. Заметим, что наша последовательность содержит подпоследовательность чисел вида $\{n\mu\} = \{n(k-m)\lambda\}$. Первые $[1/\mu]$ членов этой новой последовательности разбивают отрезок $[0;1]$ на подотрезки длины менее $|\mu| < \beta - \alpha$, поэтому отрезок $[\alpha;\beta]$ не может целиком попасть ни в один из этих подотрезков. Значит, отрезок $[\alpha;\beta]$ содержит одну из разделяющих точек вида $\{n\mu\} = \{n(k-m)\lambda$.

Задача 4с

Обмоткой квадрата прямой $ax + by = c$ назовём дробную часть прямой $ax + by = c$ (см. обозначение перед задачей **2а**).

Пусть, без ограничения общности, $ab < 0$. Рассмотрим произвольный отрезок I, не параллельный нашей прямой ℓ. Спроецируем I параллельно ℓ на положительные лучи координатных осей; получится либо один отрезок, либо объединение двух отрезков.
Пусть для определённости в проекции есть отрезок J на оси x. Нам достаточно показать, что этот отрезок содержит точку обмотки (тогда отрезок обмотки, содержащий эту точку, пересекает I). Точки обмотки на оси x — это ровно точки вида $\left\{\frac{c}{a} + n\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$. Поскольку $\frac{b}{a}$ иррационально, из леммы Дирихле следует, что одна из этих точек лежит в J, что и требовалось доказать.

Задача 3

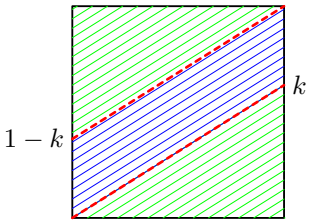
В дальнейшем под *плиткой обмотки* мы подразумеваем дробную часть плитки на прямой.

Задача 3а

Ответ. Да, может.
Например, если прямая проходит через целую точку A, то две плитки, содержащие A, симметричны относительно неё и поэтому равны (а также будут равными любые две плитки, симметричные относительно A). См. также следующий пункт.

Задача 3в

Ответ. Обязательно найдётся бесконечное число плиток равной длины.



Пусть k — угловой коэффициент нашей прямой; без ограничения общности, $0 < k < 1$. Рассмотрим обмотку квадрата нашей прямой. Согласно **4с**, в ней найдётся бесконечно много плиток, проходящих через точки вида $(0, y)$, где $0 < y < 1 - k$ (поскольку в интервал $(0, k)$ можно вложить бесконечно много попарно непересекающихся отрезков). Другие концы этих плиток будут иметь вид $(1, y + k)$, то есть все эти отрезки получаются друг из друга параллельными переносами и потому имеют равные длины.

Задача 3с

Ответ. Не может быть ровно трех плиток равной длины.

Предположим противное: есть ровно три плитки некоторой длины d. Рассмотрим расположение дробных частей этих плиток в обмотке. Возможны два случая.

(i) Одна из них соединяет две противоположных стороны. Тогда, как показано в **3b**, существует и бесконечно много плиток такой длины. Противоречие.

(ii) Каждая из плиток соединяет две соседних стороны. В этом случае существует ровно два сечения квадрата, параллельных нашей прямой и имеющих длину d, и эти сечения симметричны относительно центра квадрата. Тогда две из плиток соответствуют одному и тому же сечению, что невозможно для иррациональной прямой.

Задача 3d

Ответ. Обязательно найдётся бесконечно много плиток попарно различной длины.
Опять же предположим, что угловой коэффициент k нашей прямой лежит в $(0,1)$. Тогда из **4c** в обмотке существует бесконечно много плиток с концами на нижней стороне квадрата, и все они имеют попарно различные длины.

Задача 3e

Ответ. Ровно две плитки некоторой длины найдутся тогда и только тогда, когда прямая проходит через полуцелую точку (т. е. точку, удвоенные координаты которой — целые числа).
Пусть прямая ℓ проходит через полуцелую точку $(u/2, v/2)$. Тогда вместе с точкой (x,y) прямая содержит и точку $(u-x, v-y)$. Значит, вместе с каждой плиткой обмотка квадрата $[0,1]^2$ прямой ℓ содержит и плитку, симметричную ей относительно центра квадрата (мы считаем, что плитки не содержат своих концов, то есть их дробные части лежат в $(0,1)^2$). Поскольку в обмотке существует плитка некоторой длины d, соединяющая две соседних стороны, в обмотке (а значит, и на прямой) будут ровно две плитки длины d.
Пусть, наоборот, в обмотке существуют ровно две плитки некоторой длины d. Из решения **3c** видно, что плиток, соединяющих две противоположных стороны квадрата, бесконечно много, и они все имеют равные длины. Значит, каждая из наших плиток соединяет две соседних стороны квадрата. Как уже было отмечено, в этом случае дробные части плиток должны быть симметричны друг другу относительно центра квадрата $[0,1]^2$. Это означает, что при некоторых $x, y \in [0,1)$ прямая содержит точки (k_1+x, ℓ_1+y) и (k_2-x, ℓ_2-y), где $k_i, \ell_i \in \mathbb{Z}$. Но тогда и середина отрезка между этими точками лежит на прямой. Осталось заметить, что эта середина имеет полуцелые координаты $\frac{k_1+k_2}{2}$ и $\frac{\ell_1+\ell_2}{2}$.

Задача 5

Для начала заметим, что в каждом открытом интервале, содержащем a, найдётся подынтервал вида $O_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Поэтому достаточно проверять определение предела лишь для интервалов такого вида. Такой интервал называется *ε-окрестностью* числа a.

Задача 5a

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное N, большее $\frac{1}{\varepsilon}$ (например, годится $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$). Тогда при всех $n > N$ имеем $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Это значит, что все члены последовательности, кроме, возможно, первых N членов, содержатся в $O_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Задача 5b

Предположим противное: у последовательности a_n есть некоторый предел a; положим $\varepsilon = \frac{1}{2}$. При любом n имеем $|a_n - a_{n+1}| = 2$, так что никакие два последовательных элемента последовательности не могут попасть в интервал длины 1. Итак, вне $O_{1/2}(a)$ находится бесконечно много членов последовательности — противоречие.

Задача 5c

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, найдётся такой номер N, что при всех $n > N$ числа a_n и b_n находятся в $\varepsilon/2$-окрестностях чисел a и b соответственно. Иначе говоря, $|a_n - a| < \varepsilon/2$ и $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Значит, $|c_n - (a+b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Значит, при тех же значениях n число c_n находится в $O_\varepsilon(a+b)$.

Задача 5d

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, найдётся такой номер N, что при всех $n > N$ числа a_n и b_n лежат в $O_\varepsilon(a)$, то есть $a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$. Таким образом, при тех же значениях n число c_n также находится в $O_\varepsilon(a)$.

Задача 6

Совершим те же действия, что и в начале решения **2c**: «распрямим» траекторию шара и «сожмём» всю картинку в $\frac{1}{A}$ раз по горизонтали и в $\frac{1}{B}$ раз по вертикали. В результате мы получим плоскость, разграфлённую на единичные квадраты, на которой выпрямленная траектория шара окажется прямой ℓ с уравнением $Ax = By$. Её угловой коэффициент иррационален, так что $(0,0)$ — единственная целая точка на ℓ. Наконец, шар будет двигаться по ℓ с вектором скорости $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right)$.

Задача 6a

Для начала заметим, что $\lim_{n\to\infty} \frac{[an]}{n} = a$ по лемме о двух полицейских (поскольку $a - \frac{1}{n} = \frac{an-1}{n} \le \frac{[an]}{n} \le \frac{an}{n} = a$).
Моменты ударов исходного шара о борта соответствуют моментам, когда при движении по ℓ шар попадает на линии сетки. За первые T минут он встретит $\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right]$ вертикальных и $\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ горизонтальных прямых. Следовательно, искомая средняя частота равна

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{A\sqrt{2}} + \frac{1}{B\sqrt{2}}.$$

Задача 6b

Будем считать, что $A < B$ (случай $A > B$ аналогичен).
После выпрямления траектории дуплеты соответствуют ситуациям, когда ℓ пересекает две противоположные стороны одной клетки. Так как угловой коэффициент прямой ℓ меньше 1, она не может пересечь подряд две горизонтальных стороны.
Выберем некоторый момент T. Рассмотрим, в каком порядке идут встречи шара с вертикальными и горизонтальными прямыми за первые T минут. Как замечено выше, перед каждой из $\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ «горизонтальных» встреч идёт «вертикальная». После каждой же из остальных $D = \left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ «вертикальных» встреч идёт тоже «вертикальная» (если наша «вертикальная» встреча — не последняя). Итого, количество дуплетов за рассматриваемый период не больше D и не меньше $D-1$, то есть расположено между числами

$$\frac{T}{A\sqrt{2}} - \frac{T}{B\sqrt{2}} - 2 \qquad \text{и} \qquad \frac{T}{A\sqrt{2}} - \frac{T}{B\sqrt{2}} + 1.$$

Отсюда по лемме о двух полицейских получаем, что частота дуплетов равна $\left|\frac{1}{B\sqrt{2}} - \frac{1}{A\sqrt{2}}\right|$ (в этой формуле уже учтён и случай $A > B$).

Замечание. Другое решение задачи 6b) можно получить, воспользовавшись теоремой Вейля. Примеры использования теоремы Вейля в подобных ситуациях можно увидеть в решениях задачи 8.

Задача 7а

Зададимся иррациональным числом $\lambda < \frac{1}{2}$. Будем брать члены нашей последовательности $\{a + n\lambda\}$ до тех пор, пока они не сделают "полный круг" по отрезку $[0, 1]$, т.е. пока $n\lambda$ не превысит 1. Количество N членов последовательности, которое мы при этом отсчитаем, будет на 1 больше целой части числа $1/\lambda$, т.е. λ будет заключено между $\frac{1}{N}$ и $\frac{1}{N-1}$.
Мы докажем, что если взять λ достаточно малым (а N окажется, соответственно, достаточно большим), то требуемое условие будет выполнено.
Для этого обозначим набор из первых N чисел нашей последовательности через S, посмотрим, сколько чисел из S попало в отрезок I, и обозначим это количество через k. Получившуюся частоту попаданий $\frac{k}{N}$ легко оценить в терминах λ сверху и снизу: так как $\frac{1}{N} < \lambda < \frac{1}{N-1}$, то $(k-1)\lambda < \frac{k-1}{N-1} \leqslant \frac{k}{N} < k\lambda$.
С другой стороны, длину отрезка $|I|$ также легко оценить сверху и снизу в терминах λ: так как все маленькие интервалы, на которые набор S разделяет отрезок $[0, 1]$, не длиннее λ, и $k + 1$ из них покрывают I, то I не длиннее $(k + 1)\lambda$. При этом только три из маленьких интервалов могут быть короче λ: два крайних, а также интервал после точки $\{a + N\lambda\}$. Отсюда следует, что I целиком содержит хотя бы $k - 2$ интервала длины λ, а значит не короче $(k - 2)\lambda$. Итого, $(k - 2)\lambda < |I| < (k + 1)\lambda$.
Сравнивая полученные оценки на частоту $\frac{k}{N}$ и на длину отрезка $|I|$, получим, что они отличаются не более чем на 2λ.
Таким образом, если взять $\lambda < \varepsilon/2$, а N на 1 больше целой части $1/\lambda$, то требуемое условие выполнено.

Для дальнейших пунктов задачи 7 нам понадобится следующая лемма, проверяемая прямым вычислением.

Лемма 1. Пусть частота попаданий набора чисел $a_1, \ldots, a_k$ в отрезок I равна A, набора чисел $b_1, \ldots, b_m$ – равна B, а объединения этих наборов $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m$ – равнf C. Тогда C равна *взвешенному среднему* $\dfrac{kA + mB}{k + m}$.

Следствие 1. Пусть в условиях Леммы 1 частота A отличается от длины $|I|$ менее чем на ε, а частота B – менее чем на δ, тогда частота C отличается менее чем на взвешенное среднее этих ошибок $\dfrac{k\varepsilon + m\delta}{k + m}$.

Замечание 1. Если мы знаем, что первая ошибка ε очень мала (например, 0.001), а вес второй ошибки m намного меньше веса первой k (например, в 1000 раз), то усредненная ошибка $\frac{k\varepsilon+m\delta}{k+m}$ тоже очень мала, даже если вторая ошибка δ сама по себе не такая уж и маленькая (например, при $\delta < 1$ усредненная ошибка гарантированно меньше 0.002).

Задача 7в

В пункте **а** мы обнаружили, что если взять N и λ такими, что $\frac{1}{N} < \lambda < \frac{1}{N-1}$, то частота попаданий набора $\{a + \lambda\}$, $\{a + 2\lambda\}$, $\{a + 3\lambda\}, \ldots, \{a + N\lambda\}$ в отрезок I будет отличаться от длины $|I|$ менее чем на 2λ.
Посмотрим, для каких еще M, кроме $M = N$, частота попадания набора $\{a + \lambda\}$, $\{a + 2\lambda\}$, $\{a + 3\lambda\}, \ldots, \{a + M\lambda\}$ в I будет удовлетворять этому свойству. Для этого разобьем указанный набор на несколько поднаборов длины N и "набор-остаток" длины $r < N$.

$$\{a + \lambda\},\ \{a + 2\lambda\},\ \{a + 3\lambda\}, \ldots, \{a + N\lambda\}$$

$$\{a + (N + 1)\lambda\},\ \{a + (N + 2)\lambda\},\ \{a + (N + 3)\lambda\}, \ldots, \{a + 2N\lambda\}$$

. . . . . .

$$\{a+(pN+1)\lambda\},\ \{a+2\lambda\},\ \{a+3\lambda\},\ \ldots,\ \{a+(pN+r)\lambda\}$$

Фактически, мы поделили M на N нацело с остатком: $M = pN + r$.

По пункту **a** частота попаданий каждого из первых p наборов в отрезок I отличается от его длины меньше чем на 2λ. Частота попаданий последнего "набора-остатка" непредсказуема, но уж точно между 0 и 1, так что отличается от $|I|$ меньше чем на 1. Поэтому, согласно Следствию 1, отклонение от $|I|$ для частоты попаданий всего набора $\{a+\lambda\},\ \{a+2\lambda\},\ \{a+3\lambda\},\ \ldots,\ \{a+M\lambda\}$ будет меньше взвешенного среднего отклонений, а значит меньше $\dfrac{Np\cdot 2\lambda + r\delta}{Np+r}$, которое, в свою очередь, меньше чем $2\lambda + \frac{1}{\lambda M}$. При достаточно большом M (большем $1/\lambda^2$) это число меньше 3λ.

Итак, при всех достаточно больших M (больше $1/\lambda^2$), отклонение от $|I|$ для частоты попаданий всего набора $\{a+\lambda\},\ \{a+2\lambda\},\ \{a+3\lambda\},\ \ldots,\ \{a+M\lambda\}$ будет меньше 3λ.

В частности, если взять $\lambda < \varepsilon/3$, то для любого $M > 1/\lambda^2$ частота попаданий указанного набора будет отличаться от длины отрезка менее чем на ε.

Задача 7c

Применив теорему Дирихле к отрезку $[0,\delta]$ и последовательности $\{n\lambda\}$, найдем такое q, что $\{q\lambda\} < \delta$. Обозначив $\{q\lambda\}$ через μ, заметим, что прогрессия Вейля $\{a\},\{a+\lambda\},\ \{a+2\lambda\},\ldots$ распадется в чередующиеся прогрессии Вейля с разностью μ и началами в точках a, $a+\lambda$, $a+2\lambda,\ldots,a+(q-1)\lambda$. Действительно, поделив n с остатком на q, получим $n = mq + r$, так что $\{a+n\lambda\} = \{(a+r\lambda)+m\mu\}$.

Задача 7d

Возьмем произвольное число $\delta > 0$, и применим для него пункт **c**. Наша прогрессия Вейля $\{a\},\{a+\lambda\},\ \{a+2\lambda\},\ldots$ окажется разбита на q прогрессий с разностью $\mu < \delta$. Обозначим эти прогрессии через $P_1, P_2, \ldots, P_q$, а исходную – через P.

Согласно пункту **b**, если выбрать из прогрессии P_i более чем $1/\mu^2$ начальных элементов, то частота их попаданий в отрезок I отличается от длины $|I|$ менее чем на 3μ.

Тогда, согласно Следствию 1, если выбрать более чем $q/\mu^2 + q$ начальных элементов из прогрессии P, то частота их попаданий в отрезок I тоже отличается от длины $|I|$ менее чем на 3μ, поскольку этот набор из $> q/\mu^2 + q$ начальных элементов прогрессии P распадаются на наборы из $> 1/\mu^2$ начальных элементов прогрессий $P_1,\ldots,P_q$.

Осталось выбрать такое δ, чтобы получившаяся ошибка 3μ была заведомо не больше наперед заданной ошибки ε. Для этого достаточно взять $\delta = \varepsilon/3$. Тогда для $q/\mu^2 + q$ или большего числа начальных элементов прогрессии P частота попаданий в отрезок I отличается от длины $|I|$ менее чем на $3\mu < 3\delta < \varepsilon$.

Задача 8

Пусть A и B – фигуры на плоскости. Напомним, что через $A\cup B$ и $A\cap B$ обозначаются объединение и пересечение A и B, соответственно.

Задача 8a

Рассмотрим иррациональную прямую ℓ, определенную уравнением $ax+by=c$. Для каждого $T>0$, через S_T обозначим отрезок длины T на ℓ с концом в точке $(0,\frac{c}{b})$. Пусть $I\subset[0,1]^2$ – отрезок, не параллельный ℓ.

Определение. *Частотой пересечений* отрезка I с обмоткой $[0,1]^2$, соответствующей прямой ℓ, называется предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\#(\{S_T\}\cap I)}{T}.$$

Задача 8bc

Сперва предположим, что отрезок I содержится в отрезке $[0,1]$ оси Oy. Тогда точки пересечения обмотки и отрезка $[0,1]$ оси Oy порождают прогрессию Вейля $u_n = \left\{\frac{c}{b} + n\left(-\frac{a}{b}\right)\right\}$. По определению, величина, которую мы хотим вычислить – частота элементов прогрессии, содержащихся в I.

Предупреждение! Прежде чем применять теорему Вейля (см. задачу 7), следует заметить, что, двигаясь с единичной скоростью по прямой $ax + by = c$, мы пересекаем вертикальную прямую клетчатой бумаги каждые $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$ минут (это число – просто длина отрезка прямой, заключенного между двумя соседними вертикальными прямыми клетчатой бумаги). Таким образом, нам потребуется $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$ минут, чтобы добраться до каждого нового члена последовательности (u_n).

Поэтому теорема Вейля и последнее наблюдение вместе показывают, что искомая частота пересечений отрезка I равна $\dfrac{|I||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Аналогичное рассуждение для случая, когда отрезок I содержится в отрезке $[0,1]$ оси Ox, дает ответ $\dfrac{|I||a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Теперь пусть I – произвольный отрезок в $[0,1]^2$. Если $ab < 0$, то спроецируем I вдоль ℓ на нижний левый угол квадрата. Иначе спроецируем I на верхний левый угол. Эта проекция, вообще говоря, будет объединением вертикального отрезка I_V и горизонтального отрезка I_H, содержащихся в соответствующих сторонах квадрата. Легко проверить следующее утверждение:

Пусть τ – такая плитка, что $\{\tau\} \not\ni (0,0)$. Тогда дробная часть плитки $\{\tau\}$ пересекает I если и только если она пересекает ровно один из отрезков I_V и I_H.

Заметим, что для каждого значения T, отрезок длины T на прямой $ax+by=c$ содержит не больше одной плитки такой что $\{\tau\} \ni (0,0)$. Таким образом, для каждого $T > 0$ получаем:

$$0 \leqslant \#(\{S_T\} \cap I_V) + \#(\{S_T\} \cap I_H) - \#(\{S_T\} \cap (I_V \cup I_H)) \leqslant 1.$$

Рассмотрим максимальное $T_0 < T$ такое что правый конец отрезка S_{T_0} лежит на линии клетчатой бумаги. Очевидно, что

$$0 \leqslant \#(\{S_{T_0}\} \cap (I_V \cup I_H)) - \#(\{S_T\} \cap I) \leqslant 1.$$

Таким образом, если T стремится к бесконечности, то

$$\frac{\#(\{S_T\} \cap I) - \#(\{S_{T_0}\} \cap I_V) - \#(\{S_{T_0}\} \cap I_H)}{T} \to 0.$$

Поэтому ответ в задаче 8c равен $\dfrac{|I_H||a| + |I_V||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Прямое вычисление показывает, что для произвольного вертикального/горизонтального отрезка $I \subset [0,1]^2$, частота пересечений такая же, как для его копии, содержащейся в соответствующей стороне квадрата, что дает ответ в задаче 8b. А именно, $\dfrac{|I||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ для вертикального отрезка I и $\dfrac{|I||a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ для горизонтального I.

Задача 9a

Эта задача – частный случай задачи 8c. Действительно, возьмем в качестве I диагональ квадрата $[0,1]^2$, пересекающую дробные части всех плиток прямой $ax + by = 0$. Тогда для

каждой плитки τ, содежращейся в отрезке длины T, ее дробная часть $\{\tau\}$ пересекает I. Поэтому, так как для каждого $T > 0$ разница между числом точек в $\{S(T)\} \cap I$ и числом плиток в $S(T)$ не превышает 1, искомый предел совпадает с частотой пересечений обмотки с отрезком I, и мы можем вычислить его с помощью задачи 8c. Поэтому искомая плотность равна $\dfrac{|a|+|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, так как в это случае $|I_V| = |I_H| = 1$.

Задача 9b

Заметим, что числитель в формуле для плотности совпадает со знаменателем в формуле для средней длины. При этом разница между числителем в последней и T не превышает $\sqrt{2}$ – максимально возможной длины плитки. Очевидно, если T стремится к бесконечности, то и количество $N(T)$ плиток в отрезке прямой длины T тоже стремится к бесконечности, поэтому $\lim_{T\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{N(T)} = 0$. Таким образом, искомый предел – обратное число к пределу из задачи 9a, то есть ответ равен $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|+|b|}$.

Задача 9c

Эта задача – также частный случай задачи 8c, если в качестве I взять диагональ, отличную от выбранной в решении задачи 9a. Действительно, эта диагональ также является диагональю параллелограмма $P \subset [0,1]^2$, содержащего дробные части всех плиток максимальной длины. Это замечание показывает, что для плитки τ, ее дорбная часть $\{\tau\}$ пересекает I если и только если τ имеет максимальную длину. Таким образом, для получения ответа осталось применить задачу 8c: если $\left|\dfrac{b}{a}\right| > 1$, то проекция отрезка I вдоль прямой $ax + by = 0$ будет вертикальным отрезком длины $\dfrac{|b|-|a|}{|b|}$. Поэтому, согласно задаче 8c, искомая частота равна $\dfrac{|b|-|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Случай $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$ можно рассмотреть аналогичным образом: проекция I вдоль прямой будет горизонтальным отрезком длины $\dfrac{|a|-|b|}{|a|}$, поэтому, согласно задаче 8c, искомая частота равна $\dfrac{|a|-|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Итого, ответ равен $\dfrac{\big||b|-|a|\big|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Задача 10a

Плоскость α в трехмерном пространстве делится на (*плитки*) плоскостями стандартной трехмерной решетки (т.е. плоскостями, параллельными координатным, и отстоящими от них на целое расстояние). Это дает *мозаику* на плоскости α.

Задача 10b

Так как куб содержит только 6 граней, плитка может иметь не больше 6 сторон и углов. Например, чтобы получить шестиугольную плитку, можно пересечь куб $[0,1]^3$ плоскостью $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Задача 10c

Решение аналогично задаче 2a и дает следующий ответ. Предположим, что $|A| \leqslant |B| \leqslant |C|$. Если $|A| + |B| \geqslant |C|$, то искомое количество равно $\left[\dfrac{|A|+|B|+|C|}{2}\right]$. Иначе ответ равен $|A| + |B|$.

Задача 10d

Очевидно, начало координат O содержится в каждой плоскости α, определенной уравнением вида $Ax + By + Cz = 0$. Если α не содержит других целых точек, то имеет место первое

утверждение.
Иначе возьмем $P = (p_1, p_2, p_3) \in \alpha$ – произвольную целую точку, такую что $P \neq O$, и рассмотрим прямую ℓ, порожденную вектором $\overrightarrow{OP}$. Каждая точка прямой ℓ имеет вид $\lambda P = (\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ получаем:

$$A\lambda p_1 + B\lambda p_2 + C\lambda p_3 = \lambda(Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) = 0.$$

Поэтому прямая ℓ содержится в α.
Положим $d = \text{НОД}(p_1, p_2, p_3)$ и рассмотрим целую точку $P_0 = \frac{1}{d}P$. Мы докажем, что каждая целая точка $Q \in \ell$ имеет вид $Q = kP_0$ для какого-то $k \in Z$.
Возьмем произвольную целую точку $Q \in \ell$. Она имеет вид $Q = \lambda P_0$ для $\lambda \in \mathbb{Q}$. Представим λ как неприводимую дробь $\lambda = \frac{k}{m}$ и предположим, что $m \neq 1$. С другой стороны, легко видеть, что координаты вектора P_0 все делятся на m, в то время как, по определению P_0, их НОД равен 1. Поэтому $m = 1$. Так что, если плоскость α не содержит других целых точек, то имеет место второе утверждение.
В противном случае, пусть $N = (n_1, n_2, n_3) \in \alpha$ целая точка вне ℓ. Подставляя координаты N и P в уравнение $Ax + By + Cz = 0$, получим систему двух непропорциональных линейных уравнений на переменные A, B, C с целыми коэффициентами. Пусть $p_1 = \lambda n_1$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, тогда рассмотрим ненулевую точку $P - \lambda N = (0, p_2 - \lambda n_2, p_3 - \lambda n_3) \in \alpha$. Подставляя ее в уравнение $Ax + By + Cz = 0$, получим, что $B = \mu C$ для некоторого рационального μ. Поэтому, из уравнения $Ap_1 + \mu C p_2 + C p_3 = 0$, получаем, что $A = \nu C$ для некоторого $\nu \in \mathbb{Q}$. Итак, система имеет рациональное решение, то есть имеет место третье утверждение.

Динамика мозаик

Задача 10ef

Задача **4c** для любой нерациональной плоскости. Если для каждой точки (x, y, z) фигуры A в пространстве взять точку $(\{x\}, \{y\}, \{z\})$, то получившиеся точки образуют другую фигуру, которую будем называть *дробной частью* A и обозначать через $\{A\}$.
Обмотка куба $[0, 1)^3$ плоскостью L – дробная часть этой плоскости.
Плиткой обмотки будем называть дробную часть плитки на плоскости. Как и в случае прямой на клетчатой бумаге, плитки обмотки получаются сечением куба плоскостями, параллельными L, и в случае иррациональной плоскости находятся во взаимно однозначном соответствии с плитками плоскости.

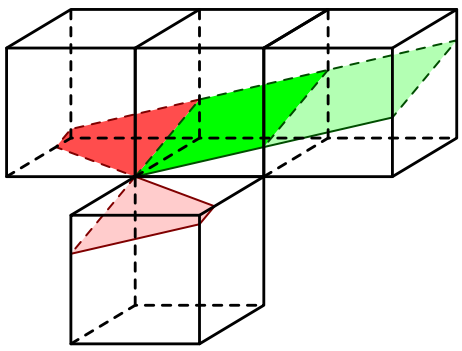
Утверждение. Обмотка иррациональной или полуиррациональной плоскостью пересекает любой не параллельный ей отрезок в кубе $[0, 1)^3$, причем в бесконечном количестве точек.

Доказательство. Действительно, перестановкой координат мы всегда можем добиться того, чтобы плоскость не была параллельна оси Oz, т.е. записывалась уравнением $z = \mu x + \lambda y$. При этом среди μ и λ хотя бы одно – например, λ – иррациональное (иначе плоскость была бы рациональной).
Сначала предположим, что данный отрезок I вертикален, то есть высекается на вертикальной прямой V с абсциссой x_0 и ординатой y_0 условием $p < z < q$. Тогда любая точка плоскости, дробная часть которой попала на прямую V, имеет вид $(x, y, \mu x + \lambda y) = \big(x_0 + k, y_0 + m, \mu(x_0 + k) + \lambda(y_0 + m)\big)$ для некоторых целых k и m. Поэтому любая точка прямой V, попавшая на обмотку, имеет вертикальную координату $z = \big\{(\mu x_0 + \lambda y_0) + k\mu + m\lambda\big\}$. Зафиксируем произвольное k, тогда по лемме Дирихле при некотором целом m это число попадет в интервал (p, q).
Теперь откажемся от предположения о вертикальности отрезка. В произвольном отрезке I есть подотрезок, который проецируется вдоль данной плоскости на вертикальный отрезок J в кубе $[0, 1)^3$, а потому вместе с J пересекается обмоткой.
Так как в любом отрезке можно выбрать бесконечно много непересекающихся подотрезков, и каждый из них будет пересекаться с обмоткой, то пересечений бесконечно много. □

Задача **3** для нерациональной плоскости: сначала сформулируем все пункты и решим их для иррациональной плоскости, а потом сделаем два простых замечания, которые решат их все для полуиррационального случая.

Задача **3a** для иррациональной плоскости: могут ли на плоскости быть две равные плитки?

Ответ: да, могут. Например, рассмотрим иррациональную или полуиррациональную плоскость $z = \mu x + \lambda y$ с положительными $\mu < \frac{1}{4}$ и $\lambda < \frac{1}{3}$. Тогда пересечение с кубом $[0, 1)^3$ и его сдвигом на один по оси Ox даст равные параллелограммы. Также в этой плоскости для каждой плитки есть равная ей, получаемая симметрией относительно начала координат.



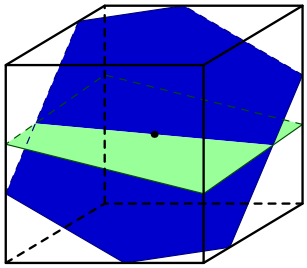
Задача **3b** для иррациональной плоскости: может ли на плоскости быть или не быть бесконечно много равных плиток?

Ответ существенно отличается от одномерного случая: может быть и может не быть бесконечно много равных плиток на иррациональной плоскости.

Чтобы построить оба примера, заметим, что все направления секущих плоскостей куба делятся на два качественно разных класса:

Лемма 1. Если плоскость L проходит через центр куба и не проходит через его вершины, то она делит вершины куба на две четверки. Каждая из этих четверок состоит либо из вершин грани куба (в этом случае назовем L *4-плоскостью*, а ее направление – *4-направлением*), либо из вершины и тройки смежных с ней вершин (в этом случае назовем L *6-плоскостью*, а ее направление – *6-направлением*).

Названия объясняются тем, что в первом случае плоскость L пересекает куб по центрально-симметричному четырехугольнику (т.е. по параллелограмму), а во втором – по центрально-симметричному шестиугольнику.



Доказательство. Чтобы доказать, что других конфигураций вершин по одну сторону плоскости L не бывает, заметим, что такая конфигурация не может содержать противоположных вершин. Но любая конфигурация четырех вершин куба без противоположных вершин является либо одной из двух, описанных в Лемме 1, либо "шахматной", т.е. набором четырех попарно не смежных вершин. А шахматная конфигурация $ABCD$ не может лежать по одну сторону плоскости, проходящей через центр куба, так как центр лежит в тетраэдре $ABCD$. □

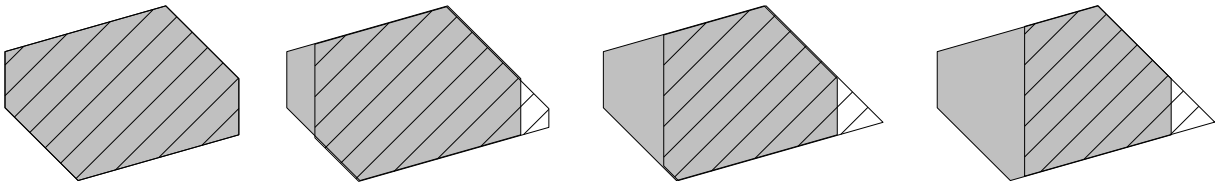
Пример 4-плоскости приведен в решении прошлого пункта, пример 6-плоскости – серединный перпендикуляр к диагонали куба. Вообще, в координатах, плоскость $Ax + By + Cz = 0$ имеет 6-направление по отношению к кубу $[0,1]^3$, если максимальное из чисел $|A|, |B|, |C|$ не превосходит суммы двух других, и 4-направление – если превосходит.

Для решения **3b** на плоскости сначала рассмотрим нерациональную 4-плоскость L, проходящую через центр куба $[0,1]^3$. Обмотка плоскостью L по задаче **4c** задевает в бесконечном количестве точек маленький отрезок, не параллельный плоскости проходящий через центр куба. Если этот отрезок достаточно короток, то каждая точка пересечения лежит в плитке обмотки, которая достаточно близка к пересечению самой плоскости L с кубом $[0,1]^3$, и потому является равным ей параллелограммом.
На любой иррациональной 6-плоскости L, наоборот, не может быть более двух равных плиток. Это следует из такого факта.

Лемма 2. Все непустые сечения куба $[0,1]^3$ плоскостями данного 6-направления имеют разную площадь (а значит, не равны), если только не симметричны друг другу относительно центра куба.

Доказательство. Более точно, мы докажем, что если провести 6-плоскость L через центр куба, и затем начать параллельно перемещать от центра, то площадь сечения будет строго убывать до нуля.

Для доказательства убывания площади сменим систему отсчета: вместо того чтобы параллельно сдвигать плоскость, станем сдвигать куб параллельно оси Oz на расстояние h и посмотрим, что происходит с его сечением S_h на (неподвижной) плоскости L. По мере возрастания h мы увидим следующее:



Здесь сплошным цветом изображено исходное сечение S_0, а штриховкой – сечения S_h при возрастании h. Шестиугольное сечение S_h получается из S_0 отрезанием и добавлением трапеции, причем высоты трапеций равны, а большее основание добавляемой трапеции равно меньшему основанию отрезаемой. Соответственно, площадь S_h меньше площади S_0. Более того, чем больше h, тем больше высоты трапеций, тем больше разница их площадей, а значит и разница площадей S_h и S_0. После того, как сечение перестало быть шестиугольным, при $h > g$ сечение S_h просто содержится в S_g, а значит, имеет меньшую площадь. □

Замечание. Соображения из этих двух лемм также нужны для полного решения задачи **10c**.

Задача **3c** для иррациональной плоскости: может ли на плоскости быть или не быть ровно трех равных плиток?

Ответ: не может быть трех равных плиток на иррациональной плоскости.

Действительно, согласно Лемме 2, на обмотке 6-плоскости может оказаться не более двух равных друг другу плиток.
Аналогично лемме 2 доказывается и ее аналог для 4-плоскости: все сечения куба $[0,1]^3$ плоскостями данного 4-направления имеют разную площадь (а значит, не равны), если только не симметричны друг другу относительно центра куба и не равны сечению, проходящему через центр.
Этот аналог показывает, что на обмотке 4-плоскости обязательно будет бесконечно много плиток, равных центральной плитке, а среди остальных плиток будет не более двух равных друг другу.

Задача **3d** для иррациональной плоскости: может ли на плоскости быть или не быть бесконечно много попарно различных плиток?

Ответ: не может не быть бесконечно много попарно различных плиток на иррациональной плоскости.

Действительно, по задаче **4c** для плоскости, обмотка бесконечно много раз пересечет маленький отрезок, выходящий внутрь куба из его вершины перпендикулярно плоскости. Каждая из точек пересечения будет лежать в треугольной плитке обмотки, и все эти треугольники будут подобны друг другу с неединичными коэффициентами.

Задача **3a-d** для полуиррациональной плоскости: по определению, полуиррациональная плоскость переходит в себя при параллельном переносе P на некоторый ненулевой целочисленный вектор. Потому каждая плитка на ней равна бесконечному числу других плиток, получающихся из нее многократным применением параллельного переноса P.
Этим полуиррациональная плоскость похожа на рациональную, но отличается от нее применимостью задачи **4c**. Значит, все приведенные выше решения для иррациональных плоскостей, основанные на применении задачи **4c**, работают также и для полуиррациональных плоскостей.

Эти два замечания вместе дают следующие ответы в **3a-d** для полуиррациональной плоскости: (a) – могут (и должны), (b) – не может не быть, (c) – не может быть, (d) – не может не быть.

Задача **3e** для нерациональной плоскости: опишите геометрически все плоскости (не обязательно проходящие через 0), на которых есть пара равных плиток, не равных другим.

Ответ: это все иррациональные плоскости, проходящие через какую-то точку с полуцелыми координатами.

Действительно, полурациональные и рациональные плоскости не подходят, так как содержат бесконечно много плиток, равных каждой данной. Наличие же ровно двух равных плиток на иррациональной плоскости говорит о том, что эти две плитки центрально симметричны (см. Лемму 2 для 6-плоскостей и ее аналог для 4-плоскостей в решении аналога пункта **3c**). Как и в решении данной задачи для прямой, центр симметрии этих двух плиток будет искомой полуцелой точкой на плоскости.

Задача 11a

Мы сформулируем и докажем следующую *двумерную теорему Вейля*. Пусть хотя бы одно из чисел λ и μ иррационально. Обозначим через W_N набор чисел $\{b+k\mu+n\lambda\}$ при всевозможных натуральных k и n, не превосходящих N. Этот набор состоит из N^2 чисел (среди которых, возможно, есть повторяющиеся). Тогда частота попаданий набора W_N в отрезок I стремится к длине отрезка $|I|$ при $N\to\infty$.
Без ограничения общности можем предположить, что λ иррациональное. Заметим, что в решении задачи **7d** мы доказали чуть больше, чем требовалось: для каждого иррационального λ и положительного ε существует такое N_0, что если выбрать из прогрессии Вейля $\{a+n\lambda\}$ с произвольным началом a более чем N_0 начальных членов, то частота их попадания в I будет отличаться от длины $|I|$ менее чем на ε. Сила этого утверждения в том, что одно и то же N_0 подходит для всех a.
При $N>N_0$ набор W_N распадается на начальные отрезки длины N прогрессий Вейля с разностью λ и началами вида $b+k\mu$. Так как частота попадания каждого из этих отрезков в I отличается от длины $|I|$ менее чем на ε, по Следствию 1, то же самое верно и для частоты попадания в отрезок I всего набора W_N.

Замечание. На самом деле можно доказать более общий факт: выберем на плоскости с координатами (k,n) произвольный выпуклый многоугольник P, и обозначим через P_N его образ при гомотетии с коэффициентом N. Тогда мы можем определить "начальный отрезок" W_N нашей двухпараметрической последовательности $\{b+k\mu+n\lambda\}$ как множество членов, для которых точка (k,n) лежит в многоугольнике P_N. Например, если положить $P=[0,1]^2$, то "начальный отрезок" W_N получится точно таким, как мы определяли в решении выше. Оказывается, что не только для $P=[0,1]^2$, но и для любого другого выбора P частота попаданий набора W_N в отрезок I стремится к длине отрезка $|I|$ при $N\to\infty$. Заинтересованному читателю полезно попробовать это доказать.

Задача 11b

Так как плоскость $Ax+By+Cz=0$ иррациональна, то не содержит вертикальную ось, то есть $C\neq 0$. Тогда множество всех точек (x,y,z) на этой плоскости, для которых x и y содержатся в отрезке $[0,N]$, образует параллелограмм, который мы обозначим P_N.
Мы сформулируем и докажем следующий аналог задачи 8. Возьмем в кубе $[0,1]^3$ отрезок I и обозначим через a,b,c разности координат его концов. Тогда

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\text{число точек пересечения дробной части }\{P_N\}\text{ и отрезка }I}{\text{площадь параллелограмма }P_N}=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\text{длина ортогональной проекции отрезка }I\text{ на перпендикуляр к данной плоскости.}\quad(*)$$

Здесь второе равенство тривиально. Действительно, вектор v с координатами (A, B, C) ортогонален данной плоскости. Обозначив угол между ним и вектором I через α, получим, что средняя часть равенства $(*)$ равна $\dfrac{|v \cdot I|}{|v|} = \dfrac{|v||I|\cos\alpha}{|v|} = |I|\cos\alpha$, т.е. длине ортогональной проекции вектора I на прямую, параллельную вектору v.

Для доказательства первого равенства в $(*)$ нам понадобятся следующие наблюдения.
Во-первых, заметим, что утверждение верно для вертикального отрезка. Действительно, с учетом $C \neq 0$ мы можем переписать уравнение плоскости как $z = \lambda x + \mu y$, причем среди λ и μ хотя бы одно иррационально (иначе плоскость была бы рациональной). Тогда, если отрезок I задается условиями $x = x_0$, $y = y_0$ и $p < z < q$, то требуемое утверждение превращается в двумерную теорему Вейля для прогрессии $\{(\lambda x_0 + \mu y_0) + \lambda k + \mu n\}$ и отрезка $[p, q]$.
Нужно только не забыть, что в теореме Вейля частота определялась делением на число пар (k, n) в квадрате $[1, N]^2$, а здесь частота определяется делением на площадь параллелограмма P_N. Соответственно, ответ, даваемый теоремой Вейля, нужно разделить на отношение количества пар N^2 к площади P_N, которое, очевидно, не зависит от N, и поэтому равно площади параллелограмма P_1, т.е. $\frac{1}{(\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2})}$.
Во-вторых, заметим, что если отрезки QR и ST в кубе $[0, 1]^3$ параллельны плоскости $Ax + By + Cz = 0$, то равенство $(*)$ для отрезка QS равносильно равенству $(*)$ для отрезка RT. Действительно, левые части этих двух равенств совпадают, поскольку каждая плоскость, параллельная $Ax + By + Cz = 0$, пересекает или не пересекает QS и RT одновременно. Правые же части этих двух равенств совпадают, поскольку равны длине ортогональных проекций отрезков QS и RT на перпендикуляр к плоскости $Ax + By + Cz = 0$, а проекции эти совпадают.
В-третьих, заметим, что если произвольный отрезок I разбить на части, то равенство $(*)$ для отрезка I будет следовать из равенств $(*)$ для частей (точнее, будет получаться как сумма этих равенств).
Теперь назовем отрезки QS и RT *аналогичными*, если отрезки QR и ST параллельны плоскости $Ax + By + Cz = 0$, и заметим, что произвольный отрезок I в кубе $[0, 1]^3$ можно разбить на части, аналогичные вертикальным отрезкам (например, если через все вершины куба провести плоскости, параллельные данной, то они как раз разобьют I нужным образом). Согласно сделанным выше замечаниям, равенство $(*)$ выполнено для вертикальных отрезков, а значит и для аналогичных им частей отрезка I, а значит и для всего отрезка I.
Замечание. Если бы мы в начале решения выбрали в качестве вертикальной другую координату, то параллелограмм P_N, фигурирующий в равенстве $(*)$, получился бы другим. Однако левая часть равенства $(*)$ от этого не изменилась бы, так как равна правой части, не зависящей от выбора параллелограмма P_N. На самом деле левая часть равенства $(*)$ не изменится, даже если семейство параллелограммов P_N заменить на семейство образов при гомотетиях любого выпуклого многоугольника, а не только другого параллелограмма. Заинтересованному читателю полезно попробовать это доказать, пользуясь замечанием к решению предыдущего пункта.

Задача 11c

Определим плотность плиток на иррациональной плоскости $Ax + By + Cz = 0$ как предел отношения

$$\frac{\text{число плиток внутри параллелограмма } P_N}{\text{площадь параллелограмма } P_N},$$

где параллелограмм P_N определен как в решении прошлого пункта.
Чтобы вычислить ее, предположим для удобства, что A, B и C положительны. Тогда число плиток внутри параллелограмма P_N равно числу пересечений его дробной части $\{P_N\}$ с диагональю куба, соединяющей вершины $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$. Применяя результат прошлого

пункта к этой диагонали, получим что плотность равна

$$\frac{A+B+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

В общем случае числитель нужно заменить на $|A|+|B|+|C|$.

Задача 11d

Аналогично выводу задачи **9b** из **9a** получим, что ответ обратен ответу к прошлому пункту.

Задача 11e

Определим плотность треугольных плиток на иррациональной плоскости $Ax+By+Cz=0$ как предел отношения

$$\frac{\text{число треугольных плиток внутри параллелограмма } P_N}{\text{площадь параллелограмма } P_N}.$$

В предположении, что A, B и C положительны, проведем плоскости, параллельные $Ax+By+Cz=0$, через все вершины куба. Эти плоскости разобьют диагональ, соединяющую вершины $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$, на отрезки, из которых два крайних обозначим через I и J. Их длины равны и относятся к длине диагонали как $\min(A,B,C)/(A+B+C)$.
Заметим, что плоскость $Ax+By+Cz=D$ пересекает куб $[0,1]^3$ по треугольнику если и только если она пересекает отрезки I или J, поэтому искомая плотность треугольных плиток относится к известной плотности всех плиток как $2\min(A,B,C)/(A+B+C)$.
Соответственно, в общем случае ответ будет

$$\frac{2\min(|A|,|B|,|C|)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Задача 11f

Искомая вероятность равна отношению плотностей треугольных и всевозможных плиток, т.е.

$$\frac{2\min(|A|,|B|,|C|)}{|A|+|B|+|C|}.$$

Задача 11g

Проведем через каждую из вершин куба $[0,1]^3$ плоскость, параллельную данной. Эти плоскости разобьют куб на несколько частей, из которых две будут равными тетраэдрами.
Как станет ясно из решения задачи **17**, ответ равен сумме объемов этих двух тетраэдров, то есть $\dfrac{|ABC|}{3\max(|A|,|B|,|C|)^3}$.

Полиэдры

Пусть полиэдры P и Q представляются объединениями (замкнутых) выпуклых многоугольников $C_1, C_2, \ldots$ и $D_1, D_2, \ldots$.

Задача 12a

Объединение P и Q представляется как объединение всех $C_1, C_2, \ldots, D_1, D_2, \ldots$, а пересечение P и Q – как объединение всех попарных пересечений $C_i \cap D_j$, которые сами являются (замкнутыми) выпуклыми многоугольниками.
Компонента связности P вместе с каждой точкой x содержит все многоугольники C_i, содержащие x, а потому является объединением некоторых из $C_1, C_2, \ldots$.

Задача 12b

Дополнение к каждому выпуклому многоугольнику C_i – это полиэдр, который мы обозначим $\overline{C_i}$. Действительно, если многоугольник определен как пересечение данных полуплоскостей, то его дополнение является объединением полуплоскостей, дополнительных к данным. Поэтому дополнение к полиэдру P – пересечение полиэдров $\overline{C_i}$, которое, по предыдущему пункту, само является полиэдром.

Задача 12с

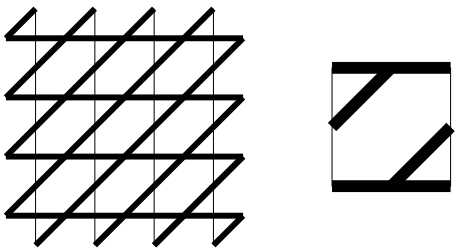
Пусть полиэдры P и Q имеют p и q компонент соответственно. Тогда объединение P и Q может иметь любое число компонент от 1 до $p+q$, но не больше. Больше быть не может, так как каждая компонента объединения содержит какую-то компоненту P или Q. Приведем максимальный и минимальный примеры, остальные можно построить аналогично. В качестве P рассмотрим множество $[0;1] \cup \{2,3,\ldots,p\}$. Множество Q_1 состоит из q точек $\{p+1, p+2, \ldots, p+q\}$ и в объединении с P дает $p+q$ компонент. Множество $Q_2 = [1;p] \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{q}\}$ при объединении с P станет связным.
В то же время на плоскости легко построить примеры, показывающие, что пересечение P и Q и дополнение к P могут иметь любое число компонент при каждом значении p и q. Например, если множество P составлено из горизонтальной и N вертикальных прямых, а Q – наклонная прямая, то пересечение $P \cap Q$ и дополнение к P имеют много компонент связности (более N и $2N$ соответственно), хотя сами P и Q связны.

Задача 13а

Нет, не могут. По определению, периодическое множество получается объединением всевозможных параллельных переносов своей фундаментальной области по вертикали и горизонтали на целые расстояния.

Задача 13в

Да, может. Например:



Задача 14

Для решения пункта (а) заметим, что для треугольника понятие “внутри” определено изначально: треугольник – это выпуклый многоугольник, т.е. пересечение замкнутых полуплоскостей S_1, S_2, S_3. Согласно этому определению, внутренние точки просто включены в треугольник: множество внутренних точек треугольника – это пересечение полуплоскостей S_1, S_2, S_3 без границ. Также, согласно этому определению, отрезок, соединяющий внутреннюю точку треугольника с внешней, пересечет границу одной из полуплоскостей, а значит одну из сторон треугольника.

Задача 14а

Рассмотрим первый треугольник как выпуклый многоугольник, а второй – как замкнутую ломаную. По предыдущему замечанию эта ломаная войдет в первый треугольник столько же раз, сколько и покинет его, а значит число пересечений с границей будет четно.

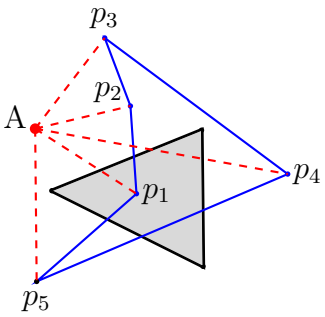
Задача 14в

Выберем точку A и соединим с ней каждую вершину данной ломаной. Очевидно, точку A можно выбрать так, чтобы ни один из соединяющих отрезков не проходил через вершины данного треугольника T, и никакие два соединяющих отрезка не оказались на одной прямой.

Тогда звенья ломаной являются основаниями треугольников $T_1, \ldots, T_n$ с общей вершиной A, и никакой треугольник T_i не проходит через вершины треугольника T. Таким образом, по пункту (a), число пересечений треугольника T с каждым из T_i четно, а искомое число пересечений отличается от него на четное число (а именно, на удвоенное число пересечений треугольника T с отрезками между A и вершинами ломаной).

Задача 14c

Аналогично пункту (b), заменим первую ломаную на набор треугольников. По пункту (б) число пересечений каждого из этих треугольников со второй ломаной будет четно.



На рисунке слева звенья ломаной p_1, p_2,..., p_5 служат основаниями треугольников p_1Ap_2, p_2Ap_3, p_3Ap_4, p_4Ap_5 и p_5Ap_1 с общей вершиной в новой точке A. Видно, что каждый из отрезков p_iA встречается ровно два раза.

Задача 15a

Обозначим дорисованное ребро через EF. Это ребро лежит в некоторой компоненте дополнения к графу A, которую обозначим через C. Объединение графа A с ребром EF обозначим через A' и исследуем, как компоненты дополнения к A связаны с компонентами дополнения к A'.

Пусть две точки x и y лежат в одной компоненте дополнения к графу A, т.е. соединены избегающей его ломаной P. Если эта ломаная пересекает ребро EF, то обе точки x и y лежат в компоненте C, а если не пересекает, то обе точки x и y лежат в одной компоненте дополнения к графу A'. Таким образом, все компоненты дополнения к графу A, кроме C, остаются компонентами дополнения к графу A'.

Чтобы понять, сколько компонент дополнения к графу A' лежит в компоненте C, отложим по обе стороны ребра EF треугольники EFS и EFT, не имеющие с A общих точек кроме E и F.

Покажем, что каждая точка x компоненты C соединяется с S или T ломаной, избегающей графа A'. Из этого будет следовать, что компонента C содержит не более двух компонент дополнения к графу A' – а именно, компонент точек S и T.

Так как точка x содержится в C, то ее можно соединить ломаной P с некоторой внутренней точкой G отрезка EF. Более того, можем считать, что G – единственная точка ломаной P, содержащаяся в отрезке EF. Иначе пойдем по ломаной P от точки x до первой точки, содержащейся в EF, и отбросим остаток ломаной P.

Так как треугольники EFS и EFT вместе покрывают малую окрестность точки G, то вблизи ее на ломаной P имеется точка G', не лежащая на отрезке EF, но лежащая в одном из двух треугольников – например, в EFS.

Поэтому участок ломаной P между точками x и G', дополненный отрезком $G'S$, соединяет точкиx и S, избегая графа A'.

Задача 15b

Нам осталось доказать, что точки S и T из решения предыдущего пункта лежат в разных компонентах дополнения к графу A'. Действительно, в противном случае их соединяла бы ломаная P, избегающая графа A'. Считая без ограничения общности, что в треугольниках EFS и EFT углы S и T тупые, заметим, что отрезок ST содержится в объединении треугольников EFS и EFT, а значит, избегает графа A и пересекает EF в одной точке G. Таким образом, отрезок ST дополняет ломаную P до замкнутой несамопересекающейся

ломаной P', пересекающей граф A' в единственной точке G.
С другой стороны, в силу связности графа A, он содержит ломаную Q, соединяющую точки E и F. Дополняя Q отрезком EF до замкнутой несамопересекающейся ломаной Q', получаем, что замкнутые несамопересекающиеся ломаные P' и Q' без общих вершин пересекаются по единственной точке G. Противоречие с предыдущей задачей.

Квазипериодические множества

Задача 16а

Да, является: обозначим требуемое конечное множество через S, а периодическое множество, у которого фундаментальная область – дробная часть $\{S\}$, обозначим через M. Тогда в пересечении с данной иррациональной прямой это множество M даст как раз S.

Задача 16в

Нет, аналогично прошлому пункту можем показать, что отрезок – квазипериодическое множество.

Задача 16с

Пример такого множества – набор всех точек прямой, находящихся справа от точки $(0,0)$ на целом расстоянии от нее.
Докажем от противного: пусть это множество M получилось пересечением данной прямой L с периодическим множеством, имеющим фундаментальный полиэдр F. Так как в M бесконечно много точек, то и в полиэдре F тоже, а значит, он содержит отрезок I, пересекающийся с обмоткой L.
Но так как M не содержит отрезка, то отрезок I не параллелен прямой L. Поэтому плотность точек пересечения данной обмотки с I ненулевая, а значит, M должно иметь точки в любом достаточно длинном отрезке на прямой L – в том числе и в отрезке, лежащем слева от $(0,0)$. Но слева от $(0,0)$ точек множества M нет, противоречие.

Замечание. На самом деле никакой луч на данной прямой не является квазипериодическим множеством. Попробуйте это доказать.

Задача 17а

Ответ – площадь прямоугольника. Действительно, пусть сторона прямоугольника, параллельная данной прямой, имеет длину a, а перпендикулярная ей сторона – b. Тогда каждая компонента множества Q – отрезок длины a, а плотность этих компонент равна плотности пересечений обмотки с перпендикулярной стороной, т.е. b. Поэтому средняя длина равна ab, т.е. площади F.

Задача 17в

Ответ – площадь F. Доказательство состоит в применении подсказки.

Задача 18а

По предыдущей задаче, ответ равен площади фундаментальной области, т.е. $2h - h^2$.

Задача 18в

Плотность зеленых плиток равна длине ортогональной проекции зеленого прямоугольника вдоль прямой $x + \sqrt{2}y = 0$, т.е. $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}h$. Аналогично, плотность желтых плиток равна сумме длин ортогональных проекций вертикального и горизонтального желтых многоугольников, то есть $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Заметим, что каждая компонента множества Q_h, кроме начинающейся в начале координат, состоит из чередующихся желтых и зеленых плиток, причем ее крайние плитки всегда желтые. Поэтому в каждом отрезке нашей прямой разность числа желтых и зеленых плиток

равна числу компонент множества Q_h с точностью до ± 3. Соответственно, плотность компонент множества Q_h равна разности плотностей желтых и зеленых плиток, т.е. $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1-h)$.

Эйлерова характеристика.

Задача 19a

Обозначим данную фигуру через P. Она является полиэдром, так как имеет, например, следующее клеточное разбиение: трапеция с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, все ее ребра и вершины, интервал с концами $(1,0)$ и $(1,1)$, его концы, а также все клетки, симметричные перечисленным относительно прямой $y=x$.
Если в ее клеточное разбиение входит указанный треугольник, то и интервал I с концами $(1,-1)$ и $(-1,1)$, являющийся стороной данного треугольника, входит в разбиение. С другой стороны, треугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$ и $(-1,1)$ должен содержать хотя бы одну двумерную клетку со стороной J, лежащей на I. Таким образом, у нас получились две несовпадающие клетки I и J, имеющие общие точки. Противоречие.

Задача 19b

Данный полиэдр P является объединением нескольких выпуклых многоугольников, каждый из которых в свою очередь является пересечением нескольких полуплоскостей. Обозначим граничные прямые всех этих полуплоскостей через $L_1, L_2, \ldots, L_n$.
Эти прямые задают клеточное разбиение плоскости. Каждая его двумерная клетка получается следующим образом: для каждого i выберем одну из двух полуплоскостей с границей L_i, и возьмем пересечение этих полуплоскостей. Каждая одномерная клетка разбиения получается следующим образом: разобьем одну из прямых L_i на интервалы остальными прямыми, и возьмем один из этих интервалов (напомним, что лучи мы также называем интервалами). Наконец, каждая нульмерная клетка разбиения – пересечение двух из прямых $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Каждая клетка построенного разбиения либо целиком лежит в P, либо целиком не лежит. Соответственно, набор тех клеток, которые лежат в полиэдре P, является его клеточным разбиением.

Задача 20a

Если полиэдр состоит из нескольких точек, равенство верно.
Если полиэдр является лесом (то есть объединением нескольких деревьев), то равенство также верно. Действительно, любой лес можно вырастить из конечного числа точек, дорисовывая к нему последовательно по одному листу, то есть добавляя новую вершину и соединяя ее с одной из имеющихся. А при дорисовывании листа значения обе части равенства Эйлера не изменяются.
Если полиэдр является графом, то равенство тоже верно. Действительно, любой граф можно получить из леса, последовательно применяя к его компонентам операции из задачи **15**, но, согласно этой задаче, при такой операции обе части равенства Эйлера одновременно уменьшаются на 1.
Наконец, равенство верно для любого полиэдра. Действительно, любой полиэдр можно получить из графа добавлением двумерных клеток, но добавление каждой двумерной клетки, очевидно, одновременно увеличивает обе части равенства Эйлера на 1.

Задача 20b немедленно следует из пункта **a**, потому что правая часть тождества Эйлера не зависит от клеточного разбиения.

Задача 20d также немедленно следует из пункта **a**, потому что эйлерова характеристика замкнутой несамопересекающейся ломаной равна 0.

Задача 20c следует из определения эйлеровой характеристики, если объединение полиэдров $P \cup Q$ разбито таким образом, что клетки этого разбиения образуют также клеточные

разбиения P, Q и $P \cap Q$. Но такое клеточное разбиение всегда существует – его, например, можно построить так же, как в решении задачи **19b**.

Задача 21

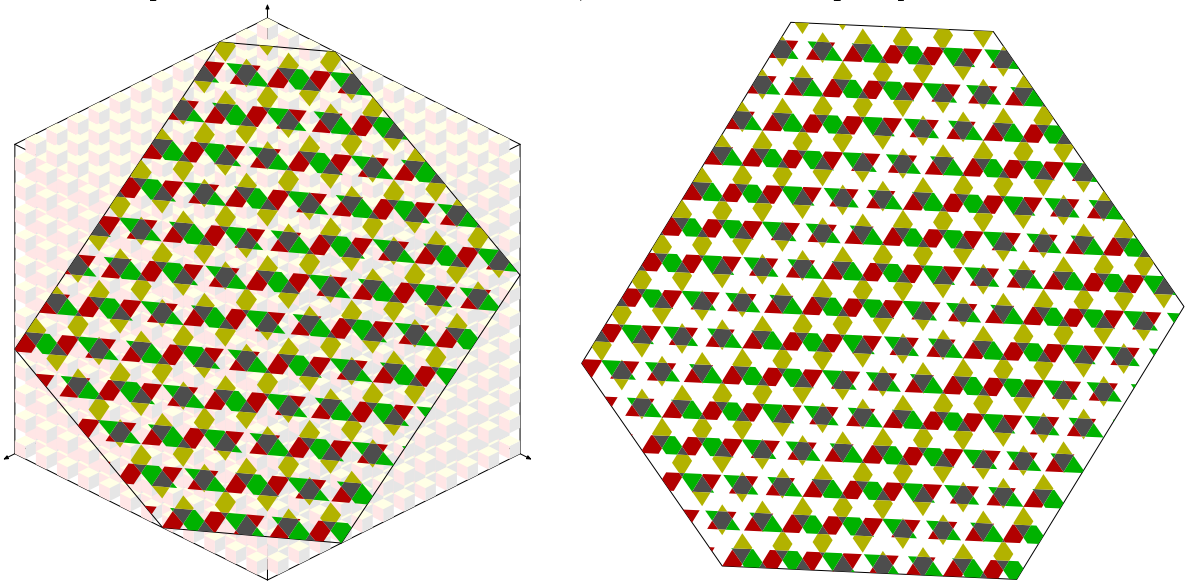
Прогулка к открытым проблемам завершена, и теперь настала очередь участников делиться с нами идеями и продвижениями по данной задаче. Мы будем рады, если это сотрудничество продлится даже после окончания Летней Конференции, и всегда готовы продолжить обсуждение:

Арина Архипова: arhipova@179.ru
Полина Белопашенцева: beloppolina@gmail.com
Илья Богданов ilya.i.bogdanov@gmail.com
Сергей Дориченко sdorichenko@yandex.ru
Кирилл Ступаков kir.stupakov@gmail.com
Александр Эстеров aesterov@hse.ru

Dynamics of Tilings

S.A.Abramyan*, A.A.Arkhipova*, P.S.Belopashenseva*, I.I.Bogdanov, S.A.Dorichenko,
A.I.Esterov*, F.A. Kogan*, I.V. Netay*, A.S.Skripchenko*, K.R.Stupakov*
(* – Department of Mathematics at Higher School of Economics)

This story is a stroll to an open problem connected with topology, dynamics and even the physics of crystals. The problem is about sets like these, which are called *quasiperiodic*:



To understand the formulation of the problem you must get acquainted with the basic concepts of *ergodic theory* (§2 и §3) and *topology* (§5 и §7– these two paragraphs are independent of the rest, you can start with them).

The central paragraph 4 about tilings on the plane – is an introduction to quasiperiodic geometry, which is the topic of paragraphs §6 and §8. The open problem is at the very end.

Before looking at tilings on the plane, we start out with *tilings on the line*. If you draw a line on checkered paper then the cells will divide the line into segments.

What are the possible lengths of these segments? How often do they occur?

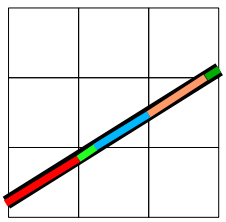
The problems in paragraphs §§1–3 are dedicated to answering these sort of questions.

If you have trouble with some notation or a question, or you just can't seem to solve a problem without a star – ask us (Arina Arkhipova, Polina Belopashenseva, Ilya Bogdanov, Sergey Dorichenko, Alexander Esterov, Kirill Stupakov)!!

§1 Tilings on a rational line

1. **a)** For how many c the line given by the equation $6x + 8y = c$ intersects the square $[0, 1]^2$?
b) What are the lengths of these intersections? How many different lengths are there? How many intersections have a given length?

The line $ax + by = c$ is divided by the cells into segments which we will call *tiles*, a division will be called a *tiling* on a line.



2. **a)** How many different tile lengths occur on line $ax + by = c$ for given integers a, b and c.
b) What is the *period* of this tiling, i.e. the minimal shift required to move the tiling along the line so that it translates to itself.
c) From a corner of a pool table with integer lengths of sides $A \times B$ a ball is hit along the bisector. How many times will it hit the sides of the table before it comes to a corner? What is the minimal and maximal distance the ball travels between two bounces?

§2 Tilings on an irrational line

Here we look at tilings on an *irrational* line $ax + by = c$ such that a/b is an irrational number (e.g. we can study the case $x + \sqrt{2}y = c$).

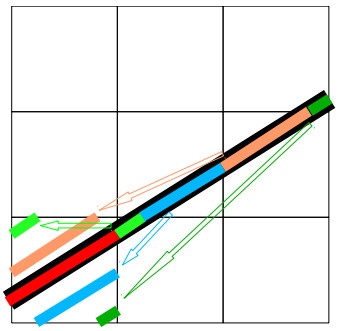
3. **a)** Can there be two tiles of equal length on an irrational line?
b) Can there be or not be an infinite number of tiles with equal length?
c) Can there be or not be exactly three tiles of equal length?
d) Can there be or not be an infinite number of tiles with pairwise different lengths?
e) Describe geometrically all the lines which have a pair of tiles of equal length different from the rest of the tiles.

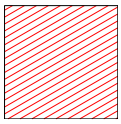
If you have trouble with **b-e** (and you will!) then first solve the following problem:

4. **a)** Prove that any bounded (contained in a segment) sequence of numbers has arbitrarily close members.

b) **(Dirichlet Lemma)** If λ – is an irrational number, then the sequence $\{\lambda\}, \{2\lambda\}, \{3\lambda\}, \{4\lambda\}, \ldots$ (where $\{\}$ denotes the decimal part) is dense in the segment $[0, 1]$, i.e. every subsegment contains at least one member of the sequence.

c) Cut up the checkered paper, with the line $ax+by = c$ drawn on it, into cells, put all of them in a stack, and look at it towards a light. The visible subset of the square $[0, 1]^2$ is called the winding of the square $[0, 1]^2$ with the line $ax+by = c$ (see the picture below). Define the winding rigorously and prove that it intersects with every segment, which is not parallel to the line $ax + by = c$. Now you can solve the previous problem.





§3 Limits and averages

Recall that a number a is called the limit of a sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$, if each neighborhood of a (i.e. each open interval containing a) contains all but a finite number of the members of the sequence. In this case we write $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ and say that the sequence a_n *converges* to a. If you know this **very well** then you can skip the next problem.

5. Prove that **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, **b)** the sequence $a_n = (-1)^n$ doesn't converge,
c) if $c_n = a_n + b_n$, and a_n and b_n converge to a and b respectively the c_n converges to $a + b$.

d) (Squeeze lemma or Two Policeman and a Drunk lemma or Sandwich lemma) If $a_n < c_n < b_n$ and a_n and b_n converge to a, then c_n converges to a.

6. From the corner of a pool table with an irrational ratio of sides $A \times B$ a ball is hit along the bisector with uniform velocity. **a)** Find the average number of bounces i.e.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{number of bounce in the first } T \text{ minutes}}{T}.$$

b) Find the frequency of doublets i.e. pairs of sequential bounces from parallel sides.

If you have trouble with **b** (you might not!) return to it at the end of the paragraph.
We will call *frequency of hits* of a sequence a_n in a segment I the limit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{number of integer } n < N, \text{ such that } a_n \text{ lies in } I}{N}.$$

Your task in the next problem is to prove **Weyl's Theorem**:

> For an irrational number λ and any a the frequency of hits of the sequence $\{a + n\lambda\}$ in a subsegment I of $[0, 1]$ is equal to the length of I.

We will call this sequence a *Weyl progression with difference* λ.

7. **a)** Given a number ε and a segment I, find some irrational λ and integer N, such that

$$\frac{\text{number of integer } n < N, \text{ such that } \{a + n\lambda\} \text{ lies in } I}{N}$$

differs from the length of I by no more than ε.

Tip: take a very small λ and a very big N.

b) Prove that all N starting from some N_0 suit the needs of **a**.

c) Prove that for arbitrarily small δ any Weyl progression can be divided into several subsequences such that each one of them is also a Weyl progression with difference less than δ.

Tip: Apply the Dirichlet lemma to this sequence for the segment $[0, \delta]$.

d) Prove Weyl's Theorem.

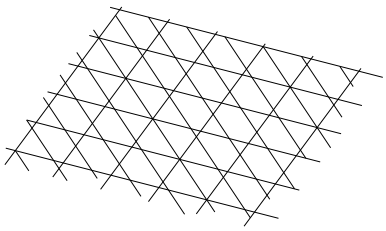
8. **a)** I is a segment inside the square $[0, 1]^2$. Give a definition of the frequency of intersections of the winding of $[0, 1]^2$ with the segment I (the winding of the square was defined at the end of the previous paragraph). **b)** Find this frequency for the case, when I is a horizontal of vertical segment of length d. **c)** Find the frequency for any segment I.

9. **a)** Find the *density* of tiles on the line $ax + by = 0$, i.e.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{number of tiles on the segment of length } T, \text{ drawn from the point} (0, 0)}{T}.$$

b) Find the *average length* of tiles on the line $ax + by = 0$, i.e.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{the sum of the lengths of tiles on a segment of length } T}{\text{number of tiles}}.$$



10. **a)** Give a definition of a tiling and its tiles on a plane $Ax + By + Cz = 0$ in space.
b) What is the maximal number of angles a tile can have?
c) Find the number of different tiles on a plane if A, B and C are integers.
d) Show that for the plane $Ax + By + Cz = 0$ exactly one of the following holds:
– 0 is the only point on this plane with integer coordinates (in this case the plane is called *irrational*);
– all the points on this plane with integer coordinates are of the form $k \cdot v$ where v – is one of these points and k is an integer number (in this case the plane is called *semirational*);
– $\lambda A, \lambda B$ and λC – are integers for some $\lambda \neq 0$ (*rational* plane).
e) Formulate and solve analogs of the problems from paragraph §2 for the irrational plane.
f) Formulate and solve analogs of the problems from paragraph §2 for the semirational plane.

Halfway finish

Choose some polygon P (convenient for you) in the plane $Ax + By + Cz = 0$, containing the point $(0, 0, 0)$. Denote by P_T its homothety with center at $(0, 0, 0)$ and coefficient T. This figure will play the same role for the plane, as the segment of length T did on the line in paragraph §3.

11. **a)** Formulate and prove an analog of Weyl's Theorem for the *two parameter* sequence $\{k\mu + n\lambda\}$.
b) Formulate and prove an analog of problem **8** for the irrational plane in space.
c) Define and find the average area of tiles of a given irrational plane.
d) Define and find the density of triangular tiles on a irrational plane.
e) Find the probability that a randomly chosen tile is a triangle, i.e.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{number of triangle tiles in } P_T}{\text{number of tiles in } P_T}.$$

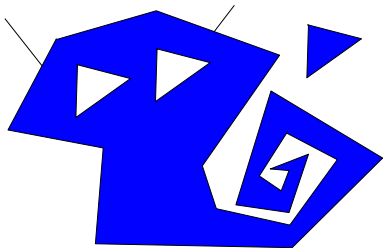
f)[x] Find the probability that a randomly chosen point of the plane is in a triangular tile, i.e.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{the sum of the areas of the triangular tiles in } P_T}{\text{sum of the area of all tiles in } P_T}.$$

g)[x] Define and find the average area of triangular tiles of a given irrational plane.
h) Solve all these problems replacing triangles with four, five, six, seven sided polygons.

§5 Polyhedrons

Recall that a *closed (open) convex polygon* – is an intersection of several half planes including the boundary (respectively not including the boundary). *(Closed) polyhedron* – is a union of several (closed) convex polygons. A *component* of a polyhedron P is a set of all its points that can be connected by piecewise linear curve inside P. Here is an example of a polyhedron with two components, while the complement to it has three components:



12. **a)** Prove that the union and interesction of (closed) polyhedrons, and the connected component of a (closed) polyhedron – is also a (closed) polyhedron.
b) Prove that the complement to a closed polyhedron – is also a polyhedron, but not closed.
c) If we know the number of components of polyhedrons P and Q, what can we say about the number of components of their union? Intersection? Complement to P?

A subset of the plane is called *periodic* if it does not change under integer translations in the horizontal and vertical directions. The *fundamental domain* of a periodic set is its intersection with the unit square. We will call a set a *periodic polyhedron* if it is periodic and its fundamental domain is a polyhedron.

13. **a)** Can different periodic sets have the same fundamental domain?
b) Can a periodic polyhedron have one connected component, and its fundamental domain two ?
c)^{x} Can a periodic polyhedron have two connected components?

14. If two closed non self intersecting piecewise linear curves don't pass through each other's vertices, then they intersect in an even number of points. Prove this **a)** for two triangles **b)** when one of the curves is a triangle **c)** in the general case.

Warning: if you plan to use concepts such as *"inside "* and *"outside a closed non self intersecting piecewise linaer curve"* then you will have to give a definition and prove the properties you plan to use. (But this problem can be solved even easier without using these concepts).

15. Two vertices of a connected graph A on the plane got connected with a new edge, which does not pass through any of the other edges or vertices. Prove that the number of connected components of the complement to this graph increased **a)** by no more than 1 **b)** by no less than 1.

§6 Quasiperiodic sets

A *quasiperiodic set* on the line $ax + by = c$ is the intersection of this line with a periodic polyhedron.

16. **a)** Can a finite set on an irrational line be quasiperiodic?
b) If a quasiperiodic set is contained in a ray, must it be finite?
c) Find a subset of an irrational line which is not quasiperiodic.

The measure of a set on line – is its one dimensional area. Formally, if a set on line is a disjoint finite union of segments, then its *measure* is the sum of lengths of all the segments. Define the

average length of a subset Q of a line as the limit

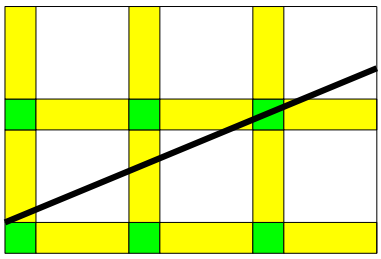
$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{measure of the intersection of } Q \text{ with an segment of length } T, \text{drawn from the point} (0,0)}{T}.$$

17. Let the quasiperiodic set Q on the line $ax+by=c$ be the intersection of this line with a periodic polyhedron P which has fundamental domain F.
a) Find the average length of the set Q, if F is a rectangle, such that one of its sides is parallel to the line $ax+by=c$.
b) Find the average length of the set Q for any F.

Tip: approximate F with rectangles from inside and outside.

Remark: You can now try again to solve the stars in **11**.

For clarity, from now on we will study the quasiperiodic set M_h of the points having at least one coordinate with the fractional part not exceeding h. It is green and yellow in the picture:



Denote by Q_h the intersection of M_h with the line $x+\sqrt{2}y=0$

18. **a)** Find the average length of Q_h. **b)** Define and find the density of segment of the set Q_h.

Tip: First solve **(b)** for the sets $M_{1,h}$ and $M_{2,h}$, which are green and yellow respectively on the picture. Then express the answer for M_h using the answers for $M_{1,h}$ and $M_{2,h}$.

§7 Euler Characteristic

Using the tip to the previous problem, we make an obvious remark: if we divide a subset of the line into open intervals and points, then the difference between the number of points and number of intervals does not depend on the division. This difference is called the *Euler characteristic* of a subset of the line.

To start studying quasiperiodic sets on the plane, we must first generalize the concept of Euler characteristic to subsets of the plane.

We will call a *cell division* of a polyhedron P a set of open convex polygons T_1, T_2, T_3, ... and open intervals I_1, I_2, I_3, ... and points P_1, P_2, P_3, ... (all together called the *cells* of the division) such that
– each point of the polyhedron belongs to exactly one cell, i.e. each point either lies in one of the polygons (but not in its boundary), or in one of intervals (but not at its endpoint), or is one of the points.
– each side and vertex of each polygon and each end of each interval are also cells.
– the number of cells is finite, and the union of the cells equals the polyhedron P.

19. **a)** Consider the closed square $[-1,1]^2$ from which the open square $(0,1)^2$ was removed. Show that the resulting set is a closed polyhedron and find its cell division with the least possible number of cells. Is it possible that the triangle with vertices $(-1,-1)$, $(1,-1)$ and $(-1,1)$ is a cell in some cell division of this polyhedron?
b) Prove that each closed polyhedron admits a cell division.

The *Euler characteristic* of a cell division of a polyhedron P is
$\chi(P) =$(number of polygons)$-$(number of intervals)$+$(number of points).

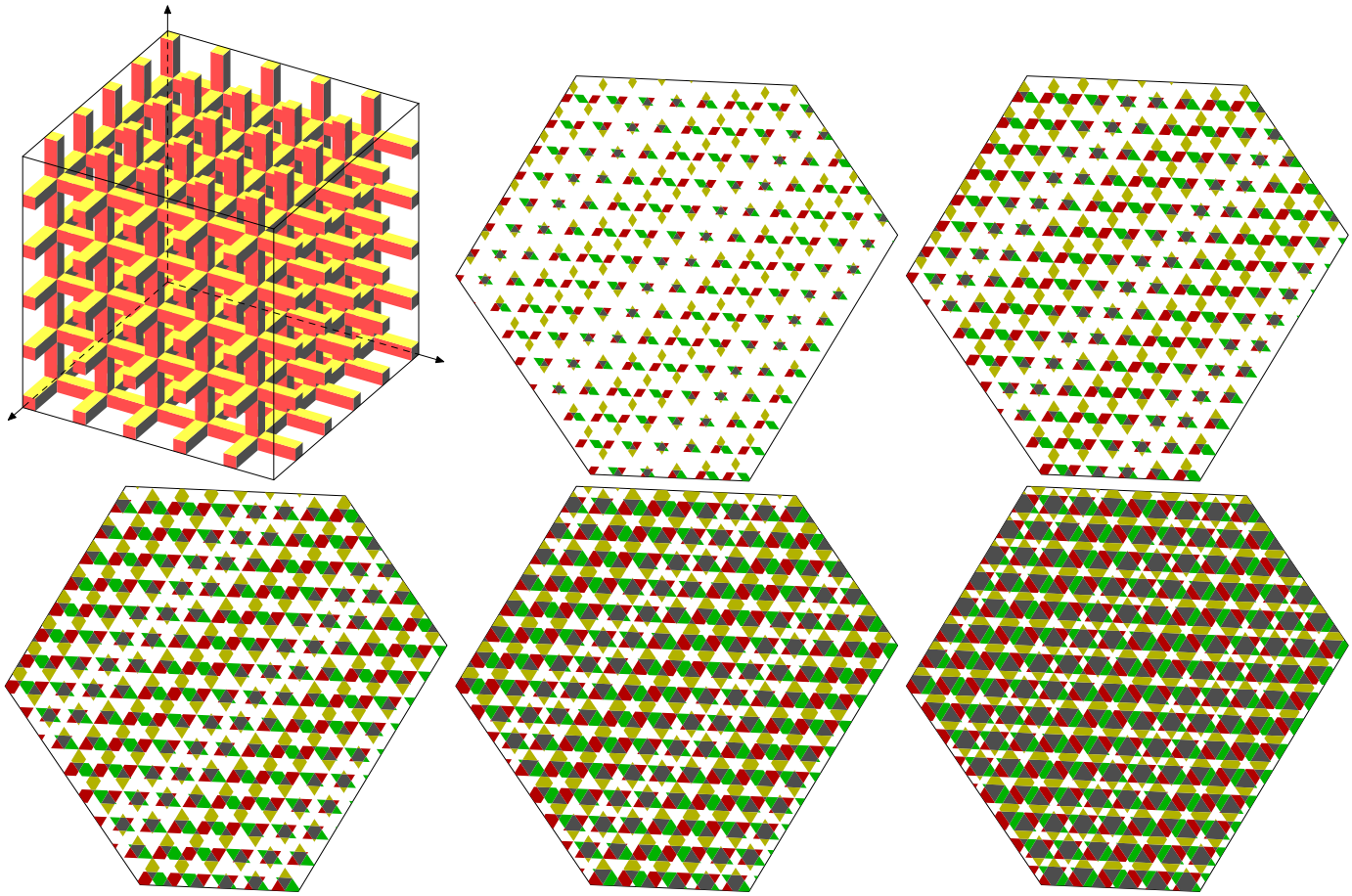
20. a) (Euler Formula) Euler characteristic of a bounded closed polyhedron is equal to: (number of its components)$-$(number of components of its complement)$+1$.

Tip: Prove this for trees, then for graphs, then for a arbitrary polyhedron by adding cells one by one.

b) Euler characteristic of a closed polyhedron does not depend on the choice of the cell division. The Euler characteristic of a convex polygon is 1. **c)** $\chi(P)+\chi(Q)=\chi(P\cup Q)+\chi(P\cap Q)$.
d) (Jordan's Lemma) The complement to a closed non self intersecting piecewise linear curve has exactly two components.

§8 Quasiperiodic sets on the plane

A *quasiperiodic set* on the plane $Ax+By+Cz=0$ is the intersection of this plane with a periodic set in space. In particular, denote by Q_h the intersection of the plane $x+\sqrt[3]{2}y+\sqrt[4]{2}z=0$ with the set M_h, made of the points such that the decimal parts of at least two of the three coordinates do not exceed h. For instance, the set $M_{1/4}$ and the sets Q_h for $h=0.3$, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 look as follows:



As in problem **11**, choose some (convenient for you) polygon P in $x+\sqrt[3]{2}y+\sqrt[4]{2}z=0$, denote by P_T its homothetic image with center (0,0,0) and coefficient T.

Open problem. Calculate the *component density* of the quasiperiodic set Q, i.e. limit

$$\sharp Q=\lim_{T\to\infty}\frac{\text{number of components } Q \text{ в } P_T}{\text{area } P_T}.$$

The answer is not know even for sets Q_h shown above for arbitrory h.

21. **a)** Try to find the least possible $h_0 < 1$, for which $\sharp Q_{h_0} = 0$. (The series of pictures above will help you guess, perhaps not the smallest, but some acceptable h_0)

b) Calculate the density of the Euler characteristic of the set Q_h, i.e.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{Euler characteristic of the intersection } Q \text{ and } P_T}{\text{area of } P_T}.$$

c) Show that the complement to the set M_h can be produced from M_{1-h} by removing the boundary points and applying a central symmetry with respect to 0.

d) How are $\sharp Q_h$ and $\sharp Q_{1-h}$ related?

e) Find $\sharp Q_h$ for sufficiently large and small h, specifically when $h \geqslant h_0$ and $h \leqslant 1 - h_0$.

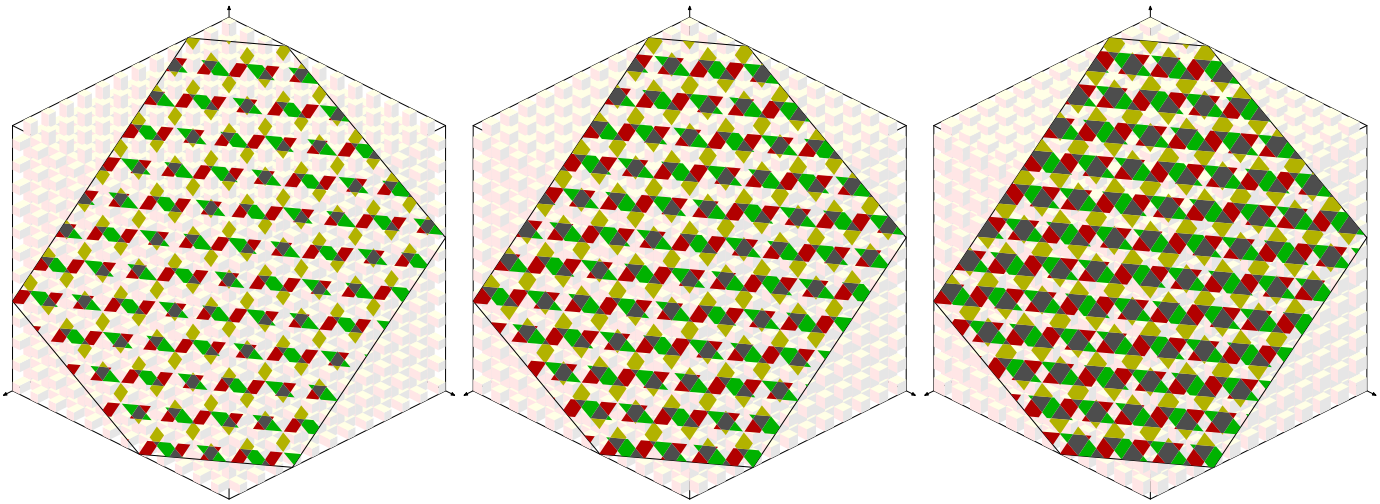
f) Give upper and lower estimations for $\sharp Q_{1/2}$. Try to make them as close as you can.

g) Propose H as large as possible, for which $\sharp Q_H > 0$, and give a lower estimation for this density.

h) Consider the intersection of M_h with another plane: $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z = 0$. This quasiperiodic set $\tilde{Q}_h$ is depicted below for $h = 0.4,\ 0.5,\ 0.6$. Find any estimates for $\sharp\tilde{Q}_h$, which would support or cast doubt on the following conjecture: unlike $\sharp Q_{1/2}$, the density of $\sharp\tilde{Q}_{1/2}$ is zero, but $\sharp\tilde{Q}_h > 0$ for $h < 1/2$.

i) (Discrete version of Arnold's problem 1988-17) Find any estimates which would support or cast doubt on the following conjecture, for the largest possible $h < 1/2$: for each h there exists a sufficiently large number R_h, such that each bounded component of the set $\tilde{Q}_h$ belongs to a disk of radius R_h.

The most accurate estimation of $\sharp Q_H$ or $\sharp\tilde{Q}_{1/2}$ will get a prize, an exact calculation of these densities or solution of the discrete Arnold's problem 1988-17 can be published in a mathematical journal, as soon as you acquire the necessary culture for writing mathematical articles, while studying at a math faculty!

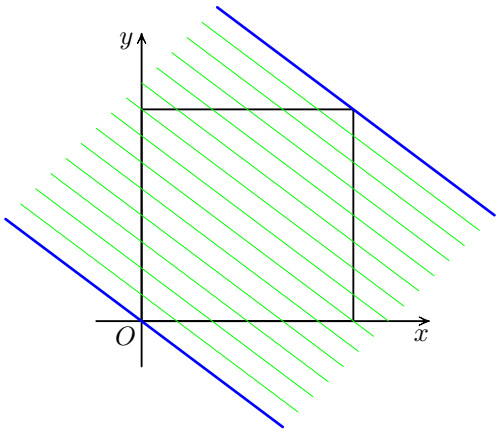


Dynamics of Tilings. Solutions to Problems 1-10

Notation:
$\#A$ is the number of elements in the set A.
$\{x\}$ is the fractional part of x.

Problem 1a

Answer: 15.
Consider the possible "boundary cases" of out line that intersects the square. In these cases, the whole square is contained in one of the half-planes determined by the line, and exactly one of its vertices $(0;0)$ and $(1;1)$ belongs to the line.



Therefore, the sought lines are the ones lying between $6x+8y=0$ and $6x+8y=14$. Thus, the corresponding integer values of c are all the integers in the segment $[0;14]$.

Problem 1b

Consider the three possible cases:

1. The line intersects the square at only one vertex. In this case, the intersects the square in a zero length segment. There are two such lines: $6x+8y=0$ and $6x+8y=14$.

2. The line meets opposite edges of the square (and probably passes through a vertex). Each of those lines intersects the square in a segment of length $\frac{5}{4}$. We will now compute the number of such lines. We start shifting the line $6x+8y=0$ increasing the constant term. Consider the first moment when the line meets opposite edges of the square. At that moment, the line passes through the point $(1;0)$ and is defined by the equation $6x+8y=6$. At the last such moment, it passes through the point $(0;1)$ and is defined by $6x+8y=8$. So, the sought lines lie between the lines $6x+8y=6$ and $6x+8y=8$. Thus, we obtain that there are only three lines intersecting the square in a segment of length $\frac{5}{4}$.

3. The line meets a pair of adjacent edges.

   Consider the first moment, when the line meets a pair of adjacent edges. At that moment, we have $c=1$. This line cuts off a triangle T from the square. Clearly, T is right-angled, and its legs are of the length $\frac{1}{6}$ and $\frac{1}{8}$, respectively. The length of its hypotenuse equals $\sqrt{\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}}$, by the Pythagorean theorem. Thus, the line $6x+8y=1$ intersects the square in the segment of length $\frac{5}{24}$.

Consider the other lines intersecting adjacent edges. Each of them divides the square into a triangle and a pentagon. Note that all the triangles obtained this way are similar to the triangle T, and the similarity ratio is a natural number.

Let us compute the largest possible similarity ratio. Consider the first line that meets a pair of opposite edges of the square. The largest triangle is cut off by the previous line, which is defined by $6x + 8y = 5$. Thus, we obtain that the lines lying between the lines $6x + 8y = 0$ and $6x + 8y = 6$ intersect the square in the segments of length $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$ and $\frac{25}{24}$, respectively. Each of those values occurs as a length of one other segment that is the intersection of the square with one of the lines lying between $6x+8y = 8$ and $6x+8y = 14$.

Answer. The possible lengths are 0, $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{25}{24}$ (each of these values occurs twice), $\frac{5}{4}$ (this value occurs three times). The total number of the pairwise different lengths is 7.

Important notation. Let F be a set in the plane. The *fractional part* $\{F\}$ of F is the set of the points of the form $(\{x\};\{y\})$, where $(x;y) \in F$.

Problem 2a

Let the given line ℓ have an equation $ax + by = c$. We will determine the answer for all (not necessarily integer) values of c. We will assume that

- $\gcd(a, b) = 1$, otherwise one may divide the equation by $\gcd(a, b)$.
- $a \geq b > 0$. The cases $a = 0$ and $b = 0$ are left for the reader; the other cases can be obtained via refections in the coordinate axes and swapping of the coordinates.

At the end of the solution, we will rewrite the answer for the general case (keeping the only restriction $ab \neq 0$).

Let $L = \{\ell\}$. Then L consists of several half-open intervals in the unit square $[0, 1)^2$.
Let us collect some information about the points of L lying on the x-axis. These points correspond to the points of ℓ with integer ordinate. Thus their abscissae have the form $\left\{\frac{c}{a} + n\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$, where n is integer. Since $\frac{b}{a}$ is an irreducible fraction, there are exactly a points under consideration, and the set of all these points coincides with the set X of points of the form $\frac{\{c\}}{a} + \frac{k}{a}$ $(k \in \mathbb{Z})$ lying in $[0, 1)$.
Similarly, L contains b points on the y-axis. So the total number ofpoints of L lying on the axes is $a+b-\phi$, where $\phi = 0$ if ℓ does not contain integer points, and $\phi = 1$ otherwise. This number is also the number of intervals in L.
However, some of these intervals may be congruent. Let us investigate how often this may happen. The ideas of **1b** show that there are only the following two opportunities for that.

(i) All the segments connecting two opposite sides of the square are congruent. Since $a \geq b$, all these sides are horizontal.

The number of such segments equals the number of points of X on the segment $\left[0, 1 - \frac{b}{a}\right]$, i. e., this number is $a - b + \phi$.

(ii) Two segments symmetric to each other with respect to the center of the square. Such pair appears as soon as ℓ contains a point with half-integer coordinates, as shown in **3e** further (the referred solution does not implement the rationality of the line).

Therefore, if (ii) does not arise (hence $\phi = 0$), then the total number of tile lengths equals $a + b - (a - b - 1) = 2b + 1$ if $a > b$, and 2 if $a = b (= 1)$.
If (ii) arises, then the total number of segments which are *not* mentioned in (i) is $(a + b - \phi) - (a - b + \phi) = 2(b - \phi)$, and these segments split into pairs of congruent segments. All in all, the number of distinct lengths is $b - \phi + 1$, if there is a segment satisfying the conditions of (i), and $b - \phi$ otherwise, where the last case appears only if $a = b$ and $\phi = 0$; so the answer in this case is b).
Now the answer in the general case can be formulated as follows.

Answer. If a line passes through some integer point, and $|a| \neq |b|$, then the number of tile lengths is $\dfrac{\min(|a|, |b|)}{\gcd(|a|, |b|)}$.
If the line contains a half-integer point but does not contain an integer point, and $|a| \neq |b|$, then the number of tile lengths is $\dfrac{\min(|a|, |b|)}{\gcd(|a|, |b|)} + 1$.
If the line does not contain a half-integer point, and $|a| \neq |b|$, then the required number is $\dfrac{2\min(|a|, |b|)}{\gcd(|a|, |b|)} + 1$.
Finally, if $|a| = |b|$, then the number of the lengths is 2, except for the case when the line contains a half-integer point but not an integer one. In the case, all the tiles are congruent.

Remark 1. The condition that the line $ax + by = c$ passes through a half-integer point is equivalent to the condition of $2c$ being divisible by $\gcd(a, b)$. In turn, this is equivalent to the fact that $2c$ is divisible by $\gcd(a, b)$.

Remark 2. The answer shown above still holds even for the case $ab = 0$.

Problem 2b

We work under the same assumptions as in **2a**. We start with presenting some (possibly, non-minimal) period. Notice that the shift by vector $(-b, a)$ preserves both the line and the grid. This means that the tiling is also preserved; thus $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ is a period. It remains to learn whether it is minimal (and resolve the situation when it is not).
The answer depends again on what happens with the cases appearing in the solution of **2a**. It also depends on whether there exist *short* tiles which are *not* listed in (i) (i.e. the tiles meeting two adjacent sides of a square at points distinct from its vertices). If there are no short tiles (which happens exactly when $a + b - \phi = a - b + \phi$, that is, $b = \phi = 1$), then the period equals the length of the tile, i.e., $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.
Assume now that short tiles exist. If (ii) does not appear, then each short tile arises once on each length d segment. Thus there cannot be a period less than d. Conversely, if (ii) appears, then each short tile appears twice, which yields that the minimal period can be either d or $d/2$, and in the latter case each short tile appears once on each length $d/2$ segment.
Since any two such tiles are symmetric with respect to a semi-integer point, and the semi-integer points occur with some period divisible by $\sqrt{a^2 + b^2}/2$, it follows that the period for semi-integer points has to be equal to $\sqrt{a^2 + b^2}/2$. The latter implies that there exists a unique short tile, that is, we again obtain $b = 1$. Now, as one can see, the period can be shorter only when $a = b = 1$, if c is a semi-integer that is not integer.
It remains to understand when the latter is the case. Note that in this case successive semi-integer points lie on the line ℓ at the distance $\sqrt{a^2 + b^2}/2$. If a short segment exists, then such segments lie exactly in the middle of semi-integer points (otherwise the period cannot equal $d/2$). However, it is not hard to show that another short segment must be adjacent to a short accent. The latter implies that this case is possible only if $|a| = |b| = 1$, and c is a semi-integer which is not integer.

Answer. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\gcd(a,b)}$, except the following cases:

- If $a=b$, c does not divide a, while $2c$ does, then the period is $1/\sqrt{2}$;
- If a is divisible by b and the line passes through a lattice point, then the period is $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Problem 2c

Let us assume that the side lengths A and B are coprime (the other cases are obtained by scaling). We also assume that $B<A$.

Let us "straighten" the ball trajectory in the following way. At each moment when the ball bounces at some side of the table, we reflect the table (and the ball) in the line containing this side. So the ball trajectory becomes a line $y=x$ in the plane with a grid consisting of $A\times B$ rectangles.

Next, apply to our plane the following transform. "shrink" eveything horizontally with ratio $1/A$, and also vertically with coefficient $1/B$ (thus each point (x,y) is mapped to $(x/A, y/B)$). After that, we get the plane with the usual grid of unit squared, and the new line ℓ has the equation $By=Ax$.

This way, each segment between two successive bounces corresponds to a tile on the line ℓ situated between the origin and the next integer point on ℓ (which appears to be (B,A)). There are $A+B-1$ tiles on this segment. Each bounce of the ball corresponds to a common endpoint of two such tiles, so there are $A+B-2$ bounces.

It remains to find the maximal and minimal distances between the bounces. Under our transform, the ratios of lengths of the segments under discussion do not change. Thus it suffices to find the longest and the shortest tile in the tiling of ℓ. The longest tile is, e.g., the leftmost one (when the ball comes from the corner to the opposite side). The shortest distance is $\min(A,B)$ times smaller.

So, in the eneral case we get the following answer.

Answer. The number of bounces is $\dfrac{A+B}{\gcd(A,B)}-2$. The longest distance between two successive bounces is $\sqrt{2}\cdot\min(A,B)$, the shortest one is $\sqrt{2}\cdot\gcd(A,B)$.

The solution for Problem 3 is presented after that for Problem 4.

Problem 4a

We will show that for a given $\varepsilon>0$, there exists a pair of terms of the sequence which are at a distance less than ε from each other. Let the sequence (x_n) be bounded below and above by some numbers a and b, respectively. Choose $n\in\mathbb{N}$ such that $\dfrac{b-a}{n}<\varepsilon$. Divide the interval into n equal parts. By the Pigeonhole Principle, at least two of the terms x_1, x_2, …, x_{n+1} belong to the same part. Thus, the distance between them does not exceed $\dfrac{b-a}{n}<\varepsilon$.

Problem 4b

If $\{k\lambda\}=\{m\lambda\}$ for some $k\neq m$, then the number $(m-k)\lambda$ is integer, hence λ is rational, which cannot be the case. Therefore, the terms in the sequence do not repeat.

Consider an arbitrary interval $[\alpha;\beta]\subseteq[0;1]$. We will prove that it contains a number of the form $\{k\lambda\}$. To do this, using Problem 4a we find the terms $\{k\lambda\}$ and $\{m\lambda\}$ (for some $k>m$) that are at a distance less than $\beta-\alpha$; denote their difference $\mu=\{k\lambda\}-\{m\lambda\}$; then, we have $|\mu|<\beta-\alpha$. Note that the sequence contains a subsequence of numbers of the form

$\{n\mu\} = \{n(k-m)\lambda\}$. The first $[1/\mu]$ terms of this new sequence divide the interval $[0;1]$ into subintervals of length less than $|\mu| < \beta - \alpha$ each. Therefore, the whole interval $[\alpha;\beta]$ cannot be contained in any of those subintervals. Hence, the interval $[\alpha;\beta]$ contains a separating point of the form $\{n\mu\} = \{n(k-m)\lambda\}$.

Problem 4c

A *winding* of a square by a line $ax + by = c$ is defined to be the fractional part of the line $ax + by = c$ (see the notation introduced before **2a**).

Without loss of generality, assume that $ab < 0$. Take an arbitrary interval I that is not parallel to the line ℓ. Project I along ℓ onto the positive rays of the coordinate axes; the projection is either a segment or a union of two segments.
For definiteness, we may assume that the projection contains a segment J of the x-axis. It suffices to show that this segment contains a point of the winding (then, the winding segment passing through this point meets I). The points of the winding that belong to the x-axis are exactly the points of the form $\{\frac{c}{a} + n\left(-\frac{b}{a}\right)\}$. Since $\frac{b}{a}$ is irrational, Dirichlet's lemma implies that one of those points belongs to J. QED

Problem 3

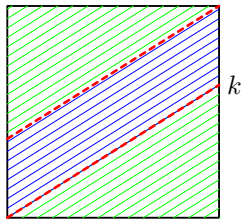
By a *tile of the winding* we mean the fractional part of a tile on the line.

Problem 3a

Answer. Yes.
For example, we can take a line that passes through an integer point A. Then the two tiles containing A are symmetric with respect to this point (moreover, any two tiles symmetric with respect to A have equal lengths). See also the next problem.

Problem 3b

Answer. There always is an infinite amount of tilings of equal length.



Let k be the slope of our line; without lose of generality we have $0 < k < 1$. Consider the winding of $[0,1]^2$ with our line. According to **4c**, there are infinitely many tiles of the winding that pass through the points of the form $(0, y)$, where $0 < y < 1 - k$ (because there are infinitely many segments with empty pairwise intersections that lie inside $(0, k)$). The other endpoints of these tiles have the form $(1, y + k)$. Corresponding tiles with such endpoints have equal lengths.

Problem 3c

Answer. There cannot be exactly three tiles of equal length.
Assume the contrary: there are exactly three tiles of length d. How can they be placed in the winding of the line? There are two cases.

(i) The endpoint of one of these tiles lie on opposite sides of the square. It has been shown in **3b** that there are infinitely many tiles of this length. This is a contradiction.

(ii) Each of the three tiles has endpoints on adjacent sides of the square. There are exactly two length d sections of the square by a line parallel to our one; these sections are symmetrical

to each other with respect to the center of the square. Therefore, at least two of our three tiles of the winding coincide. But this is impossible for an irrational line.

Problem 3d

Answer. There are always infinitely many tiles of pairwise different lengths.
Assume again that the slope k of our line lies in $(0,1)$. Then, according to **4c**, there are infinitely many tiles of the winding with endpoints on the lower side of the unit square. All these tiles have pairwise different lengths.

Problem 3e

Answer. There exist exactly two tiles of equal lengths if and only if the line contains a half-integer point (i.e. a point such that its coordinates are integers divided by 2).
Suppose that the line ℓ passes through a half-integer point $(u/2, v/2)$. If a point (x,y) belongs to ℓ, then the point $(u-x, v-y)$ also lies on ℓ. Therefore, for any tile of the winding of $[0,1]^2$ with ℓ, the segment symmetric to it with respect to the center of the square also lies in the winding with our line (we assume here that the tiles of the winding do not contain their endpoints, i. e. they lie in $(0,1)^2$). So, if the winding contains a tile of length d connecting adjacent sides of the square, then the winding (an hence the line) contains exactly two such tiles.
Conversely, assume that there are exactly two tiles of length d. Due to the solution for **3c**, there are infinitely many tiles which connect opposite sides of the unit square, and all of them are of the same length. So, each of the two tiles connects adjacent sides of the square. These tiles of the winding must be symmetric around the center of the square $[0,1]^2$. This implies that for some $x, y \in [0,1)$ our line contains points (k_1+x, ℓ_1+y) and (k_2-x, ℓ_2-y), where $k_i, \ell_i \in \mathbb{Z}$. Therefore, the midpoint of the segment connecting these points also belongs to our line. It remains to notice that this midpoint has half-integer coordinates $\frac{k_1+k_2}{2}$ and $\frac{\ell_1+\ell_2}{2}$.

Problem 5

Observe that in any open interval containing a there is a subinterval of form $O_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ for some $\varepsilon > 0$. Therefore, we can consider only such intervals. We call such interval a ε-*neighborhood* of a.

Problem 5a

Fix $\varepsilon > 0$. Choose a positive integer N greater than $\frac{1}{\varepsilon}$ (for instance, we can take $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$). For all $n > N$ we have $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon$. This implies that all terms of the sequence, except possibly the first N terms, are contained in $O_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Problem 5b

Suppose that the sequence a_n converges to some a. Take $\varepsilon = \frac{1}{2}$. For all n we have $|a_n - a_{n+1}| = 2$. This yields that no two consecutive terms of the sequence may belong to an interval of length 1. Thus there are infinitely many terms of our sequence outside of $O_{1/2}(a)$, which is a contradiction.

Problem 5c

Take any $\varepsilon > 0$. By definition, there exists a number N such that for all $n > N$ the numbers a_n and b_n belong to $\varepsilon/2$-neighborhoods of a and b, respectively. In other words, $|a_n - a| < \varepsilon/2$ and $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Therefore, $|c_n - (a+b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. So, for the same values of n the number c_n lies in $O_\varepsilon(a+b)$.

Problem 5d

Take any $\varepsilon > 0$. By definition, there exists a number N such that for all $n > N$ the numbers a_n and b_n lie in $O_\varepsilon(a)$, i.e., $a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$. Thus, for the same values of n the number c_n also lies in $O_\varepsilon(a)$.

Problem 6

First of all, we perform the same modifications as in **2c**: we "straighten" the trajectory of the ball into a line and "shrink" the whole plane by $\frac{1}{A}$ horizontally and by $\frac{1}{B}$ vertically. Now we have a plane split into unit squares and a line ℓ determined by the equation $Ax = By$. The line ℓ is irrational, so the only integer point lying on it is $(0, 0)$. The ball moves along ℓ with velocity $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right)$.

Problem 6a

Notice that $\lim_{n\to\infty} \frac{[an]}{n} = a$ by the squeeze lemma (since $a - \frac{1}{n} = \frac{an-1}{n} \leq \frac{[an]}{n} \leq \frac{an}{n} = a$).
The bounce moments correspond to the moments when the ball moving along the line meets the grid lines. During the first T minutes, this ball meets $\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right]$ vertical and $\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ horizontal grid lines. Consequently, the average number of bounces is

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{A\sqrt{2}} + \frac{1}{B\sqrt{2}}.$$

Problem 6b

We will assume that $A < B$, the other case being similar.
After straightening the trajectory, the doublets correspond to the situations when ℓ intersects two opposite sides of some unit grid square. Since the slope of ℓ is less than 1, the line cannot intersect successively two horizontal segments of the grid.
Choose some T. As we have already mentioned, just before each of $\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ "horizontal" meetings there is a "vertical" one. After each of the remaining $D = \left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ "vertical" meetings there is another "vertical" meeting (if the former is not the last one). So, the amount of doublets occurred in T minutes is no bigger than D and no smaller than $D - 1$, i.e. it lies between

$$\frac{T}{A\sqrt{2}} - \frac{T}{B\sqrt{2}} - 2 \qquad \text{and} \qquad \frac{T}{A\sqrt{2}} - \frac{T}{B\sqrt{2}} + 1.$$

By the squeeze lemma, the frequency of doublets is $\left|\frac{1}{B\sqrt{2}} - \frac{1}{A\sqrt{2}}\right|$ (this formula works in the case $A > B$ as well).

Remark. One can also solve this problem using Weyl's theorem. Take a look at problem 8 for similar solutions.

Problem 7a

Recall that the *ceiling* $\lceil x \rceil$ of a real number x is the smallest integer greater than or equal to x.
Take a positive irrational number $\lambda < \frac{1}{2}$. Now we pick terms of our sequence $\{a + n\lambda\}$ until they "pass around" the segment $[0, 1]$, i.e. until $n\lambda$ exceeds 1. The number N of terms we have taken this way is equal to $\lceil 1/\lambda \rceil$, i.e. λ is between $\frac{1}{N}$ and $\frac{1}{N-1}$.
Now we will prove that if we take λ small enough (and N, therefore, is going to be big), then the statement of the problem holds true.
Let S be the set of first N terms of our sequence and let k be the number of elements of S which lie in I. The frequency of hits, which is $\frac{k}{N}$, can be estimated in terms of λ: since $\frac{1}{N} < \lambda < \frac{1}{N-1}$, we have $(k-1)\lambda < \frac{k-1}{N-1} \leqslant \frac{k}{N} < k\lambda$.
Moreover, the length $|I|$ can also be estimated in terms of λ. The set S determents a partition of segment [0,1] (elements of S are endpoints of segments of the partition). Each segment of the partition is no longer than λ, and $k + 1$ of these segments cover the segment I. Therefore, $|I| < (k+1)\lambda$. No more than three segments of the partition could be shorter than λ: namely, the

two boardering segments and the one that starts at $\{a+N\lambda\}$. These observations imply that I contains at least $k-2$ segments of length λ, so $|I|¿(k-2)\lambda$. To sum up, $(k-2)\lambda < |I| < (k+1)\lambda$. Comparing the estimates we have made for the frequency $\frac{k}{N}$ and for the length $|I|$, we conclude that they differ by no more than 2λ.
Finally, if we choose $\lambda < \varepsilon/2$ and $N=\lceil 1/\lambda \rceil$, then the problem requirements are satisfied.

To solve problems 7b–7d, we will use the following lemma, which can be proved by a direct computation.

LEMMA 1. Let A be the frequency of hits of a sequence $a_1, \ldots, a_k$ in a segment I, let B be the frequency of hits of a sequence $b_1, \ldots, b_m$ in the same segment, and let C be the frequency of hits of the sequence $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m$ in the same segment. Then C is equal to the *weighted avarage* $\dfrac{kA+mB}{k+m}$.

COROLLARY 1. Let A be as defined in Lemma 1. Assume that it differs from the length $|I|$ by less than ε, and that B differs from $|I|$ by less than δ. Then C differs from $|I|$ by less than the weighted avarage $\dfrac{k\varepsilon+m\delta}{k+m}$ of these errors.

REMARK 1. If we know that the first error ε is very small (say, 0.001), and the weight m of the second error is significantly smaller than the weight k of the first one (say, 1000 times), then the weighted avarage error $\frac{k\varepsilon+m\delta}{k+m}$ is also very small, even if the second error δ is not very small (for $\delta < 1$ the weighted avarage is less than 0.002).

PROBLEM 7B

In problem **a** we saw that if we take N and λ such that $\frac{1}{N} < \lambda < \frac{1}{N-1}$, then the frequency of hits of the sequence $\{a+\lambda\}$, $\{a+2\lambda\}$, $\{a+3\lambda\}, \ldots, \{a+N\lambda\}$ in the segment I differs from the length $|I|$ by less then 2λ.
Let us show that a similar estimate can be made for the frequency of hits of the sequence $\{a+\lambda\}$, $\{a+2\lambda\}$, $\{a+3\lambda\}, \ldots, \{a+M\lambda\}$ in I when M is large enough. Divide this sequence into subsequences of length N and a "remainder" of length $r < N$:

$$\{a+\lambda\},\ \{a+2\lambda\},\ \{a+3\lambda\}, \ldots, \{a+N\lambda\}$$

$$\{a+(N+1)\lambda\},\ \{a+(N+2)\lambda\},\ \{a+(N+3)\lambda\}, \ldots, \{a+2N\lambda\}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\{a+(pN+1)\lambda\},\ \{a+2\lambda\},\ \{a+3\lambda\}, \ldots, \{a+(pN+r)\lambda\}$$

In fact, we divide M by N with remainder: $M = pN + r$.
According to problem **a**, the frequency of hits of each of the first p subsequences in I differs from the length of the segment by less than 2λ. The frequency of hits of the"remainder" cannot be estimated better than that it is between 0 and 1, so it differs from $|I|$ by less than 1. Therefore, we can apply Corollary 1 to get that $|I|$ differs from the frequency of hits of $\{a+\lambda\}$, $\{a+2\lambda\}$, $\{a+3\lambda\}, \ldots, \{a+M\lambda\}$ in the segment by less than $\dfrac{Np\cdot 2\lambda + r\delta}{Np+r}$, which is less than $2\lambda + \frac{1}{\lambda M}$. For big enough M (greater than $1/\lambda^2$) this number is less that 3λ.
So to conclude, for all big M (greater than $1/\lambda^2$), the difference between $|I|$ and the frequency of hits of $\{a+\lambda\}$, $\{a+2\lambda\}$, $\{a+3\lambda\}, \ldots, \{a+M\lambda\}$ is less than 3λ.
In particular, if we take $\lambda < \varepsilon/3$, then for all $M > 1/\lambda^2$ the freqeuncy of hits is different from the length of the segment by less than ε.

PROBLEM 7C

Applying the Dirichlet Lemma to the segment $[0,\delta]$ and the sequence $\{n\lambda\}$, we find some q such that $\{q\lambda\}<\delta$. Set $\mu=\{q\lambda\}$. Observe that the Weyl progression $\{a\},\{a+\lambda\},\{a+2\lambda\},\dots$ splits into alternating Weyl progressions with difference μ and first terms a, $a+\lambda$, $a+2\lambda,\dots,a+(q-1)\lambda$. Indeed, we just divide n by q with remainder: $n=mq+r$, so $\{a+n\lambda\}=\{(a+r\lambda)+m\mu\}$.

Problem 7d

Pick some number $\delta>0$. According to problem **c**, we can (and will) split our Weyl progression $\{a\},\{a+\lambda\},\{a+2\lambda\},\dots$ into q progressions with difference $\mu<\delta$. Let $P_1,P_2,\dots,P_q$ denote these progressions, and let P denote the initial progression.
According to problem **b**, if we choose more than $1/\mu^2$ first terms of P_i , then their frequency of hits in I differs from $|I|$ by less than 3μ.
According to Corollary 1, if we pick more than q/μ^2+q first terms of P, than their frequency of hits in I also differs from $|I|$ by less then 3μ, since this set of $>q/\mu^2+q$ first terms of P splits into sets of $>1/\mu^2$ first terms of $P_1,\dots,P_q$.
We now need to take a value of δ such that 3μ is greater than ε. To achieve it, we can take $\delta=\varepsilon/3$. Then for more than q/μ^2 first terms of progression P the frequency of hits in I differs from the length $|I|$ by less than $3\mu<3\delta<\varepsilon$.

Problem 8

Let A and B be plane figures. Recall that $A\cup B$ and $A\cap B$ stand for the union and the intersection of A and B, respectively.

Problem 8a

Consider an irrational line ℓ defined by $ax+by=c$. For every $T>0$, by S_T we denote the length T segment of ℓ with left endpoint at $(0,\frac{c}{b})$. Let $I\subset[0,1]^2$ be a segment that is not parallel to ℓ.

Definition. The *frequency of intersections* of the segment I with the winding of $[0,1]^2$ corresponding to the line ℓ is the limit

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\#(\{S_T\}\cap I)}{T}.$$

Problem 8bc

Assume first that the segment I is contained in the segment $[0,1]$ of the y-axis. Then, the intersection points of the winding and the segment $[0,1]$ of the y-axis generate the Weyl's sequence $u_n=\left\{\frac{c}{b}+n\left(-\frac{a}{b}\right)\right\}$. By definition, what we have to compute is the frequency of its elements that are contained in I.
Warning!!! Before using Weyl's theorem (see Problem 7), note that while we travel with unit speed along the line $ax+by=c$, we meet a vertical line of the grid every $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$ minutes (nothing but the length of a line segment between two neighboring vertical lines of the grid). Therefore, it takes $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$ minutes to obtain each new element of the sequence (u_n).
Thus, Weyl's theorem and the observation above together imply that the sought frequency of intersections for I equals $\dfrac{|I||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. A similar argument works for I contained in the segment $[0,1]$ of the x-axis and yields the answer $\dfrac{|I||a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Now, let I be an arbitrary segment in $[0,1]^2$. If $ab<0$, then project I along ℓ onto the lower left angle of the square. Otherwise, project I onto the upper left angle. This projection in general is a union of a vertical segment I_V and a horizontal segment I_H contained in the corresponding edges of the square. One can easily show that the following statement is true:

Let τ be a tile such that $\{\tau\} \not\ni (0,0)$. Then, the fractional part $\{\tau\}$ meets I if and only if it meets exactly one of the segments I_V and I_H.
Note that for each value of T, a length T segment of the line $ax+by=c$ contains no more than one tile such that $\{\tau\} \ni (0,0)$. Therefore, for every $T>0$ we have:

$$0 \leqslant \#(\{S_T\} \cap I_V) + \#(\{S_T\} \cap I_H) - \#(\{S_T\} \cap (I_V \cup I_H)) \leqslant 1.$$

Let us consider the largest $T_0 < T$ such that the right endpoint of S_{T_0} is contained in a vertical or a horizontal line of the grid. It is obvious that

$$0 \leqslant \#(\{S_{T_0}\} \cap (I_V \cup I_H)) - \#(\{S_T\} \cap I) \leqslant 1.$$

Thus, as T approaches infinity, we have

$$\frac{\#(\{S_T\} \cap I) - \#(\{S_{T_0}\} \cap I_V) - \#(\{S_{T_0}\} \cap I_H)}{T} \to 0.$$

Hence, the answer to Problem 8c is $\dfrac{|I_H||a| + |I_V||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
A straightforward computation implies that, for an arbitrary vertical/horizontal segment $I \subset [0,1]^2$, the frequency of intersections is the same as for its copy contained in the corresponding edge of the square, which yields the answer to Problem 8b. That is, $\dfrac{|I||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ for I being vertical and $\dfrac{|I||a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ for I being horizontal.

Problem 9a

This problem is a special case of Problem 8c. Indeed, choose I to be the diagonal of the square $[0,1]^2$ that intersects all the fractional parts of the tiles contained in the line $ax+by=0$. Then, for each tile τ contained in the line segment of length T, its fractional part $\{\tau\}$ meets I. Therefore, since, for every $T>0$ the difference between the number of points in $\{S(T)\} \cap I$ and the number of tiles on $S(T)$ does not exceed 1, the sought limit coincides with the frequency of intersections of the winding with the interval I, and we can use Problem 8c to compute it. Thus, the sought density equals $\dfrac{|a|+|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, since in this case $|I_V| = |I_H| = 1$.

Problem 9b

Note that the numerator in the formula for the tile density coincides with the denominator in the formula for the average length of tiles. Moreover, the difference between the numerator in the latter and T does not exceed $\sqrt{2}$, which is the greatest possible length of a tile. Obviously, as T approaches infinity, so does the number $N(T)$ of tiles on a line segment of length T, so, we have the equality $\lim_{T\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{N(T)} = 0$. Thus, the sought limit is the multiplicative inverse of the limit in Problem 9a, hence the answer is $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|+|b|}$.

Problem 9c

This problem is yet another special case of Problem 8c with I being the diagonal different from the one considered in Problem 9a. Indeed, this diagonal is also a diagonal of the parallelogram $P \subset [0,1]^2$ containing the fractional parts of the maximum length tiles. This observation implies that, for a tile τ, its fractional part $\{\tau\}$ meets I if and only if τ is of the maximum length. Hence, to obtain the answer, it remains to use Problem 8c: if $\left|\dfrac{b}{a}\right| > 1$, then the projection of I along the line $ax+by=0$ is a vertical segment of length $\dfrac{|b|-|a|}{|b|}$. Hence, by Problem 8c, the

sought frequency equals $\dfrac{|b|-|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. The case with $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$ can be considered analogically: the projection of I along the line is a horizontal segment of length $\dfrac{|a|-|b|}{|a|}$, thus, by Problem 8c, the frequency of intersections is equal to $\dfrac{|a|-|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. So, the total answer is $\dfrac{\big||b|-|a|\big|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Problem 10a

A plane α in the 3-dimensional space is divided into pieces (*tiles*) by the faces of the standard 3-dimensional grid. This yields a *tiling* of α.

Problem 10b

Since a cube contains only 6 facets, a tile can have no more than 6 sides (thus, no more than 6 angles). As an example, take the cross section of the cube $[0,1]^3$ by the plane $x+y+z=\frac{3}{2}$.

Problem 10c

The argument is similar to the one for Problem 2a and yields the following answer. Suppose that we have $|A| \leqslant |B| \leqslant |C|$. If $|A|+|B| \geqslant |C|$, then the sought number is equal to $\left[\dfrac{|A|+|B|+|C|}{2}\right]$. Otherwise, it equals $|A|+|B|$.

Problem 10d

Obviously, the origin O belongs to any plane α defined by an equation of the form $Ax+By+Cz=0$. If α contains no other lattice points, then the first statement is the case.
Otherwise, take $P=(p_1,p_2,p_3) \in \alpha$ – an arbitrary lattice point such that $P \neq O$ and consider the line ℓ spanned by the vector $\overrightarrow{OP}$. Each of the points in ℓ is of the form $\lambda P = (\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3)$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$. For any $\lambda \in \mathbb{R}$ we have:

$$A\lambda p_1 + B\lambda p_2 + C\lambda p_3 = \lambda(Ap_1+Bp_2+Cp_3) = 0.$$

Hence, ℓ is contained in α.
Take $d=\gcd(p_1,p_2,p_3)$ and consider the lattice point $P_0=\frac{1}{d}P$. We shall prove that, for any lattice point $Q \in \ell$, we have $Q=kP_0$ for some $k \in Z$.
Take an arbitrary lattice point $Q \in \ell$. Then, we have $Q=\lambda P_0$, where $\lambda \in \mathbb{Q}$. Represent λ as an irreducible fraction $\lambda=\frac{k}{m}$ and assume that $m \neq 1$. On the other hand, it easily follows that the coordinates of P_0 are all divisible by m, while, by definition of P_0, their gcd equals 1. Thus, we have $m=1$. Therefore, if the plane α contains no other lattice points, then, the second statement is the case.
Otherwise, let $N=(n_1,n_2,n_3) \in \alpha$ be a lattice point that is not contained in ℓ. Substituting the coordinates of N and P into the equation $Ax+By+Cz=0$, we obtain a linear system of two equations in the variables A,B,C with integer coefficients. Let $p_1=\lambda n_1$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, then, consider the point $P-\lambda N=(0,p_2-\lambda n_2, p_3-\lambda n_3) \in \alpha$ with at least one nonzero coordinate. Substituting it into the equation $Ax+By+Cz=0$, we obtain that $B=\mu C$ for some rational μ. Thus, from the equation $Ap_1+\mu C p_2+Cp_3=0$, we get $A=\nu C$ for some $\nu \in \mathbb{Q}$. Thus, the system has a rational solution, hence, the third condition is the case.

Dynamics of Tilings

PROBLEM 10EF

Problem **4c** for any non-rational plane. Let A be a figure in the space. We say that the *fractional part* $\{A\}$ of the figure A is the set of all points of the form $(\{x\},\{y\},\{z\})$, where (x,y,z) lies in A.
The *winding* of the cube $[0,1)^3$ with a plane L is the fractional part of L.
A *tile* of the winding is the fractional part of any tile in the plane L. As in the lower-dimensional case, the tiles of the winding are the sections of the cube by the planes parallel to L. Moreover, in the case of an irrational plane the tiles of the winding are in one-to-one correspondence with the tiles on the plane.

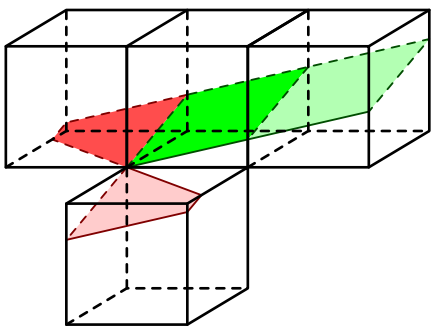
PROPOSITION. The winding with any irrational or semirational plane meets any segment in the cube $[0,1)^3$ which is not parallel to the plane. Moreover, there are infinitely many such meeting points.

Proof. Due to a permutation of the coordinates, we may assume that the plane is not parallel to the z-axis, so it is determined by an equation of the form $z=\mu x+\lambda y$. At least one of μ and λ (say, λ) is irrational, otherwise the plane would be rational.
Suppose first that the given segment I is vertical, so it is the subset of a vertical line V (given by $x=x_0$, $y=y_0$) determined by the conditions $p<z<q$. The points of the plane whose fractional parts lie on V have the form $(x,y,\mu x+\lambda y)=\big(x_0+k,y_0+m,\mu(x_0+k)+\lambda(y_0+m)\big)$ for some integer k and m. Therefore, the points of V lying in the winding are exactly those having z-coordinates of the form $z=\{(\mu x_0+\lambda y_0)+k\mu+m\lambda\}$. Fix an arbitrary k; then the Dirichlet lemma guarantees that this number lies in (p,q) for some integer m.
In the general case, when I has an arbitrary direction, it still contains some subsegment which can be projected along the plane onto some vertical segment J in the cube. Since J meets the winding, this subsegment also does.
Finally, since each segment I contains infinitely many non-overlapping subsegments each of which meets the winding, there are infinitely many meeting points of I with the winding. □

Problem **3** for non-rational planes. Firstly, we will formulate and prove all subproblems for an irrational plane; then we will make two easy observations which allow to solve all these problems for the semirational case.

Problem **3a** for a non-rational plane: Can there be two congruent tiles?

Answer: Yes.
E.g., consider an irrational (or semirational) plane $z=\mu x+\lambda y$ with positive coefficients $\mu<\frac14$ and $\lambda<\frac13$. The intersections of this plane with the cube $[0,1)^3$ and with its shift by 1 to the right are two congruent parallelograms. Also, together with every tile, this plane contains its congruent copy obtained by the reflection with respect to the origin.



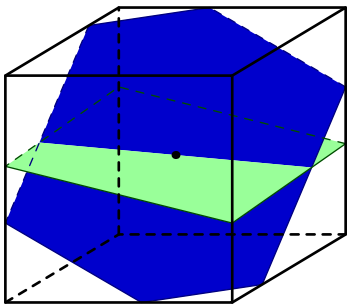
Problem **3b** for an irrational plane: can there be or not be infinitely many pairwise congruent tiles?

Answer is different from the one-dimensional case: both options are now possible. An irrational plane may happen to contain infinitely many congruent tiles, and may fail to contain such.

To construct both examples, we notice that the directions of a planes intersecting the cube can be of one of the two types described in the following lemma.

LEMMA 1. Assume that a plane L contains the center of the cube and does not contain any of its vertices; the plane L partitions the set of vertices of the cube into two 4-tuples. Each of these 4-tuples forms **either** the set of vertices of some facet (in this case we say that L is a *4-plane*, and its direction is a *4-direction*), **or** the set of a vertex and three its neighbors (then we say that L is a *6-plane*, and its direction is a *6-direction*).

We assigned such names because the section of the cube by L is a centrally symmetrical quadrilateral in the former case, and a centrally symmetrical quadrilateral in the latter one.



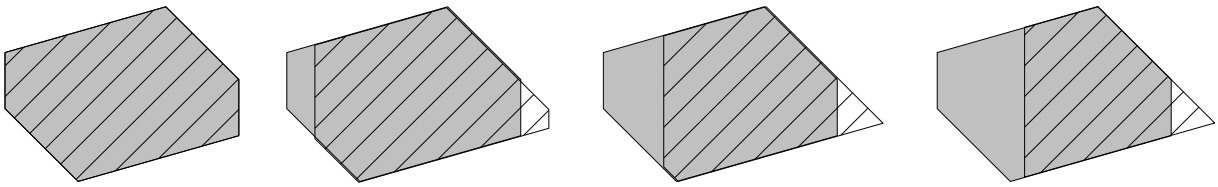
Proof. Any 4-tuple of vertices of the cube lying on one side of L cannot contain two opposite vertices of the cube. There are only three types of the 4-tuples satisfying this condition: the two mentioned in the Lemma formulation, along with a "chess-like" tuple containing no adjacent vertices. But the "chess-like" 4-tuple also cannot lie on one side of L, since the center of the cube lies inside the tetrahedron $ABCD$. □

Notice that both types actually exist. An example of a 4-plane is presented above in **3a**, and the perpendicular bisector of the diagonal of the cube is an example of a 6-plane. In general, a plane $Ax+By+Cz=0$ has a 6-direction (with respect to the cube $[0,1]^3$) if the maximum of $|A|$, $|B|$, and $|C|$ does not exceed the sum of the two other numbers, and it has a 4-direction otherwise.

Now, to solve the planar analogue of **3b**, consider first a non-rational 4-plane L containing the center of the cube $[0,1]^3$. By **4c**, the winding with L meets at infinitely many points each small segment perpendicular to L and passing through the center. If this segment is short enough, each meeting point belongs to a tile which is close enough to the section of the cube by L, and each such tile is a parallelogram congruent to this central section.
Conversely, each irrational 6-plane L cannot contain more than two congruent tiles. This follows from the following fact.

LEMMA 2. Any two nonempty sections of the cube $[0,1]^3$ by planes having a given 6-direction have different areas (and thus are incongruent), unless they are symmetric to each other with respect to the center of the cube.

Proof. In fact, we will prove a bit more. Let us draw a 6-plane L, and then shift it continuously increasing the distance to the center. Then the area of the section of the cube will strictly decrease until it vanishes.
To prove this monotonicity, we switch to a different reference system. Instead of shifting the plane, let us shift the cube along the z-axis at distance h and check what happens with its section S_h by the fixed plane L. As h increases, we observe the following phases:



In each figure above, the solid polygon is the initial section S_0, while the hatched one shows a section S_h (the values of h increase from the left to the right). Any hexagonal section S_h is obtained from S_0 by removing of a trapezoid and pasting another one. The altitudes of the trapezoids are equal, and the small base of the removed trapezoid is congruent to the large base of the pasted one. Thus the area of S_h is smaller than that of S_0. Moreover, as h increases, the altitudes of the trapezoids also increase, thus so does the difference of their areas. Therefore, S_h decreases for such values of h.
Next, after the section abandons being a hexagon, for any $h > g$ the section S_h merely lies in S_g, so it has smaller area. □

Remark. The arguments from the proofs of the two lemmas above are quite helpful to complete the solution of **10c**.

Problem **3c** for an irrational plane: can there be or not be three congruent tiles incongruent to all the other ones?

Answer: There cannot be such tiles on an irrational plane.

Indeed, by Lemma 2, the winding with any 6-plane contains at most two congruent copies of any tile (including the tile itself).
Similarly, one may prove the analogue of Lemma 2 for a 4-plane: Any two nonempty sections of the cube $[0, 1]^3$ by planes having a given 4-direction have different areas (and thus are incongruent), unless they either are symmetric to each other with respect to the center of the cube, or are both congruent to the central section of the cube by the plane of our direction.
This statement shows that the winding with any 4-plane contains infinitely many tiles congruent to the central one, and at most two congruent copies of any other tile.

Problem **3d** for an irrational plane: Can there be or not be infinitely many pairwise incongruent tiles?

Answer: There always are infinitely many pairwise incongruent tiles on any irrational plane.

Indeed, according to **4c**, the winding with our plane meets infinitely many times any sufficiently small segment perpendicular to the plane and starting at a vertex of the cube towards the cube. Each such meeting point belongs to a triangular tile, all these tiles are similar to each other with ratios different from 1.

Problems **3a-d** for semirational plane: By definition, a semirational plane maps to itself under some shift T by a nonzero integer vector. Thus each tile on such plane is congruent to infinitely many tiles obtained from it by iterative application of T.
Due to this property, a semirational plane is close to rational ones in some aspects. On the other hand, it differs from rational planes because the problem **4c** is still applicable. Thus the solutions based on an application of **4c** work for semirational planes as well.
These two observations yield the following answers in the semirational case: (**a**) they can (and should); (**b**) there always are such tiles; (**c**) there cannot be such tiles; (**d**) there always are such tiles.

Problem **3e** for a non-rational plane: Describe in geometrical terms all the planes (not necessarily containing 0) which contain two congruent tiles which are incongruent to all other tiles.

Answer: These are all irrational planes containing a point with half-integer coordinates.

Indeed, semirational and rational planes do not fit since they contain infinitely many congruent copies of each tile. On the other hand, if an irrational plane contains exactly two congruent copies of some tile, then these copies are centrally symmetric to each other (recall Lemma 2 for 6-planes and its duplicate for 4-planes which has been mentioned in the analogue of **3c**). Now, as in a similar one-dimensional problem, one can easily see that the center of symmetry has half-integer coordinates.

Problem 11a

We will state and prove the following *two-dimensional Weyl's lemma*. Assume that at least one of the numbers λ and μ is irrational. Denote by W_N the tuple of the numbers $\{b+k\mu+n\lambda\}$ for all positive integer k and n that do not exceed N. This tuple consists of N^2 elements (some of them may occur more than once). Then, the frequency of hits of the tuple W_N in the segment I tends to the length of the segment $|I|$ as $N \to \infty$.

Without loss of generality, we may assume that λ is irrational. Note that in the solution of Problem **7d** we proved a slightly stronger result: for any irrational λ and positive ε there exists N_0 satisfying the following condition. For any a, if we take $N > N_0$ initial terms of the Weyl's sequence $\{a+n\lambda\}$, then the difference between their frequency of hits in I and the length $|I|$ will be less than ε. The strength of this statement consists in the fact that the same number N_0 is suitable for any a.

For every $N > N_0$, the tuple W_N is split into the initial length N segments of the Weyl's progressions with the difference λ starting from terms of the form $b+k\mu$. For each of those initial segments, the frequency of hits in I differs from $|I|$ by less than ε. Therefore, Corollary 1 implies that the same holds for the frequency of hits in I of the entire tuple W_N.

Remark. In fact, one can prove a more general fact. On a plane with coordinates (k,n), choose an arbitrary convex polygon P. By P_N denote its image under the homothety with ratio N. Then, we can define "the initial segment" W_N of the two-parameter sequence $\{b+k\mu+n\lambda\}$ to be the set of the terms with (k,n) contained in P_N. For instance, if we set $P=[0,1]^2$, then the "initial segment" W_N will be exactly the same as the one defined in the solution above. It turns out that no matter which convex polygon P we take, the frequency of hits of the tuple W_N in the segment I tends to $|I|$ as $N \to \infty$. We encourage the reader to try to show it.

Problem 11b

Since the plane $Ax+By+Cz=0$ is irrational, it does not contain the vertical axis, therefore, we have $C \neq 0$. Then, the set of all the points (x,y,z) on this plane such that x and y belong to the interval $[0,N]$ is a parallelogram, which we will denote P_N.

We will formulate and prove the following analog of Problem 8. Choose a segment I in the cube $[0,1]^3$. By a,b,c denote the differences of the coordinates of its endpoints. Then, we have the following equalities:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{the number of intersection points of } \{P_N\} \text{ with the segment } I}{\text{the area of } P_N} = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \text{the length of the orthogonal projection of the segment } I \text{ onto the line orthogonal to the plane.} \qquad (*)$$

The second equality here is obvious. Indeed, the vector v with coordinates (A,B,C) is orthogonal to the plane. Denote the angle between v and the vector I by α. We obtain that the middle part of $(*)$ equals $\dfrac{|v\cdot I|}{|v|} = \dfrac{|v||I|\cos\alpha}{|v|} = |I|\cos\alpha$, that is, the length of orthogonal projection of I onto a line parallel to v.

To prove the first equality in $(*)$, we will need the following observations.

Firstly, note that the statement holds for vertical segment. Indeed, since $C \neq 0$, we can rewrite the equation of the plane as $z=\lambda x+\mu y$, and at least one of the coefficients λ and μ is irrational

(otherwise, the plane is rational). Then, for the segment I defined by $x = x_0$, $y = y_0$ and $p < z < q$, the statement is exactly the two-dimensional Weyl's theorem for the progression $\{(\lambda x_0 + \mu y_0) + \lambda k + \mu n\}$ and the segment $[p, q]$.
We should not forget that in Weyl's theorem, the denominator of the fraction under the limit is the number of pairs (k, n) in the square $[1, N]^2$, while the one in the sought limit equals the area of the parallelogram P_N. Hence, we should divide the answer given by Weyl's theorem by the quotient of the number of pairs N^2 and the area of P_N. Obviously, the latter does not depend on N, thus, it equals the area of P_1, that is, $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}$. Thus, we have proved $(*)$ for I being vertical.

Secondly, note that if segments QR and ST in the cube $[0, 1]^3$ are parallel to the plane $Ax + By + Cz = 0$, then the equality $(*)$ for the segment QS is equivalent to $(*)$ for RT. Indeed, the left-hand sides of those equalities coincide, since any plane parallel to $Ax + By + Cz = 0$ meets or does not meet both QS and RT simultaneously. The right-hand sides of the equalities coincide, since they are both equal to the lengths of the orthogonal projections of QS and RT on the line orthogonal to $Ax + By + Cz = 0$, and those projections coincide.

Thirdly, note that if an arbitrary segment I is divided into several parts, then the equality $(*)$ for I follows from the equalities $(*)$ for its parts (namely, it will be the sum of those equalities). We will call two segments QS and RT *analogous*, if the segments QR and ST are parallel to the plane $Ax + By + Cz = 0$. Note that an arbitrary segment I in $[0, 1]^3$ can be split into parts analogous to vertical segments (for instance, the planes parallel to the given one which are drawn through each the vertices of the cube divide I in a proper way). According to the remarks above, the equality $(*)$ holds for vertical segments. Therefore, it holds for the parts of I which are analogous to them, and thus, it holds for the entire segment I.
Remark. Had we chosen at the beginning another coordinate to be vertical, the parallelogram P_N employed in $(*)$ would be a different one. However, the left-hand side of the equality $(*)$ would not change, since it equals the right-hand side, which does not depend on the choice of P_N. In fact, the left-hand side of $(*)$ will not change even if we replace the family of parallelograms P_N by the homothetic images of an arbitrary convex polygon. We encourage the reader to try to prove it using the remark in the solution of the previous problem.

Problem 11c

We define the density of tiles on an irrational plane $Ax + By + Cz = 0$ to be the limit of the fraction

$$\frac{\text{number of tiles contained in } P_N}{\text{the area of } P_N},$$

where P_N is a parallelogram defined in the solution of the previous problem.
For the sake of convenience, assume first that A, B and C are positive. Then, the number of tiles contained in P_N equals the number of the intersection points of its fractional part $\{P_N\}$ with the cube diagonal connecting the vertices $(0, 0, 0)$ and $(1, 1, 1)$. Applying the result of the previous problem to this diagonal, we obtain that the sought density equals

$$\frac{A + B + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

To obtain the general answer, one should replace the numerator by $|A| + |B| + |C|$.

Problem 11d

In analogy with the derivation of Problem **9b** from **9a**, we obtain that the answer is the multiplicative inverse of the answer to the previous problem.

Problem 11e

We define the density of triangular tiles on an irrational plane $Ax + By + Cz = 0$ to be the limit of the fraction

$$\frac{\text{the number of triangular tiles inside } P_N}{\text{the area of } P_N}.$$

Assume that A, B and C are positive. For every vertex of the cube, draw a plane passing through it and parallel to $Ax + By + Cz = 0$. Those planes divide the diagonal connecting the vertices $(0, 0, 0)$ and $(1, 1, 1)$ into segments, by I and J we denote the marginal ones. They are of the same length, and the ratio of this length to the length of the diagonal equals $\min(A, B, C)/(A+B+C)$. Note that the plane $Ax + By + Cz = D$ intersects the cube $[0, 1]^3$ by a triangle if and only if it meets one of the segments I or J, therefore, the ratio of the sought density of triangular tiles to the known density of all the tiles is $2\min(A, B, C)/(A + B + C)$.
So, in the general case the answer is

$$\frac{2\min(|A|, |B|, |C|)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Problem 11f

The sought probability equals the quotient of the densities of the triangular tiles and all the tiles, that is,

$$\frac{2\min(|A|, |B|, |C|)}{|A| + |B| + |C|}.$$

Problem 11g

Through every vertex of the cube $[0, 1]^3$, draw a plane parallel to the given one. These planes divide the cube into several parts, and two of the parts are tetrahedra congruent to each other.
It follows from the solution of Problem **17** that the answer equals to the sum of the volumes of those two tetrahedra, that is, $\dfrac{|ABC|}{3\max(|A|, |B|, |C|)^3}$.

Polyhedra

Let P and Q be polyhedra expressed as a union of (closed) convex polygons $C_1, C_2, \ldots$ and $D_1, D_2, \ldots$, respectively.

Problem 12a

The union of P and Q can be expressed as the union of the polygons $C_1, C_2, \ldots, D_1, D_2, \ldots$, and the intersection of P and Q can be expressed as the union of all pairwise intersections $C_i \cap D_j$, that are (closed) convex polytopes.
With each of its points x, a component of P contains all the polygons C_i such that $x \in C_i$. Therefore, each of the components of P is the union of some of the polygons $C_1, C_2, \ldots$.

Problem 12b

The complement to each of the convex polygons C_i is a polyhedron, that we will denote by $\overline{C_i}$. Indeed, if the polygon is defined an the intersection of several half-planes, then the complement to it is the union of the complements to those half-planes. Thus, the complement to a polyhedron P is the intersection of the $\overline{C_i}$, which is itself a polyhedron, as it follows from the previous problem.

Problem 12c

Let P and Q be polyhedra having p and q components, respectively. Then, their union can have any number of components from 1 to $p + q$, but not more. Indeed, the number of components does not exceed $p + q$, because each component of the union of P and Q contains a component of P or Q.

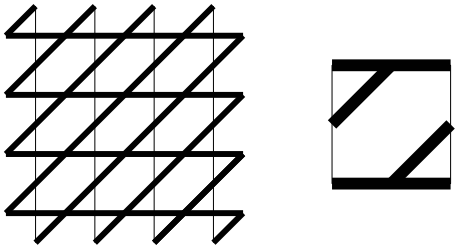
We shall construct the examples for the maximal and the minimal possible number of components. For the rest of cases, the examples can be constructed in a similar way. Define P to be the set $[0;1] \cup \{2, 3, \ldots, p\}$. The set Q_1 consists of q points $\{p+1, p+2, \ldots, p+q\}$ and its union with P has $p+q$ components, while the union of $Q_2 = [1;p] \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{q}\}$ with P is connected.
At the same time, one can easily construct examples showing that the intersection of P and Q and the complement to P may have any number of components for any p and q. For instance, take P being a union of one horizontal and N vertical lines, and Q being an inclined line, then, the intersection $P \cap Q$ and the complement to P have a lot of components (more than N and $2N$, respectively), while P and Q are both connected.

Problem 13a

No. By definition, a periodic set is the union of all possible shifts of its fundamental domain by vertical and horizontal vectors of integer length.

Problem 13b

Yes. Consider the following example:



Problem 14

To solve Problem 14a, note that for a triangle the notion "inside" can already be defined: a triangle is a convex polygon and thus the intersection of closed half-planes S_1, S_2, S_3. By this definition, the internal points are just those contained in the intersection of the half-planes S_1, S_2, S_3 without boundaries. Also, by this definition, a segment connecting an internal point with an external one meets the boundary of one of the half-planes, and thus meets one of the edges of the triangle.

Problem 14a

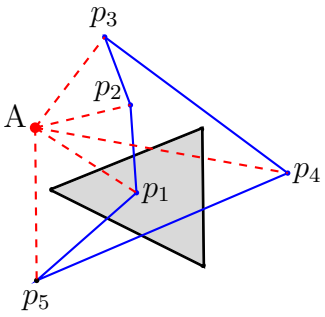
Consider one of the triangles as a convex polygon, and the other — as a closed polygonal chain. The remark above implies that this polygonal chain enters inside of the first triangle the same number of times as it leaves it, therefore, the number of times the polygonal chain meets the boundary of the triangle is even.

Problem 14b

Choose a point A and connect it by segments with each vertex of the given polygonal chain. Obviously, one can choose A such that none of those segments contains any of the vertices of the triangle T, and any two of those segments are not contained in the same line. Then, the edges of the polygonal chain are the bases of some triangles $T_1, \ldots, T_n$ with the common apex at A, and none of the triangles T_i contains the vertices of T. Thus, Problem 14a implies that the number of the intersection points of the triangle T with each of the triangles T_i is even, and the sought number of the intersection points differs from it by an even number (namely, by twice the number of times the triangle T meets the segments connecting A with the vertices of the chain).

Problem 14c

In analogy with Problem 14b, replace the first polygonal chain by a tuple of triangles. By Problem 14b, the number of the intersection points of the second polygonal chain with each of those triangles is even.



In the figure on the left-hand side, the edges p_1, p_2,..., p_5 of polygonal chain are the bases of the triangles p_1Ap_2, p_2Ap_3, p_3Ap_4, p_4Ap_5 p_5Ap_1 with the common vertex at the new point A. One can see that each of the segments p_iA occurs exactly twice.

Problem 15a

Denote the new edge by EF. This edge is contained in some component C of the complement to the graph A. We will denote by A' the union of the graph A with the edge EF and will analyze the relation between the components of the complement to A with the ones to A'.
Let x and y be points contained in the same component of the complement to A, that is, connected by a polygonal chain P avoiding the graph A. If P meets EF, then both x and y belong to the component C, otherwise, x and y belong to the same component of the complement to the graph A'. Hence all the components of the complement to A, except C, are also the components of the complement to A'.
In order to compute the number of components of the complement to A' that are contained in C, on both sides of the edge EF we shall construct the triangles EFS and EFT that have no common points with A besides E and F.
Let us prove that every point x of the component C can be connected with S or T by a polygonal chain avoiding the graph A'. This will imply that the component C contains at most two components of the complement to the graph A' – namely, the components of the points S and T.
Since the point x is contained in C, a polygonal chain P connects x to an interior point G of the segment EF. Moreover, we can assume that G is the only point of P that the segment EF contains. Otherwise we shall take the part of the polygonal chain P from the point x to the first point that EF contains, and discard the rest of P.
Since the triangles EFS and EFT together cover a small neighborhood of the point G, the polygonal chain P contains a nearby point G' that does not belong to the segment EF, but does belong to one of the two triangles – say, to EFS.
As a result, the fragment of the polygonal chain P between x and G', together with the segment $G'S$, forms a longer chain that connects x and S, and avoids the graph A'.

Problem 15b

It remains to prove that the points S and T from the preceding solution are contained in different components of the complement to the graph A'. Indeed, otherwise they would be connected by a polygonal chain P that avoids the graph A'. Assuming with no loss of generality, that the angles S and T in the triangles EFS and EFT are obtuse, we notice that the segment ST is contained in the union of the triangles EFS and EFT. So ST avoids the graph A and intersects EF in one point G.
Thus the segment ST together with the polygonal chain P forms a closed non-self-intersecting polygonal chain P', which intersect the graph A' in a single point G.
On the other hand, since the graph A is connected, it contains a polygonal chain Q that connects the points E and F. Extending Q with the segment EF to obtain a closed non-self-intersecting polygonal chain Q', the closed non-self-intersecting polygonal chains P' and Q' do not contain each others' vertices and intersect at a single point G. This contradicts Problem **14**.

Quasiperiodic Sets

Problem 16a

Yes, it is. Denote the given finite set by S, and the periodic set with the fundamental domain being the fractional part $\{S\}$ — by M. Then, the intersection of M with the given irrational line is exactly S.

Problem 16b

No, in analogy with the previous problem one can show that a segment is a quasiperiodic set.

Problem 16c

An example of such a set is the tuple of all points of the line that are on the right-hand side of the origin at an integer distance from it.
Assume the contrary: let M be the intersection of the line L and a periodic set with the fundamental polyhedron F. Since M contains infinitely many points, so does the polyhedron F, therefore, it contains a segment I that intersects the winding L.
But since M does not contain a segment, the segment I is not parallel to the line L. Thus, the density of the intersection points of the winding and the segment I is nonzero. Therefore, M has a non-empty intersection with any long enough segment of the line L, including an interval on the left-hand side of the origin. But M contains no points on the left-hand side of the origin, which is a contradiction.

Remark. In fact, none of the rays contained in the given line is a quasiperiodic set. Try to show it.

Problem 17a

The answer is the area of the rectangle. Indeed, let the edge of the rectangle that is parallel to the given line be of the length a, and the edge perpendicular to it be of the length b. Then, each component of the set Q is a length a segment, while the density of those components equals the density of the winding with the perpendicular edge, that is, b. Hence the average length equals ab, that is, the area of F.

Problem 17b

The answer is the area of F. The proof consists in using the hint.

Problem 18a

The answer is the area of the fundamental domain, according to the previous problem. The area is equal to $2h - h^2$.

Problem 18b

The density of green tiles is equal to the length of the orthogonal projection of a green rectangle along the line $x + \sqrt{2}y = 0$. This length equals $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}h$. Similarly, the density of yellow rectangles is the sum of densities of horizontal and vertical rectangles, i.e., $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Notice that each component of Q_h (except the first one started at the origin) consists of alternating yellow and green tiles, and the boundary tiles are always yellow. Hence the difference between the numbers of green and yellow tiles is equal to the number of components with maximal error of ± 3. Therefore, the density of components of Q_h is equal to the difference between the densities of yellow and green tiles, i.e., $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1 - h)$.

Euler characteristic

Problem 19a

Denote the given figure by P. It is a polyhedron since it has the following cell decomposition: the trapezoid, with vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, all its edges and vertices, the interval

with endpoints $(1,0)$ and $(1,1)$, its endpoints, and also the cells symmetric to the ones listed above in the line $y=x$.
Assume now that there exists the cell decomposition of P containing the given triangle. Then the side I of this triangle with endpoints $(1,-1)$ and $(-1,1)$ is also a cell. On the other hand, the triangle with vertices $(0,0)$, $(0,1)$ and $(-1,1)$ should contain at least one 2-dimensional cell with edge J which lies inside of I. Therefore, we have found two different intersecting cells I and J. A contradiction.

Problem 19b

By definition, the given polyhedron is a union of several polygons. Each of those polygons is an intersection of some half-planes. Denote by L_1, L_2, ..., L_n the boundary lines of all these half-planes.
These lines define a cell decomposition of the whole plane as follows. Each 2-dimensional cell is an intersection of n closed half-planes with boundary lines L_1, L_2, ..., L_n (we take only non-empty such intersections). The 1- and 0-dimensional cells are defined in an obvious way.
Each cell in the constructed decomposition either is contained in P or does not intersect P. Therefore, the set of cells contained in P forms a cell decomposition of P.

Problem 20a

If the given polyhedron consists only of finite number of points, the equality is trivial.
Assume that the given polyhedron is a forest (i.e., a union of several trees). Indeed, any forest can be grown from a finite set of points by successive adjunction of leaves. At each step, one interval and one vertex is added. So the Euler characteristic remains the same, and the equality holds also for any forest.
Next, assume that the given polyhedron is a graph. Any graph can be obtained from a forest by adding some edges inside components. Due to Problem **15**, such operation adds one connected component to the complement of the graph and thus preserves Euler's equality.
Finally consider an obituary polyhedron. One can obtain this polyhedron by adding some polygons to a graph. Such operation increases the number of faces by 1 and decreases the number of components of the complement by 1 as well. So Euler's equality preserves.

Problem 20b follows immediately from Problem **20a**: the right-hand side of Euler's equality does not depend on a cell decomposition.

Problem 20d also follows immediately from Problem **20a** since the Euler characteristic of a closed non-self-intersecting polygonal chain is equal to 0.

Problem 20c is a direct consequence of the definition of the Euler characteristic, after one presents a cell decomposition of $P \cup Q$ such that those cells also form cell decompositions of polyhedra P, Q and $P \cap Q$. A decomposition satisfying this condition always exists, e.g., it can be constructed using the same ideas as in the solution of Problem **19b**.

Problem 21

Our stroll to open problems is finished. Now it is your turn to share with us your progress and ideas concerning these problems. We will be glad to proceed our collaboration even after the Summer Conference. We are always open to discussions.

Arkhipova Arina arhipova@179.ru
Belopashentseva Polina beloppolina@gmail.com
Bogdanov Ilya ilya.i.bogdanov@gmail.com
Dorichenko Sergei sdorichenko@yandex.ru
Stupakov Kirill kir.stupakov@gmail.com
Esterov Alexander aesterov@hse.ru

А.В. Доледенок, А.Б. Меньщиков, А.С. Семченков, М.А. Фадин

1 Вместо вступления

В этом параграфе вам предлагается решить несколько задач. Если у вас не получится это сделать (а мы считаем их непростыми), попробуйте вернуться к ним уже после доказательства *pqr*-лемм.

1. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a+b+c=1$. Докажите, что

$$1+12abc \geqslant 4(ab+bc+ca).$$

2. Про вещественные числа a, b, c известно, что

$$a+b+c=9, \quad ab+bc+ca=24.$$

Докажите, что $16 \leqslant abc \leqslant 20$. Докажите также, что для любого $r \in [16,20]$ существуют вещественные a, b, c такие, что $a+b+c=9$, $ab+bc+ca=24$, $abc=r$.

3. Пусть P — симметрический многочлен от трёх переменных не более чем пятой степени. Докажите, что если $P(a,a,c) \geqslant 0$ и $P(0,b,c) \geqslant 0$ для всех неотрицательных чисел a, b, c, то $P(a,b,c) \geqslant 0$ для любых неотрицательных чисел a, b, c.

4. (Россия, отбор на IMO, 2015) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $1+a+b+c=2abc$. Докажите, что

$$\frac{ab}{1+a+b}+\frac{bc}{1+b+c}+\frac{ca}{1+c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

5. (Иран, отбор на IMO, 1996) Неотрицательные числа a, b, c таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

2 Симметрические многочлены

Начнём изучение *pqr*-метода с изучения симметрических многочленов. Основные результаты этого раздела понадобятся нам в дальнейшем.

[1] В настоящий момент общепринятым является название *uvw*-метод.

[2] Благодарим М.А. Розенберга за полезные замечания. Особо отметим его важную роль в популяризации *uvw*-метода.

[3] Благодарим А.Н. Доледенок и И.И. Богданова за помощь в переводе проекта.

2.1 Свойства симметрических многочленов

6. Выразите через $a+b$ и ab выражения a^2+b^2, a^3+b^3, a^4+b^4, $(a-b)^2$.

Для трёх переменных a, b, c введём обозначения $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$ — элементарные симметрические многочлены от трёх переменных.

7. Выразите через p, q, r выражения $a^2+b^2+c^2$, $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$, $a^3+b^3+c^3$, $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$, $a^4+b^4+c^4$, $(a+b)(b+c)(c+a)$.

8. Для целых неотрицательных k положим $s_k=a^k+b^k+c^k$. Выведите рекуррентную формулу (с коэффициентами, зависящими от p, q, r), выражающую s_k ($k\geqslant 3$) через s_{k-1}, s_{k-2} и s_{k-3}.

Назовём многочлен $G(a,b,c)$ от трёх переменных *симметрическим*, если он не меняется при перестановке любых двух переменных (т.е. $G(a,b,c)=G(b,a,c)=\ldots$). Результатом следующей задачи в дальнейшем можно пользоваться без доказательства.

9. Докажите, что любой симметрический многочлен от переменных a, b, c можно представить как многочлен от переменных p, q, r.

10. Дано вещественное число t. Решите систему уравнений $\begin{cases} a+b+c=t,\\ a^2+b^2+c^2=t^2,\\ a^3+b^3+c^3=t^3. \end{cases}$

Переформулировка задачи в терминах симметрических многочленов часто помогает при доказательстве неравенств, однако, есть проблема: например, очевидное неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant 0$, где a, b, c — вещественные числа, перепишется как $p^2-2q\geqslant 0$, что, вообще говоря, неверно для произвольных p и q. Оказывается, что p, q и r не могут быть произвольными, и наша дальнейшая цель — определить, какими они могут быть.

11. Для вещественных чисел a,b,c докажите, что $q^2\geqslant 3pr$.

12. Для неотрицательных чисел a,b,c докажите, что $\dfrac{p}{3}\geqslant\sqrt{\dfrac{q}{3}}\geqslant\sqrt[3]{r}$.

2.2 Симметрические многочлены от 2 переменных

Назовём *комплексным числом* упорядоченную пару (x,y) вещественных чисел. Будем записывать его в виде $x+yi$, где i называется *мнимой единицей*. Сложение и умножение комплексных чисел определим следующим образом:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Формула произведения такова, что $i^2=-1$. Для комплексного числа такого вида x называется *вещественной частью*, а y — *мнимой*. Комплексное число с нулевой

вещественной частью называется *чисто мнимым*. *Сопряжённым* к комплексному числу $x+yi$ называется число $x-yi$ (оно обозначается через $\overline{x+yi}$). Отметим, что любое вещественное число x является также и комплексным: $x = x + 0 \cdot i$.

Для двух комплексных чисел a и b введём обозначения $p = a + b$ и $q = ab$.

13. Докажите, что a и b — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$, и других корней нет.

14. Докажите, что если оба числа p и q — вещественные, то числа a и b или оба вещественны, или комплексно сопряжены.

15. Докажите, что если p и q вещественны, то $(a-b)$ является или вещественным, или чисто мнимым числом.

16. Выразите условие того, что a и b вещественны, в терминах p и q и неравенств от этих величин.

17. Докажите, что a и b вещественны и неотрицательны тогда и только тогда, когда p и q неотрицательны и выполнены условия на p и q из предыдущей задачи.

2.3 Симметрические многочлены от 3 переменных

Для трёх комплексных чисел a, b, c введём следующие обозначения: $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$.

18. Докажите, что a, b, c — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, и других корней нет.

Как и в случае двух переменных, мы покажем, что свойства вещественности и неотрицательности переменных a, b, c выражаются через условия на p, q, r.

19. Докажите, что если числа p', q', r' вещественны, то существуют такие числа a', b', c' (единственные с точностью до перестановки), что $p' = a' + b' + c'$, $q' = a'b' + b'c' + c'a'$, $r' = a'b'c'$, причем либо все числа a', b', c' вещественны, либо среди них одно вещественное, а два других комплексно сопряжены.

20. Известно, что все числа p, q, r — вещественные. Докажите, что число

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

является вещественным, если все числа a, b, c вещественны, и чисто мнимым в противном случае.

21. Докажите, что

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2.$$

Подсказка. Обозначим $l_{xy} = a^x b^y + b^x c^y + c^x a^y$. Тогда $(l_{12} - l_{21})^2 = (l_{12} + l_{21})^2 - 4l_{12}l_{21}$.

22. Критерий вещественности. Пусть дана тройка вещественных чисел (p, q, r). Докажите, что числа a, b, c, определяемые как корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

(с учетом кратности), вещественны тогда и только тогда, когда $T(p,q,r) \geqslant 0$, где многочлен $T(p,q,r)$ определяется как $T(p,q,r) = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.

23. Лемма о неотрицательности. Докажите, что неравенства p, q, $r \geqslant 0$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$ равносильны тому, что числа a, b, c вещественны и неотрицательны.

Может показаться, что формула для $T(p,q,r)$ — слишком сложная и неудобная для использования. Однако в дальнейшем мы будем пользоваться в основном следующим соображением. Посмотрим на условие $T(p,q,r) \geqslant 0$: допустим, мы зафиксировали какие-то две переменные (например, $p = p_0$ и $q = q_0$), тогда выражение $T(p,q,r)$ обратится в многочлен от оставшейся переменной (в нашем случае, от r). Условие $T(p,q,r) \geqslant 0$ в таком случае эквивалентно тому, что третья переменная (в нашем случае, r) принадлежит объединению нескольких отрезков и лучей.

3 *pqr*-леммы

Назовём тройку (p,q,r) *допустимой*, если p, q, $r \geqslant 0$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$, то есть выполнено условие леммы о неотрицательности. Иными словами, у многочлена $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ есть три (возможно, кратных) вещественных неотрицательных корня.

24. Лемма об r. Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0, q_0, r) допустима. Докажите, что для минимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке корней или есть два равных, или один из них равен 0. А для максимального r такого, что (p_0, q_0, r) допустима, верно, что в соответствующей тройке корней есть два равных.

25. Лемма о q. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.

26. Лемма о p. Пусть для заданных $q = q_0$ и $r = r_0 > 0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.
Останется ли утверждение верным, если $r_0 = 0$?

После долгого теоретического вступления мы наконец-то можем рассмотреть пример доказательства совсем простого неравенства с помощью *pqr*-метода.

Пример. Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

Доказательство. Перепишем неравенство в виде $p^2 - 2q \geqslant q \Leftrightarrow p^2 \geqslant 3q$. Зафиксируем, к примеру, значения $p = p_0$ и $r = r_0$. Теперь нам надо доказать неравенство

$q \leqslant \frac{p_0^2}{3}$, то есть показать, что q ограничено сверху некоторой константой. Заметим, что если мы докажем неравенство для максимального q, то оно будет верно для всех q. По лемме о q максимальное значение q достигается, когда какие-нибудь из переменных a, b, c равны. Без ограничения общности, $a = b = x$, $c = z$. Поскольку неравенство $q \leqslant \frac{p_0^2}{3}$ равносильно исходному, то после подстановки в исходное неравенство получим

$$2x^2 + z^2 \geqslant x^2 + 2xz \Leftrightarrow (x - z)^2 \geqslant 0,$$

что верно. Следовательно, неравенство верно для всех положительных чисел a, b, c. Равенство возможно, только если $x = z$, то есть если $a = b = c$.

Теперь вы можете вернуться к параграфу 1 и применить pqr-метод для решения предложенных там задач!

4 Неравенства

Допустим, мы доказываем симметрическое неравенство от трёх неотрицательных переменных a, b, c. Зафиксируем две из трёх переменных $p, q, r \geqslant 0$. Перепишем исходное неравенство в виде $f \geqslant 0$, где f — функция от оставшейся переменной. Тогда, если f является монотонной или вогнутой, то неравенство достаточно проверять в случае $a = b$ (и случае $a = 0$, если мы фиксировали p и q).

Во всех неравенствах требуется указать те значения переменных a, b, c, при которых неравенство обращается в равенство!

27. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 8.$$

28. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leqslant \frac{3}{8}.$$

29. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + 2ab} + \frac{1}{1 + 2bc} + \frac{1}{1 + 2ca} \geqslant \frac{2}{1 + abc}.$$

30. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$, $a + b + c = 4$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Докажите, что

$$a^6 + b^6 + c^6 \leqslant a^5 + b^5 + c^5 + 32.$$

31. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geqslant\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

32. Известно, что a, b, $c\geqslant 0$. Докажите, что

$$a^5+b^5+c^5+abc(ab+bc+ca)\geqslant a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a).$$

33. а) Известно, что a, b, $c\geqslant 0$. Докажите, что

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{3abc}{a+b+c}\geqslant\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

б) Найдите наименьшее $k\geqslant 0$ такое, что для любых a, b, $c\geqslant 0$ справедливо

$$k\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+(1-k)\frac{3abc}{a+b+c}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

34. Известно, что $a,b,c>0$, $X=\frac{a^2+b^2}{2c^2}+\frac{b^2+c^2}{2a^2}+\frac{c^2+a^2}{2b^2}$, $Y=\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}$. Докажите, что

$$4X+69\geqslant 27Y.$$

35. а) Дан однородный симметрический многочлен $P(a,b,c)$ степени не выше 8. Приведите алгоритм проверки того, что он принимает только неотрицательные значения при неотрицательных значениях переменных. Можно считать, что мы умеем находить нули и экстремумы любой функции одной переменной.

б) Приведите аналогичный алгоритм для однородного симметрического многочлена степени не выше 17.

в*) Приведите аналогичный алгоритм для однородного симметрического многочлена произвольной степени.

Чтобы применить pqr-метод, иногда бывает удобно сделать подходящую замену переменных.

36. Известно, что a, b, $c\geqslant 0$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Докажите, что

$$2(a+b+c-2)^2+(ab+bc+ca)(2+3(a+b+c))\geqslant 35.$$

37. Известно, что a, b, $c\geqslant 1$ и $a+b+c=9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab+bc+ca}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

38. Известно, что a, b, $c>0$. Докажите, что

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3+\frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 2.$$

39. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{4 - bc} + \frac{b^2}{4 - ca} + \frac{c^2}{4 - ab} \leqslant 1.$$

40. Для вещественных чисел a, b, c докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 3(a^3 b + b^3 c + c^3 a),$$

причём равенство возможно только в случаях $a = b = c$ и

$$\frac{a}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}, \quad \frac{b}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{7}},$$

$$\frac{c}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}.$$

Подсказка. Сделайте замену $a = x + 2ty$, $b = y + 2tz$, $c = z + 2tx$ для некоторого t.

5 Необычные условия

До сих пор мы работали с достаточно простыми условиями на переменные: например, они все неотрицательны или их сумма равна 3. Эти условия легко можно переформулировать в терминах p, q, r. Можно ли сделать то же самое и с необычными условиями?

41. Какие условия на числа p, q, r равносильны тому, что

а) все числа a, b, c не меньше 1?

б) a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника (возможно, вырожденного)?

в) для неотрицательных a, b, c выполнено неравенство

$$2\min(a, b, c) \geqslant \max(a, b, c)?$$

42. Известно, что a, b, $c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Докажите, что

$$\frac{a}{a + b} + \frac{b}{b + c} + \frac{c}{c + a} \geqslant \frac{7}{5}.$$

43. Известно, что a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{b + a}\right).$$

44. Докажите, что существует многочлен $S(x, y, z)$ такой, что тройка a, b, c является вещественной тогда и только тогда, когда $S(x, y, z) \geqslant 0$, где

$$x = a + b + c, \quad y = a^2 + b^2 + c^2, \quad z = a^3 + b^3 + c^3.$$

45. Докажите, что для любого числа $s \in \left[\frac{86}{9}, 10\right]$, существуют числа a, b, c такие, что

$$a + b + c = 4, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 6, \quad a^3 + b^3 + c^3 = s,$$

а ни для каких других s таких чисел не существует.

46. (США, отбор на IMO, 2001) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$ab + bc + ca - abc \leqslant 2.$$

47. (Китай-запад, 2004) Известно, что a, b, $c > 0$. Докажите, что

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

48. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + nabc = n + 3$.

а) Пусть $0 \leqslant n \leqslant \frac{3}{2}$. Докажите, что $a + b + c \leqslant 3$.

б) Пусть $\frac{3}{2} \leqslant n \leqslant 2$. Докажите, что $a + b + c \leqslant \sqrt{2(n + 3)}$.

в) Пусть $n = 2$. Докажите, что $ab + bc + ac - abc \leqslant \frac{5}{2}$.

49. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(2 + \sqrt{4 - 3abc}).$$

6 Особые случаи

Допустим, мы хотим доказать симметрическое неравенство (на множестве неотрицательных чисел) со сложным симметрическим условием, содержащим все три элементарных симметрических многочлена. Стандартный метод pqr здесь не проходит: если зафиксировать два числа из тройки p, q, r, то третье будет почти наверняка определяться однозначно. Что же делать?

Зафиксируем какое-то одно число из тройки p, q, r (скажем, r). Тогда условие станет описывать зависимость между двумя оставшимися числами. Постараемся выразить одно через другое. Если нам это удастся, то мы сможем воспринимать условие как то, что один из элементарных симметрических многочленов (скажем, p) является функцией от другого (скажем, q). То есть, по значению q не более чем однозначно определяется тройка (p, q, r). Тогда неравенство естественным образом перепишется в виде $h(q) \geqslant 0$, где h — некоторая функция вещественного неотрицательного аргумента. Если h окажется монотонной или вогнутой, то неравенство достаточно проверять лишь для экстремальных значений q. Значит, задача сведётся к нахождению экстремальных значений q (с учётом условия и фиксированного r).

Перед тем, как формализовать описанное выше, дадим несколько определений.

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел. Множеству $\mathbb{R}^n$ при маленьких n соответствует естественная геометрическая интерпретация. Например, при $n = 1$ — это прямая, при $n = 2$ — плоскость. Вследствие этого, элементы $\mathbb{R}^n$ будем называть точками.

Расстоянием в $\mathbb{R}^n$ между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ назовем величину $||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$. В частности, при $n = 1$ расстояние между точками — это модуль разности соответствующих чисел, при $n = 2$ — обычное расстояние на плоскости.

Пусть множество M является подмножеством $\mathbb{R}^n$. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся δ, зависящее от x и ε, такое, что если для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$ верно $||x - y|| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Пример. Докажем, что функция $f(x) = x^2$ является непрерывной для любого $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |(y - x) + 2x| \leqslant |x - y| \cdot (|x - y| + |2x|) < \delta^2 + 2|x|\delta.$$

Положим $\delta = \min(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\varepsilon}{4|x|})$. Тогда оба слагаемых не превосходят $\frac{\varepsilon}{2}$, поэтому всё выражение $|x^2 - y^2|$ строго меньше ε.

Следующими тремя задачами в дальнейшем можно будет пользоваться без доказательства.

50. Докажите, что следующие функции непрерывны: $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна для любого $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна для любого $x \in (0, +\infty)$, $f(x, y) = x + y$ непрерывна для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

51. Пусть функция $g(x)$ непрерывна для всех $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, а все её значения лежат в множестве $N \subset \mathbb{R}$. Пусть также функция $f(y)$ непрерывна для всех $y \in N$ и принимает вещественные значения. Докажите, что функция $f(g(x))$ непрерывна для всех $x \in M$.

52. а) Докажите, что многочлен $P(x)$ от одной переменной является непрерывной функцией для всех $x \in \mathbb{R}$.

б) Докажите, что многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных является непрерывной функцией для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что на переменные a, b, c наложено *симметрическое условие* G, если выполнено равенство $G(p, q, r) = 0$, где G — некоторая непрерывная функция от трёх переменных.

53. Предположим, на переменные a, b, c наложено симметрическое условие G. Зафиксируем $r = r_0$, для которого существует допустимая тройка (p_0, q_0, r_0) такая, что $G(p_0, q_0, r_0) = 0$. Предположим, что условие G равносильно тому, что $p = f(q)$ (с учётом фиксированного r), где f — некоторая функция, а множество возможных значений q ограничено. Докажите, что q достигает своего максимума и минимума, причём в экстремальных точках обязательно какие-то две из переменных равны,

а) если f — линейная функция;

б) если f — многочлен.

54. Предположим, на переменные a, b, c наложено симметрическое условие G. Пусть (x, y, z) — произвольная перестановка (p, q, r). Зафиксируем $z = z_0$, для которого существует допустимая тройка (p, q, r) такая, что $G(p, q, r) = 0$. Предположим, что условие G равносильно тому, что $x = f(y)$ (с учётом фиксированного z), где f — многочлен, а множество возможных значений y ограничено. Тогда y достигает своего максимума и минимума, причём если $z = r$, то в любой точке экстремума $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$, иначе в любой точке экстремума $abc(a - b)(b - c)(c - a) = 0$.

Замечание. Утверждение предыдущей задачи останется верным, если f — не многочлен, а функция, непрерывная на объединении конечного числа отрезков, содержащих множество возможных значений y. В дальнейшем этим можно пользоваться без доказательства (при условии решения предыдущей задачи).

Пример. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$a + b + c \geqslant 2 + \sqrt{abc(4 - a - b - c)}.$$

Доказательство. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$p \geqslant 2 + \sqrt{r(4-p)},$$

при условии $\frac{p^2-4+r}{2} = q$. Зафиксируем r. Тогда наше неравенство перепишется в виде $f(p) \geqslant 0$, где $f(x) = x - 2 - \sqrt{r(4-x)}$ — монотонная функция. Значит, достаточно проверять неравенство при минимальном возможном значении p. Согласно задаче 54, это означает, что достаточно проверять неравенство в случае $a = b$. Тогда $c = 2 - a^2$ и исходное неравенство переписывается в виде

$$a^4(a-1)^2 \geqslant 0.$$

Случаи равенства $a = b = c = 1$; $a = b = 0, c = 2$; $a = c = 0, b = 2$; $b = c = 0, a = 2$.

55. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 10$. Докажите, что

$$\frac{9}{8} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \leqslant \frac{6}{5}.$$

56. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что

$$(a+b+c)(1+abc) \geqslant 6.$$

57. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $ab + bc + ca = a^3 + b^3 + c^3$. Докажите, что

$$ab + bc + ca \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

58. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$. Им естественным образом соответствуют p, q, r, причём оказалось, что $q + r = 4$. Докажите, что

$$p^3 - 27r \geqslant 7(p^2 - 3q).$$

59. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + (abc-1)^2$. Докажите, что

$$ab + bc + ca + 3 \geqslant 2(a+b+c).$$

7 n переменных

До этого мы доказывали только симметрические неравенства от не более чем 3 переменных. Но что делать, если переменных больше, чем 3?

Шаром и *сферой* в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом r назовём множество точек y таких, что $||x-y|| \leqslant r$ и $||x-y|| = r$ соответственно. В частности, если $n = 2$, то шар — это просто круг, а сфера — окружность.

Рассмотрим последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$ в $\mathbb{R}^n$. Скажем, что эта последовательность *сходится* к точке z, если для любого $\varepsilon > 0$ вне шара с центром в точке z и радиуса ε лежит лишь конечное число точек из последовательности.

Пример. Последовательность $z_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к точке $z = 0$, поскольку вне отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ лежат лишь те точки, для которых $n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, а их конечное число.

Рассмотрим множество точек M в $\mathbb{R}^n$. Назовём точку z *предельной точкой* множества M, если существует последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$ из M, каждая из которых отлична от z, сходящаяся к точке z. Множество точек M в $\mathbb{R}^n$ назовём *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример. Интервал $(0, 1)$ не является замкнутым множеством, поскольку 0 является предельной точкой, но не лежит в интервале. А вот отрезок $[0, 1]$ является замкнутым множеством.

Множество точек M в $\mathbb{R}^n$ назовём *ограниченным*, если существует константа C такая, что для любой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ для всех i от 1 до n выполнено неравенство $|x_i| < C$. Множество точек M в $\mathbb{R}^n$ назовём *компактом*, если M ограничено и замкнуто.

60. Является ли отрезок $[0, 1]$ компактом? Является ли луч $[0, +\infty)$ компактом? А множество, состоящее из точки $(1, 1, \ldots, 1)$? Шар радиуса 1 с центром в точке $(1, 1, \ldots, 1)$? Этот же шар без точки $(1, 1, \ldots, 1, 0)$? А сфера радиуса 1 с центром в точке $(1, 1, \ldots, 1)$?

Следующей задачей в дальнейшем можно будет пользоваться без доказательства.

61. Рассмотрим набор условий

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, P_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, P_{s+1}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ldots, P_m(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

где m — натуральное, а s — целое неотрицательное число, $P_1, \ldots, P_m$ — многочлены от n переменных. Предположим, что множество точек M в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих всем этим условиям, ограничено. Докажите, что M является компактом.

В дальнейшем нам потребуется следующая классическая теорема из математического анализа, которой можно пользоваться без доказательства.

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная функция, определённая на компакте, достигает на нём наибольшего и наименьшего значений.

Пример. Функция x^2 достигает на отрезке $[0, 1]$ наибольшего и наименьшего значений. Однако из предыдущей теоремы нельзя утверждать, что она достигает наибольшего и наименьшего значений на интервале $(0, 1]$.

62. Дана симметрическая непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на

компакте $M \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, f такова, что при любых фиксированных $a_4, \ldots, a_n$ (для которых существуют a_1, a_2, a_3 такие, что $(a_1, \ldots a_n) \in M$) функция

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, a_4, \ldots, a_n)$$

достигает своих экстремальных значений только когда $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$ (или $x_1 x_2 x_3 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$). Докажите, что функция f достигает своих экстремальных значений, причём в точке экстремума среди $x_1, \ldots, x_n$ есть максимум два различных числа (или максимум два различных ненулевых числа).

Пример. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$, $a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geqslant 16.$$

Доказательство. По задаче 61 условия задают компакт. Положим

$$f(a, b, c, d) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd.$$

По задаче 52 f является непрерывной функцией. Зафиксируем $d = d_0 \geqslant 0$. Положим $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ac$, $r = abc$. Рассмотрим функцию

$$h(a, b, c) = f(a, b, c, d_0) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d_0^2) + 4abcd_0 = 3p^2 - 6q + 4d_0 r + 3d_0^2 =$$

$$= 3p^2 - 6q + 4d_0 r + 3d_0^2.$$

Зафиксируем p и r. Поскольку h линейна по q, то минимум h достигается, причём только когда $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$. Согласно задаче 62, нам достаточно проверять исходное неравенство, когда среди чисел a, b, c, d не более двух различных.

- Если $a = b$ и $c = d = 2 - a$, то неравенство перепишется следующим образом:

  $$4(a - 1)^2((a - 1)^2 + 1) \geqslant 0.$$

  Случай равенства $a = b = c = d = 1$.

- Если $a = b = c$ и $d = 4 - 3a$, то неравенство перепишется следующим образом:

  $$4(a - 1)^2(4 - 3a)(a + 2) \geqslant 0.$$

  Поскольку $a \leqslant \frac{4}{3}$, то неравенство верно. Случаи равенства $a = b = c = \frac{4}{3}, d = 0$; $a = b = d = \frac{4}{3}, c = 0$; $a = c = d = \frac{4}{3}, b = 0$; $b = c = d = \frac{4}{3}, a = 0$.

63. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$, $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$(1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2 + (1 - d^2)^2 \geqslant 3.$$

64. (Россия, отбор на IMO, 2015) Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + bcd + cda + dab \leqslant 1.$$

65. (IMO Shortlist, 2010) Про вещественные a, b, c, d известно, что $a+b+c+d=6$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Докажите, что

а) $abcd \leqslant 3$;

б) $36 \leqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \leqslant 48$.

66. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$. Докажите, что

$$a^3+b^3+c^3+d^3+4\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3} \geqslant 2(abc+bcd+cda+dab).$$

67. (Всероссийская олимпиада, 2016) Известно, что a, b, c, $d>0$ и $a+b+c+d=3$.

а) Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

б) Докажите, что

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

в) Известно, что $x \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b^x}+\frac{1}{c^x}+\frac{1}{d^x}+\left|\frac{(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})(1-\frac{1}{c})(1-\frac{1}{d}))}{2}\right|^x \leqslant \frac{1}{a^xb^xc^xd^x}.$$

68. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$ и $a+b+c+d=4$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+4 \geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

69. Известно, что a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$, $a+b+c+d+e=20$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=100$. Найдите экстремальные значения выражения

$$abcd+abce+abde+acde+bcde.$$

70. Известно, что a, b, c, $d>0$ и $a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Докажите, что

$$(a+b+c+d)(17+46abcd) \geqslant 252.$$

8 Дополнительные задачи

В этом разделе собраны задачи, где pqr-метод можно применить неожиданным, неочевидным с первого взгляда путём.

71. (АРМО, 2004) Для вещественных чисел a, b, c докажите, что

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

72. (Иран, 2005) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2$. Докажите, что

$$ab + bc + ca \leqslant \frac{3}{2}.$$

73. В остроугольном треугольнике со сторонами a, b, c радиус описанной окружности равен R. Докажите, что

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} > 5R.$$

74. (Shortlist IMO, 2011) Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, причём $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(a+c-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \geqslant \frac{3}{(abc)^2}.$$

75. Назовём многочлен от трёх переменных $G(a, b, c)$ *циклическим*, если его значение не меняется при циклической перестановке переменных (то есть $G(a, b, c) = G(b, c, a) = G(c, a, b)$). Докажите, что любой циклический многочлен от a, b, c можно представить в виде $X(a, b, c) + Y(a, b, c)(l_{12} - l_{21})$, где X и Y — симметрические многочлены.

76. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{2}(ab + bc + ca)$. Докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant \frac{25}{8}(a^3b + b^3c + c^3a).$$

77. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leqslant 9.$$

78. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + 3b^2}{a + 3b} + \frac{b^2 + 3c^2}{b + 3c} + \frac{c^2 + 3a^2}{c + 3a} \geqslant 3.$$

79. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$10(a + b + c)^5 \geqslant 81(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b + b^2c + c^2a + 7abc).$$

80. (Корея, 2012) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$. Найдите максимум выражения

$$(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab).$$

81. Известно, что a, b, $c \in [0,1]$ и $(1-a)(1-b)(1-c) = abc$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a+b+c}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

82. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$, $a^2+b^2+c^2+abc = 4$ и $a+b+c \geqslant \sqrt{8}$. Докажите, что

$$a+b+c \geqslant 2 + \sqrt[3]{abc}.$$

83. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = 11(a+b+c-3)$. Докажите, что

$$\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2} + \sqrt{c+2} \geqslant \sqrt{a+b+c+24}.$$

84. Известно, что a, b, $c > 0$ и $abc = 1$. Докажите, что

а)

$$a^{10} + b^{10} + c^{10} \geqslant 3 + 45\left((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right);$$

б*)

$$a^{10} + b^{10} + c^{10} \geqslant 3 + 46\left((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right);$$

в) существует константа $k > 0$ такая, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n + b^n + c^n \geqslant 3 + kn\left((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right);$$

г*) существует константа $k > 0$ такая, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n + b^n + c^n \geqslant 3 + kn^2((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2),$$

но ни для какого $\varepsilon > 0$ не существует константы $k' > 0$ такой, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n + b^n + c^n \geqslant 3 + k'n^{2+\varepsilon}((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2).$$

85. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$, $(a+1)(b+1)(c+1) = 84$, $(a+b+c)(ab+bc+ac) = \frac{14256}{abc}$. Найдите максимум выражения

$$(a+b+c)^2 + (ab+bc+ac)^2 + a^2b^2c^2.$$

86. Известно что a, b, c, $d \geqslant 0$, $a+b+c+d = 3$, $a^2+b^2+c^2+d^2 = 5$, $a^4+b^4+c^4+d^4 = 17$. Найдите максимально возможное значение d.

Список литературы

[1] М.А. Розенберг "Метод uvw для доказательства неравенств", Математическое образование, № 3-4 (59-60), 2011.

[2] M.B.T. Knudsen "The uvw method", http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h278791.

А. Доледенок, А. Меньщиков, А. Семченков, М. Фадин

Почти все встречающиеся в проекте неравенства являются симметрическими, поэтому если при подстановке в неравенство тройки чисел (a_0, b_0, c_0) получается равенство, то и при подстановке любой тройки, получающейся из (a_0, b_0, c_0) перестановкой чисел, также получится равенство. Для краткости, мы будем указывать лишь случаи равенства, не получающиеся друг из друга перестановкой, подразумевая, что остальные тоже подходят.

По этой же причине после сведения неравенства к случаю равенства двух переменных или равенства одной из переменных нулю, мы будем сразу полагать $a = b$ или $a = 0$, а не писать "две переменные равны, без ограничения общности $a = b$".

1. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca).$$

Решение 1. Перепишем неравенство в следующем виде: $1 + 12r \geqslant 4q$, при условии $p = 1$. Зафиксируем p и r. q максимально, если $a = b$. Из условия $c = 1 - 2a$. После подстановки неравенство переписывается следующим образом:

$$24a^3 - 24a^2 + 8a - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow 24\left(a - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{9} \leqslant 0.$$

Левая часть наибольшая при наибольшем a, то есть при $a = \frac{1}{2}$. Подставляя, получаем случай равенства $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$.

Решение 2. Однако это неравенство можно решить и методом Штурма. Без ограничения общности, c – наименьшее из чисел a, b, c, тогда $c \leqslant \frac{1}{3}$ и $3c - 1 \leqslant 0$. Перепишем неравенство в виде

$$1 + 4ab(3c - 1) \geqslant 4c(a + b).$$

Будем сближать числа a и b, фиксируя сумму, пока они не станут равны. Тогда, т.к. произведение ab при сближении возрастает, левая часть будет уменьшаться, а правая — сохраняться. Значит, неравенство достаточно доказать в случае $a = b$, далее см. решение 1.

2. Про вещественные числа a, b, c известно, что $a + b + c = 9$, $ab + bc + ca = 24$. Докажите, что $16 \leqslant abc \leqslant 20$. Докажите также, что для любого $r \in [16, 20]$ существуют вещественные a, b, c такие, что $a + b + c = 9$, $ab + bc + ca = 24$, $abc = r$.

Решение. По задаче 21 числа a, b, c вещественные, если и только если p, q, r вещественны и $T(p, q, r) \geqslant 0$. Если подставить $p = 9$ и $q = 24$, то многочлен перепишется в виде

$$T(9, 24, r) = -27(r - 16)(r - 20).$$

Его значение положительно при $r \in [16, 20]$.

3. Пусть P — симметрический многочлен от трех переменных не более чем пятой степени. Докажите, что если $P(a, a, c) \geqslant 0$ и $P(0, b, c) \geqslant 0$ для всех неотрицательных чисел a, b, c, то $P(a, b, c) \geqslant 0$ для любых неотрицательных чисел a, b, c.

Решение. Перепишем многочлен $P(a, b, c)$ в виде $P(a, b, c) = A(p, q)r + B(p, q)$. Зафиксируем p и q. Поскольку p фиксировано, то множество возможных значений r ограничено (так как $0 \leqslant r = abc \leqslant p^3$). Правая часть линейна по r (или не зависит от r), поэтому она принимает наименьшее значение при наибольшем или наименьшем r (или не меняется при изменении r). По лемме об r это означает, что $P(a, b, c)$ принимает наименьшее значение при $a = b$ или $a = 0$.

4. (Россия, отбор на IMO, 2015) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $1 + a + b + c = 2abc$. Докажите, что

$$\frac{ab}{1+a+b} + \frac{bc}{1+b+c} + \frac{ca}{1+c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$2q^2 - q(p+1) + 9r + 2pr - 3(p+1)^2 \geqslant 0,$$

при условии $1+p = 2r$. Зафиксируем p и r. Заметим, что в левой части неравенства стоит квадратичная по q функция с положительным старшим коэффициентом. Минимум достигается в точке $q_0 = \frac{p+1}{4}$.

Докажем, что при любом q выполнено $4q - (p+1) \geqslant 0$, из чего будет следовать, что левая часть нашего неравенства монотонна по q. Для минимального q будет верно, что $a = b$, а из условия следует, что $c = \frac{1+2a}{2a^2-1}$. Подставив это в $4q - (p+1) \geqslant 0$, и учтя, что $2a^2 - 1 > 0$, получим неравенство

$$8a^4 - 4a^3 + 10a^2 + 8a \geqslant 0,$$

которое верно.

Поскольку левая часть возрастает, то достаточно рассмотреть минимальное q. В этом случае $a = b$ и $c = \frac{1+2a}{2a^2-1}$. После подстановки в исходное неравенство и сокращения, получим

$$a(2a^2 - 2a - 1)^2 \geq 0.$$

Случай $a = 0$ не подходит, поэтому остается единственный случай равенства $a = b = c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

5. (Иран, отбор на IMO, 1996) Неотрицательные числа a, b, c таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

Решение. Зафиксируем p и q. Неравенство тогда перепишется в виде

$$\frac{4qpr + q(p^4 - 2p^2q + q^2)}{(pq - r)^2} \geqslant \frac{9}{4}$$

Заметим, что $r \leqslant pq$, поэтому минимальное значение левой части достигается при минимальном r.

- Если подставить $a = 0$, то исходное неравенство перепишется в виде

$$\frac{(b - c)^2(b^2 + bc + c^2)}{2bc(b + c)^2} \geqslant 0.$$

  Случаи равенства $a = 0$, $b = c$.

- Если $a = b$, то, обозначив $t = \frac{c}{b}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$t(t - 1)^2 \geqslant 0.$$

  Случай равенства $a = b = c$.

6. Выразите через $a + b$ и ab выражения $a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^4 + b^4, (a - b)^2$.

Решение.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab,$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab),$$
$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = ((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2(ab)^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a + b)^2 - 4ab.$$

7. Выразите через p, q, r выражения $a^2 + b^2 + c^2$, $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$, $a^3 + b^3 + c^3$, $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$, $a^4 + b^4 + c^4$, $(a + b)(b + c)(c + a)$.

Решение.

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = p^2 - 2q,$$
$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = (a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc = pq - 3r,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - 6abc = p^3 - 3pq + 3r,$$
$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2(ab^2c + abc^2 + a^2bc) = q^2 - 2pr,$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr,$$
$$(a + b)(b + c)(c + a) = (p - c)(p - a)(p - b) = p^3 - p \cdot p^2 + pq - r = pq - r.$$

8. Для целых неотрицательных k положим $s_k = a^k + b^k + c^k$. Выведите рекуррентную формулу (с коэффициентами, зависящими от p, q, r), выражающую s_k ($k \geqslant 3$) через s_{k-1}, s_{k-2} и s_{k-3}.

Решение 1. Докажем, что $s_k = ps_{k-1} - qs_{k-2} + rs_{k-3}$. Действительно,

$$ps_{k-1}-qs_{k-2}+rs_{k-3} = (a+b+c)(a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1})-(ab+bc+ca)(a^{k-2}+b^{k-2}+c^{k-2})+$$

$$+abc(a^{k-3}+b^{k-3}+c^{k-3}) = (s_k + ab^{k-1} + ac^{k-1} + ba^{k-1} + bc^{k-1} + ca^{k-1} + cb^{k-1}) -$$

$$-(ab^{k-1} + ac^{k-1} + ba^{k-1} + bc^{k-1} + ca^{k-1} + cb^{k-1} + abc^{k-2} + ab^{k-2}c + a^{k-2}bc) +$$

$$+(abc^{k-2} + ab^{k-2}c + a^{k-2}bc) = s_k.$$

Решение 2. По задаче 18 числа a, b, c являются корнями уравнения

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

Домножим его на x^{k-3} и перепишем следующим образом:

$$x^k = px^{k-1} - qx^{k-2} + rx^{k-3}.$$

Осталось подставить a, b, c и просуммировать три полученных равенства.

9. Докажите, что любой симметрический многочлен от переменных a, b, c можно представить как многочлен от переменных p, q, r.

Решение. Рассмотрим наш многочлен $G(a,b,c)$. Представим его в виде суммы $G = G_1 + G_2 + G_3$, где одночлены в G_i содержат ровно i переменных, для $i = 1,2,3$. Представим каждый из G_i как многочлен от p, q, r.

Заметим, что по предыдущей задаче для любого k многочлен s_k выражается через p,q,r (очевидно, s_0, s_1, s_2 выражаются через p, q, r). Если в исходном многочлене присутствует одночлен a^l, то в силу того, что многочлен симметрический, в нем также будут присутствовать одночлены b^l и c^l. Тогда мы сможем выразить G_1 через p, q, r. По аналогичным соображениям, исходя из тождества

$$s_k s_l - s_{k+l} = a^k b^l + a^k c^l + b^k a^l + b^k c^l + c^k a^l + c^k b^l,$$

мы делаем вывод, что G_2 также можно выразить через p, q, r. Если же у нас есть сумма

$$a^k b^l c^m + a^k c^l b^m + b^k a^l c^m + b^k c^l a^m + c^k a^l b^m + c^k b^l a^m,$$

то, вынеся $(abc)^n$ за скобку (где $n = \min(k,l,m)$), мы сведем задачу к предыдущим случаям — нам достаточно будет расписать через p, q, r то, что останется в скобках.

10. Дано вещественное число t. Решите систему уравнений $\begin{cases} a + b + c = t, \\ a^2 + b^2 + c^2 = t^2, \\ a^3 + b^3 + c^3 = t^3. \end{cases}$

Решение. Выразим левые части уравнений через p, q, r. Подставим первое уравнение ($p = t$) во второе ($p^2 - 2q = t^2$) и получим, что $q = 0$. Подставив это в третье уравнение ($p^3 - 3pq + 3r = 0$), получим, что $r = 0$. Из равенства $r = 0$ следует, что одна из переменных, без ограничения общности a, равна 0. Тогда $q = ab + bc + ca = bc = 0$,

откуда еще одна переменная равна 0. Итого получаем, что у системы три решения: $a = b = 0$, $c = t$ и две его перестановки.

11. Для вещественных чисел a, b, c докажите, что $q^2 \geqslant 3pr$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$(ab + bc + ca)^2 \geqslant 3(a + b + c)abc.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Тогда исходное неравенство будет равносильно следующему:

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

В свою очередь, это неравенство можно переписать так:

$$\frac{1}{2}(ab - ac)^2 + \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(ac - bc)^2 \geqslant 0.$$

12. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что $\dfrac{p}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{q}{3}} \geqslant \sqrt[3]{r}$.

Решение. Первое неравенство равносильно тому, что $p^2 \geqslant 3q$, или $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$, что верно. Перепишем второе неравенство в виде

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Оно верно, поскольку это неравенство средних для чисел ab, bc, ca.

13. Докажите, что a и b — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$, и других корней нет.

Решение. Заметим, что

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - px + q.$$

Левая часть равна 0 тогда и только тогда, когда $x = a$ или $x = b$.

14. Докажите, что если оба числа p и q — вещественные, то числа a и b или оба вещественны, или комплексно сопряжены.

Решение. Если a вещественно, то $b = p - a$ тоже вещественно, как разность вещественных чисел. Пусть $a = x + yi$, где $y \neq 0$. Тогда $b = p - a = (p - x) - yi$. Мы знаем, что число

$$q = ab = (x + iy)(p - x - yi) = (xp - x^2 + y^2) + (py - 2xy)i$$

вещественное, поэтому $py - 2xy = 0$, то есть $p = 2x$, откуда $b = x - yi = \overline{a}$.

На самом деле, утверждение задачи следует из известного факта: если многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень z, то число $\overline{z}$ также является корнем $P(x)$.

15. Докажите, что если p и q вещественны, то $(a - b)$ является или вещественным, или чисто мнимым числом.

Решение. Если a и b оба вещественны, то их разность вещественная. Если a и b сопряжены, то $a - b = x + yi - (x - yi) = 2yi$ — чисто мнимое число.

16. Выразите условие того, что a и b вещественны, в терминах p и q и неравенств от этих величин.

Решение. Для того, чтобы a и b были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы p и q были вещественны, а также квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$ имело два вещественных (возможно, кратных) корня, то есть $p^2 - 4q \geqslant 0$.

17. Докажите, что a и b вещественны и неотрицательны тогда и только тогда, когда p и q неотрицательны и выполнены условия на p и q из предыдущей задачи.

Решение. Если a и b вещественны и неотрицательны, то неотрицательны p и q, а также выполнены условия из предыдущей задачи. Обратно, из условий предыдущей задачи следует вещественность a и b. Поскольку q неотрицательно, то a и b — это числа одного знака (или одно из них равно 0). Но тогда они неотрицательны, поскольку p неотрицательно.

18. Докажите, что a, b, c — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$.

Решение. Как и в задаче 13, проверяется непосредственной подстановкой.

19. Докажите, что если числа p, q, r вещественны, то либо все числа a, b, c вещественны, либо среди них одно вещественное, а два других комплексно сопряжены.

Решение. Воспользуемся известным фактом, что у многочлена нечётной степени с вещественными коэффициентами есть вещественный корень. Пусть a — вещественный корень многочлена $x^3 - px^2 + q - r$. Разделим этот многочлен на $(x - a)$:

$$x^3 - px^2 + q - r = (x - a)P(x),$$

где $P(x)$ — квадратный трёхчлен с вещественными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. Поскольку числа b и c являются его корнями, то он равен $P(x) = x^2 - (b + c)x + bc$. По задаче 14 числа b и c или оба вещественны, или комплексно сопряжены.

20. Известно, что все числа p, q, r — вещественные. Докажите, что число

$$(a - b)(b - c)(c - a)$$

является вещественным, если все числа a, b, c вещественны, и чисто мнимым в противном случае.

Решение. Если a, b, c вещественны, то утверждение задачи очевидно. Предположим, что a вещественно, а b и c — комплексные. Запишем равенство:

$$(a - b)(b - c)(c - a) = -(a^2 - (b + c)a + bc)(b - c).$$

По предыдущей задаче числа b и c сопряжены. Пусть $b = x + yi$, $c = x - yi$, $y \neq 0$. Тогда $b + c = 2x$, $b - c = 2yi$, $bc = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$. Поэтому значение

выражения $-(a^2-(b+c)a+bc)$ является действительным, а значение выражения $(b-c)$ — чисто мнимым. В произведении получится чисто мнимое число.

21. Докажите, что

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2.$$

Решение.

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = (ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a)^2 = (ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a)^2-$$

$$-4(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) = (pq-3r)^2 - 4((ab)^3+(bc)^3+(ca)^3) -$$

$$-4(a^4bc+ab^4c+abc^4+3(abc)^2) = (pq-3r)^2-4(q^3-3pqr+3r^2)-4r(p^3-3pq+3r)-12r^2 =$$

$$= -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2.$$

22. Критерий вещественности. Пусть дана тройка чисел (p,q,r). Докажите, что тройка чисел (a,b,c), определяемая как набор корней уравнения $x^3-px^2+qx-r=0$, состоит из вещественных чисел тогда и только тогда, когда $p,\ q,\ r \in \mathbb{R}$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$, где многочлен $T(p,q,r)$ определяется как $T(p,q,r) = -4p^3r+p^2q^2+18pqr-4q^3-27r^2$.

Решение. Если $a,\ b,\ c$ вещественные, то, очевидно, $p,\ q,\ r \in \mathbb{R}$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$. Докажем в обратную сторону. Обозначим $P(x) = x^3-px^2+qx-r$. Предположим, что не все $a,\ b,\ c$ вещественные. Тогда по задаче 20 число $(a-b)(b-c)(c-a)$ является чисто мнимым. Но тогда число $T(p,q,r) = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ будет отрицательным, что противоречит условию.

23. Лемма о неотрицательности. Докажите, что неравенства $p,q,r \geqslant 0$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$ равносильны тому, что числа $a,\ b,\ c$ вещественны и неотрицательны.

Решение. Условия $p,\ q,\ r \in \mathbb{R}$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$ равносильны тому, что $a,\ b,\ c$ вещественны. Если в добавок $a,\ b,\ c$ неотрицательны, то $p,\ q,\ r$, очевидно, также неотрицательны. Если $p,\ q,\ r$ неотрицательны, то у уравнения $x^3-px^2+qx-r=0$, очевидно, не может быть отрицательного корня, поэтому $a,\ b,\ c$ неотрицательны.

24. Лемма об r. Пусть для заданных $p=p_0$ и $q=q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0,q_0,r) допустима. Докажите, что для минимального r такого, что тройка (p_0,q_0,r) допустима, в соответствующей тройке корней или есть два равных, или один из них равен 0. А для максимального r такого, что (p_0,q_0,r) допустима, верно, что в соответствующей тройке корней есть два равных.

Решение. Для того, чтобы тройка (p_0,q_0,r) была допустимой, необходимо, чтобы $T(p_0,q_0,r) \geqslant 0$ и $r \geqslant 0$ (p_0 и q_0 не меньше 0 по условию). $T(p_0,q_0,r)$ является квадратичной функцией от r с отрицательным старшим коэффициентом, поэтому решением неравенства $T(p_0,q_0,r) \geqslant 0$ является отрезок. Соответственно, максимальное r является правым концом этого отрезка, а минимальное — либо левым концом, либо нулем. На концах этого отрезка значение $T(p_0,q_0,r)$ равно 0, поэтому

два числа из a, b, c равны (так как $T(p,q,r) = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$). Если же $r = 0$, то одно из чисел a, b, c равно 0.

25. Лемма о q. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.

Решение. $T(p_0, q, r_0)$ является многочленом третьей степени от q с отрицательным старшим коэффициентом. Свободный член равен $-4p_0^3 r_0 - 27r_0^2$, то есть он неположителен. Следовательно, решением неравенства $T(p_0, q, r_0) \geqslant 0$ является объединение отрезка, у которого концы неотрицательны, и луча $(-\infty, q']$, где $q' \leqslant 0$. Отсюда следует утверждение задачи.

26. Лемма о p. Пусть для заданных $q = q_0$ и $r = r_0 > 0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных. Отдельно рассмотрите случай $r_0 = 0$.

Решение. Пусть $r_0 \neq 0$. Тогда $T(p, q_0, r_0)$ является многочленом третьей степени от p с отрицательным старшим коэффициентом. Свободный член равен $-4q^3 - 27r^2$, то есть он отрицателен. Поэтому в этом случае решение аналогично предыдущей задаче.

Пусть $r_0 = 0$, то есть одно из чисел a, b, c равно 0. Тогда $T(p, q_0, r_0) = p^2 q_0^2 - 4q_0^3$. Если $q_0 = 0$, то две из трех переменных равны 0, третья принимает произвольное положительное значение. Если $q_0 \neq 0$, то $p \in [2\sqrt{q_0}, +\infty)$, то p может быть сколь угодно велико.

27. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается в следующем виде:

$$r - q + p - 9 \geqslant 0,$$

при условии $q = r$. Из условия следует, что $a, b, c > 1$, в частности $r \neq 0$. Зафиксируем q и r. p минимально, если $a = b$. В этом случае $c = \frac{a}{a-2}$, и после подстановки неравенство переписывается следующим образом:

$$2a^2 - 12a + 18 = 2(a-3)^2 \leqslant 0.$$

Случай равенства $a = b = c = 3$.

28. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$\frac{81\cdot 3-18q+rp}{81\cdot 9-81q+9rp-r^2}\leqslant\frac{3}{8},$$

при условии $p=3$. Домножив на знаменатель, перепишем неравенство в виде

$$-3r^2+19rp-99q+243\geqslant 0.$$

Зафиксируем p и r. q максимально, если $a=b$. В этом случае $c=3-2a$, и после подстановки в исходное неравенство, получим:

$$6a^4-9a^3-27a^2+57a-27=3(a-1)^2(2a^2+a-9)\leqslant 0.$$

Поскольку $0\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$, то вторая скобка меньше 0, поэтому единственный случай равенства $a=b=c=1$.

29. Известно, что a, b, $c\geqslant 0$ и $a+b+c=3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqslant\frac{2}{1+abc}.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$4r^2p+4rq-4rp-16r^2+3r+1\geqslant 0,$$

при условии $p=3$. Зафиксируем p и r. q минимально, если $a=b$. В этом случае $c=3-2a$, и после подстановки в исходное неравенство, получим:

$$4a^4-12a^3+13a^2-6a+1=(2a-1)^2(a-1)^2\geqslant 0.$$

Случаи равенства $a=b=c=1$, $a=b=\frac{1}{2}$ и $c=2$.

30. Известно, что a, b, $c\geqslant 0$, $a+b+c=4$ и $a^2+b^2+c^2=6$. Докажите, что

$$a^6+b^6+c^6\leqslant a^5+b^5+c^5+32.$$

Решение. Из условия имеем $p=4$ и $q=5$. По задаче 8 верны следующие равенства:

$$a^5+b^5+c^5=p^5-5p^3q+5pq^2+5p^2r-5qr,$$

$$a^6+b^6+c^6=p^6-6p^4q+6p^3r+9p^2q^2-12pqr-2q^3+3r^2.$$

Подставим их в исходное неравенство и перенесем все в левую часть. Тогда в левой части будет стоять квадратичная по r функция с положительным старшим коэффициентом, поэтому наибольшее значение левая часть достигает при минимальном или максимальном r. Заметим также, что из доказательства леммы об r следует, что достаточно рассмотреть случай $a=b$ (у $T(4,5,r)$ значение в 0 отрицательно). В этом случае $c=4-2a$, и после в условие $a^2+b^2+c^2=6$, получим:

$$2(a-1)(3a-5)=0.$$

Отсюда либо $a = b = 1$ и $c = 2$, либо $a = b = \frac{5}{3}$ и $c = \frac{2}{3}$. Подстановкой в исходное неравенство убеждаемся, что второй случай не является случаем равенства, а первый — является.

31. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geqslant\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$\frac{p^4-4p^2q+5q^2-2pr}{q^2p^2-2q^3-2p^3r+4pqr-r^2}\geqslant\frac{10}{p^2}.$$

Легко видеть, что если домножить на знаменатели и перенести все в левую часть, то в левой части получится квадратичная по r функция с положительным старшим коэффициентом. Зафиксируем p и q. Коэффициент при r будет равен $18p^3-40pq$. Поскольку $p^2\geqslant 3q$, то этот коэффициент будет неотрицательным, следовательно, минимальное значение функция принимает при минимальном r.

- Если $a=b$, то, обозначив $t=\frac{a}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

  $$20t^3-11t^2+4t+1\geqslant 0.$$

  Левая часть больше 0 при неотрицательных t.

- Если $a=0$, то, обозначив $t=\frac{b}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

  $$(t-1)^2(t^4+4t^3+t^2+4t+1)\geqslant 0.$$

  Получаем случай равенства $a=0$, $b=c$.

32. Известно, что a, b, $c\geqslant 0$. Докажите, что

$$a^5+b^5+c^5+abc(ab+bc+ca)\geqslant a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a).$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$p^5-5p^3q+7p^2r+4pq^2-3qr\geqslant 0.$$

В случае $a=b=c=0$ получим равенство. Зафиксируем p и q. Заметим, что $7p^2>3q$, если не все числа a,b,c равны 0, поэтому выражение слева линейно по r, причем минимум достигается при минимальном r.

- Если подставить $a=0$, то исходное неравенство переписывается в виде

  $$(b^2-c^2)(b^3-c^3)=(b-c)^2(b+c)(b^2+bc+c^2)\geqslant 0.$$

  Случай равенства $a=0$, $b=c$.

- Если подставить $a = b$, то исходное неравенство переписывается в виде

$$c(c^2 - a^2)^2 \geqslant 0.$$

Случай равенства $a = b = c$.

33. а) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$. Докажите, что

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a + b + c} \geqslant \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$3p^5 - 14p^3q + 8q^2p + 12p^2r + 9qr \geqslant 0.$$

В случае $a = b = c = 0$ получим равенство. Зафиксируем p и q. Функция слева линейна по r, коэффициент при r больше 0, поэтому минимум достигается при минимальном r.

- Если $a = 0$, то, обозначив $t = \frac{b}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$3t^4 - 2t^3 - 2t + 4 \geqslant 0,$$

что верно, случая равенства нет.

- Если $a = b$, то, обозначив $t = \frac{a}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$4t^5 - 5t^4 + 6t^3 - 10t^2 + 2t + 3 = (t - 1)^2(4t^3 + 3t^2 + 8t + 3) \geqslant 0.$$

Случай равенства $a = b = c$.

б) Найдите наименьшее $k \geqslant 0$ такое, что для любых a, b, $c \geqslant 0$ справедливо

$$k\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + (1 - k)\frac{3abc}{a + b + c} \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Решение. Рассуждая как в предыдущем пункте, получаем, что коэффициент при r равен $12kp^2 + 9(1 - k)q$. Заметим, что $k \leqslant 1$, поэтому минимум достигается при минимальном r.

- Если $a = 0$, то, обозначив $t = \frac{b}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$3k(t^4 + 1) \geqslant t^3 + t.$$

При $k < \frac{1}{3}$ и $t = 1$ неравенство не выполняется, поэтому k не меньше $\frac{1}{3}$. Если $t = \frac{1}{3}$, то неравенство можно переписать в виде

$$(t - 1)^2(t^2 + t + 1) \geqslant 0,$$

что верно, поэтому при $a = 0$ и $k \geqslant \frac{1}{3}$ неравенство выполнено всегда, причем константу $\frac{1}{3}$ нельзя уменьшить.

- Если $a = b$, то, обозначив $t = \frac{a}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$(t-1)^2((12k-4)t^3 + (21k-9)t^2 + (12k-2)t + 3k) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (12k-4)t^3 + (21k-9)t^2 + (12k-2)t + 3k \geqslant 0. \Leftrightarrow k \geqslant \frac{4t^3+9t^2+t}{12t^3+21t^2+12t+3}.$$

Максимум правой части при неотрицательных t достигается в точке, которая является большим корнем уравнения $t^4 + 9t^3 + 17t^+8t - 4$. Значение в этой точке и есть ответ (поскольку оно больше $\frac{1}{3}$).

34. Известно, что a, b, $c > 0$, $X = \frac{a^2+b^2}{2c^2} + \frac{b^2+c^2}{2a^2} + \frac{c^2+a^2}{2b^2}$; $Y = \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b}$. Докажите, что

$$4X + 69 \geqslant 27Y.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$-225r^3 - 50p^3r^2 + 4q^3r + 55pqr^2 + 6p^2q^2r - 4p^4qr - 4pq^4 + 2p^3q^3 \geqslant 0. \quad (*)$$

Докажем, что для второй производной по r левой части выполнено неравенство

$$-1350r - 100p^3 + 110pq \leqslant 0$$

Зафиксируем p и r. Левая часть линейна по q, поэтому максимальное знавение выражение слева принимает, когда $a = b$. В силу того, что неравенство однородно, будем считать, что $a = b = 1$. При подстановке, неравенство примет вид

$$-20(5c^3 + 19c^2 + 100c + 29) \leqslant 0,$$

что верно для положительных c.

Зафиксируем p и q. По доказанному выше, слева стоит вогнутая по r функция, поэтому она достигает минимума при минимальном или максимальном r.

- Если подставить $a = 0$ в $(*)$, то оно переписывается в виде

$$pq^3(2p^2 - 4q) \geqslant 0.$$

Выражение в скобках всегда не меньше 0. Случай равенства $a = b = 0$ не подходит в исходное неравенство.

- Если подставить $a = b = 1$ в исходное неравенство, то оно примет вид

$$(c-2)^2(c-1)^2(4c+1) \geqslant 0.$$

Случай равенства $2a = 2b = c$ и $a = b = c$.

35. а) Дан однородный симметрический многочлен $P(a,b,c)$ степени не выше 8. Приведите алгоритм проверки того, что он принимает только неотрицательные значения при неотрицательных значениях переменных. Можно считать, что мы умеем находить нули и экстремумы любой функции одной переменной.

Решение. Приведем пример алгоритма в случае, когда степень $P(a,b,c)$ равна 8, для меньших степеней алгоритм аналогичен. Неравенство $P(0,b,c) \geqslant 0$ проверяется следующим образом. Сначала проверим, что выполняется неравенство $P(0,0,c) \geqslant 0$. Затем, обозначив $t = \frac{c}{b}$ и разделив неравенство на b^8, получим неравенство от одной переменной $P(0,1,t) \geqslant 0$. Неравенство $P(a,a,c) \geqslant 0$ также проверяется аналогично.

Перепишем неравенство $P(a,b,c) \geqslant 0$ в терминах p, q, r. Поскольку многочлен P однородный, можно считать, что $p = 1$. Тогда неравенство запишется в виде

$$A(q)r^2 + B(q)r + C(q) \geqslant 0.$$

Зафиксируем q такое, что $A(q) \leqslant 0$. Тогда неотрицательность достаточно проверять для минимального или максимального r, то есть в случаях $a = b$ и $a = 0$. Зафиксируем q такое, что $A(q) > 0$. Минимум левой части неравенства достигается в точке $r_0 = -\frac{B(q)}{2A(q)}$. Заметим, из условия $T(p,q,r) \geqslant 0$ следует, что r лежит в отрезке $I = \left[\frac{9q-2}{27} - \frac{2-6q}{27}\sqrt{1-3q}, \frac{9q-2}{27} + \frac{2-6q}{27}\sqrt{1-3q}\right]$. Если r_0 не лежит в этом отрезке, то достаточно проверить неотрицательность в случаях $a = b$ и $a = 0$. Иначе достаточно проверить неотрицательность в точке r_0. При подстановке r_0 получим неравенство на q:

$$4A(q)C(q) - B^2(q) \geqslant 0. \quad (*)$$

Получаем следующий алгоритм:

1. Проверить, что выполнено неравенство $P(0,b,c) \geqslant 0$.
2. Проверить, что выполнено неравенство $P(a,a,c) \geqslant 0$.
3. Переписать неравенство $P(a,b,c) \geqslant 0$ в терминах p, q, r и подставить $p = 1$.
4. Найти множество тех q, для которых выполнено неравенство $A(q) > 0$.
5. Найти множество тех q, для которых точка $r_0 = -\frac{B(q)}{2A(q)}$ лежит в отрезке I.
6. Для q, лежащих в пересечении множеств из пунктов 4 и 5, проверить выполнение неравенства $(*)$.

б) Приведите аналогичный алгоритм для однородного симметрического многочлена степени не выше 17.

Указание. Вспомните формулы Кардано и Феррари. Обратите внимание на то, что корни в этих формулах могут получаться комплексные.

в*) Приведите аналогичный алгоритм для однородного симметрического многочлена произвольной степени (или хотя бы для степени 18).

36. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Докажите, что

$$2(a+b+c-2)^2+(ab+bc+ca)(2+3(a+b+c)) \geqslant 35.$$

Решение. Сделаем замену $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$. После этого исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$2p^4+10q^2-8p^2q-8p^2+16q+3p^2q^2-6p^3r-6q^3-4pr-27 \geqslant 0,$$

при условии, что $p=3$. Зафиксируем p и q. Функция слева линейна по r, причем коэффициент при r меньше 0, поэтому минимальное значение левой части достигается при максимальном r, то есть при $x=y$. В этом случае $z=3-2x$, и после подстановки неравенство переписывается следующим образом:

$$(x-1)^2(54x^4-144x^3+165x^2-70x+21) \geqslant 0.$$

Это неравенство верно, случай равенства $a=b=c=1$.

37. Известно, что a, b, $c \geqslant 1$ и $a+b+c=9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab+bc+ca} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Решение. Сделаем замену $a=(x+1)^2$, $b=(y+1)^2$, $c=(z+1)^2$. После этого исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$q^2+p^2-2pr+2pq-2p-6r-6 \geqslant 0,$$

при условии, что $p^2-2q-2p=6$. Зафиксируем p и q. В левой части неравенства стоит линейная по r функция, коэффициент при r отрицательный, поэтому минимальное значение левой части достигается при максимальном r, то есть при $x=y$. В этом случае $a=b$ и $c=9-2a$, и после подстановки исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$-3a^2+16a-9 \leqslant 4\sqrt{9a-2a^2}.$$

При $1 \leqslant a \leqslant \frac{9}{2}$ левая часть больше 0, поэтому можно возвести в квадрат. После возведения, неравенство примет вид

$$3(a-3)^2(3a^2-14a+3) \leqslant 0,$$

что верно при $1 \leqslant a \leqslant \frac{9}{2}$. Случай равенства $a=b=c=3$.

Также эту задачу можно решить, используя соображения раздела 5.

38. Известно, что a, b, $c>0$. Докажите, что

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3+\frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2.$$

Решение. Сделаем замену $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{a+c}$, $z = \frac{c}{a+b}$. Заметим, что $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = 1$. После замены исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$p^3r - 3pqr + 3r^2 - 2r + 13 \geqslant 0,$$

при условии $q + 2r = 1$. Зафиксируем q и $r > 0$. Функция слева монотонна по p, поскольку производная, равная $3p^2r - 3qr$, не меньше 0. Поэтому достаточно проверить неравенство для $x = y$, то есть $a = b$. Подставив в исходное неравенство, и обозначив $t = \frac{c}{a}$, перепишем неравенство в виде

$$(t-1)^2(t^3 + 5t^2 + 12t + 4) \geqslant 0,$$

что верно. Случай равенства $a = b = c$.

39. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{4-bc} + \frac{b^2}{4-ca} + \frac{c^2}{4-ab} \leqslant 1.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$abc(a^3+b^3+c^3) - 4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) + a^2b^2c^2 + 16(a^2+b^2+c^2) + 16(ab+bc+ca) - 64 \leqslant 0.$$

Подставив в это неравенство условие, получим

$$abc(a^3 + b^3 + c^3 + 4(ab + bc + ca) + abc - 16) \leqslant 0.$$

Если $a = 0$, то получаем случай равенства $a = 0$, $b^2 + c^2 = 4$. В противном случае, сократив на abc, получим неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leqslant 16 - abc - 4(ab + ac + bc). \quad (*)$$

Сделаем замену $a = x-2$, $b = y-2$, $c = z-2$, где $x, y, z > 2$. Неравенство перепишется в виде

$$p^3 - 3pq + 4r \leqslant 6p^2 - 14q,$$

при условии $r = 4q - p^2$. Чтобы сделать неравенство однородным, домножим неравенство на условие:

$$(p^3 - 3pq + 4r)(4q - p^2) \leqslant (6p^2 - 14q)r \Leftrightarrow 0 \leqslant r(10p^2 - 30q) - (p^3 - 3pq)(4q - p^2).$$

Коэффициент при r равен 0 только если $x = y = z$, то есть $a = b = c$. В этом случае, при подстановке в исходное неравенство получим случай равенства $a = b = c = 1$. В противном случае, правая часть минимальна при минимальном r.

- Если $x = 0$, то $a = 2$, и при подстановке в исходное условие, получим $b = c = 0$, что является частным случаем равенства, описанного выше.

- Если $x = y$, то

$$z = 4x - x^2 = 4(a+2) - (a+2)^2 = 4 - a^2.$$

Поэтому $a = b$, $c = 2 - a^2$. Подставив эти равенства в $(*)$, получим

$$0 \leqslant (a-1)^2(a+2)^2(a^2 - 2a + 2).$$

Получаем случай равенства $a = b = c = 1$.

40. Для вещественных чисел a, b, c докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 3(a^3b + b^3c + c^3a),$$

причем равенство возможно только в случаях $a = b = c$ и

$$\frac{a}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}, \quad \frac{b}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}$$

$$\frac{c}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}.$$

Подсказка. Сделайте замену $a = x + 2ty$, $b = y + 2tz$, $c = z + 2tx$ для некоторого t.

Решение. Заметим, что достаточно доказать неравенство для неотрицательных a, b, c. Сделаем замену, указанную в подсказке, для $t = \cos \frac{\pi}{7}$, считая $x, y, z \geqslant 0$. Тогда

$$a^3b = \left(6x^2y^2 \cos \frac{\pi}{7} + 8y^4 \cos^3 \frac{\pi}{7} + xyz(12x \cos^2 \frac{\pi}{7} + 24y \cos^3 \frac{\pi}{7})\right) +$$

$$+ \left(x^3y + 2x^3z \cos \frac{\pi}{7} + 12y^3x \cos^2 \frac{\pi}{7} + 16y^3z \cos^4 \frac{\pi}{7}\right).$$

Расписав аналогично два оставшихся слагаемых, получим, что сумма первых скобок будет симметрической. В сумме вторых скобок будут коэффициенты двух видов: $\left(1 + 16 \cos^4 \frac{\pi}{7}\right)$ и $\left(2 \cos \frac{\pi}{7} + 12 \cos^2 \frac{\pi}{7}\right)$. Но эти коэффициенты равны, поэтому сумма левых скобок будет также симметрической. Заметим, что сумма линейна по r и коэффициент при r равен $12p\left(\cos^2 \frac{\pi}{7} + 2 \cos^3 \frac{\pi}{7}\right)$. При разложении на элементарные симметрические левой части исходного неравенства r встречаться не будет, поэтому, если перенести все в правую часть, то коэффициент при r будет отрицательным, и минимальное значение левой части достигается при максимальном r.

Если $x = y = 0$, то неравенство верно и единственный случай равенства $a = b = c = 0$. Иначе можно считать, что $x = y = 1$, так как неравенство однородно. После подстановки и преобразований получим:

$$(z-1)^2(z - 4 \cos^2 \frac{2\pi}{7}(1 + 2 \cos \frac{\pi}{7}) + 2 \cos \frac{\pi}{7})^2 \geqslant 0.$$

Получаем случаи равенства $x = y = z$, то есть $a = b = c$, и

$$x = y = (4\cos^2\frac{2\pi}{7}(1 + 2\cos\frac{\pi}{7}) - 2\cos\frac{\pi}{7})z,$$

что после преобразований приводит к случаю равенства из условия задачи.

Существует и другое решение. Обозначим

$$f(a, b, c) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Можно заметить, что

$$f(a, b, c) = \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc - c^2 + ac)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - 2bc + ac - a^2 + ab)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(c^2 - 2ac + ab - b^2 + bc)^2.$$

Или же

$$f(a, b, c) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 3ab + 3ac - 2c^2)^2 + \frac{3}{4}(a^2 - ab - ac - b^2 + 2bc)^2.$$

41. а) Какие условия на числа p, q, r равносильны тому, что все числа a, b, c не меньше 1?

Решение. По задаче 22 вещественность чисел a, b, c равносильна тому, что p, q, r вещественные и выполняется неравенство $T(p, q, r) \geqslant 0$. Вещественные числа $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ неотрицательны, и по теореме о неотрицательности это равносильно следующим условиям:

$$(a - 1) + (b - 1) + (c - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow p \geqslant 3,$$

$$(a - 1)(b - 1) + (b - 1)(c - 1) + (c - 1)(a - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow q - 2p + 3 \geqslant 0,$$

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow r - q + p - 1 \geqslant 0.$$

б) А тому, что a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника (возможно, вырожденного)?

Решение. Как и в предыдущей задаче p, q, r должны быть вещественными и должно выполняться неравенство $T(p, q, r) \geqslant 0$. Также числа

$$a,\ b,\ c,\ (a + b - c),\ (a - b + c),\ (-a + b + c)$$

неотрицательны, что по теореме о неотрицательности равносильно следующим условиям:

$$p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad r \geqslant 0, \quad 4q - p^2 \geqslant 0, \quad -p^3 + 4pq - 8r \geqslant 0.$$

Заметим, что четвертое неравенство является следствием третьего, поэтому его можно убрать.

в) А тому, что для неотрицательных a, b, c выполнено $2\min(a,b,c) \geqslant \max(a,b,c)$?

Решение. Условие равносильно следующим неравенствам:

$$a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad 2a \geqslant b, \quad 2a \geqslant c, \quad 2b \geqslant a, \quad 2b \geqslant c, \quad 2c \geqslant a, \quad 2c \geqslant b.$$

Заметим, что условия $2a \geqslant b$, $2b \geqslant a$ равносильны тому, что $(2a-b)(2b-a) \geqslant 0$, поэтому условие равносильно следуюзим неравенствам:

$$a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad (2a-b)(2b-a) \geqslant 0, \quad (2b-c)(2c-b) \geqslant 0, \quad (2a-c)(2c-a) \geqslant 0.$$

Осталось записать условия теоремы о неотрицательности для двух троек чисел.

42. Известно, что a, b, $c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Докажите, что

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geqslant \frac{7}{5}.$$

Решение. Обозначим $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{b}$, $z = \frac{a}{c}$ и перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geqslant \frac{7}{5}, \quad (*)$$

при условии $xyz = 1$, и x, y, $z \in \left[\frac{1}{9}, 9\right]$. Последний переход был неэквивалентным, но если мы докажем новое неравенство, то из него будет следовать исходное. Перепишем $(*)$ следующим образом:

$$8 + 3p - 2q - 7r \geqslant 0.$$

Зафиксируем q и r, тогда левая часть принимает наименьшее значение при наименьшем p. Рассмотрим, какие значения может принимать p. На значения p наложены следующие ограничения:

- $T(p,q,r) \geqslant 0$. В этом случае для минимального p выполнено $x = y$. Неравенство переписывается в виде

  $$(3-x)(2x^2 - 2x + 1) \geqslant 0,$$

  что верно, поскольку $x \leqslant 3$. Случай равенства $x = y = 3$, $z = \frac{1}{9}$, то есть $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $c = 3$ и его циклические перестановки.

- условия из теоремы о неотрицательности для чисел $x - \frac{1}{9}$, $y - \frac{1}{9}$, $z - \frac{1}{9}$. В этом случае для минимального p выполнено $x = \frac{1}{9}$. Учитывая, что $z = \frac{9}{y}$, перепишем неравенство в виде $(y-3)^2 \geqslant 0$. Случай равенства такой же.

- условия из теоремы о неотрицательности для чисел $9 - x$, $9 - y$, $9 - z$. В этом случае для минимального p выполнено $x = 9$. Учитывая, что $z = \frac{1}{9y}$, перепишем неравенство в виде

  $$-27y^2 + 50y - 3 \geqslant 0,$$

  что верно, поскольку $y \leqslant 1$.

43. Известно, что a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\right).$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$18r^2 + (6p^3 - 11pq)r - p^2q^2 \leqslant 0.$$

Зафиксируем p и q. Слева стоит квадратичная по r функция, коэффициент при r^2 положителен, коэффициент при r неотрицателен, поэтому функция монотонно возрастает. На r наложены следующие ограничения:

$$r \geqslant 0, \quad T(p,q,r) \geqslant 0, \quad -p^3 + 4pq \geqslant 8r,$$

поэтому достаточно проверить неравенство для случаев, когда $a = b = 1$ и $a = b + c = 1$ (в силу однородности). Оба случая легко разбираются, случаи равенства $a = b = c$ и $a = 2b = 2c$.

44. Докажите, что существует многочлен $S(x,y,z)$ такой, что тройка a, b, c является вещественной тогда и только тогда, когда $S(x,y,z) \geqslant 0$, где

$$x = a+b+c, \quad y = a^2+b^2+c^2, \quad z = a^3+b^3+c^3.$$

Решение. Заметим, что

$$p = x, \quad q = \frac{x^2-y}{2}, \quad r = z - p^3 + 3pq = \frac{x^3-3xy+2z}{2}.$$

Определим многочлен S следующим образом:

$$S(x,y,z) = T(p,q,r) = T\left(x, \frac{x^2-y}{2}, \frac{x^3-3xy+2z}{2}\right)$$

Понятно, $S(x,y,z)$ — искомый многочлен.

45. Докажите, что для любого числа $s \in \left[\frac{86}{9}, 10\right]$, существуют числа x, y, z такие, что

$$a+b+c = 4, \quad a^2+b^2+c^2 = 6, \quad a^3+b^3+c^3 = s,$$

а вот ни для каких других s это не верно.

Решение. Из предыдущей задачи a, b, c вещественные тогда и только тогда, когда $S(4,6,s) \geqslant 0$. Несложно заметить, что многочлен $S(x,y,z)$ является квадратичной функцией по z с отрицательным коэффициентом при z^2. Отсюда следует, что возможные значения s — это отрезок. На краях отрезка верно, что $S(x,y,z) = 0$, то есть $a = b$. Подставляя в условия, получаем требуемое.

46. (США, отбор на IMO, 2001) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Докажите, что

$$ab + bc + ca - abc \leqslant 2.$$

Решение 1. Положим

$$x = a + b + c = p, \quad y = a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q, \quad z = abc.$$

a, b, c вещественны, если $S(x, y, z) = T(x, \frac{x^2 - y}{2}, z) \geqslant 0$. Ясно также, что если $S(x, y, z) = 0$, то две переменных из a, b, c равны.

Теорема о неотрицательности переписывается следующим образом:

$$p \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0, \quad q \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - y \geqslant 0, \quad r \geqslant 0 \Leftrightarrow z \geqslant 0.$$

Условие $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ переписывается в виде $y + z = 4$. Неравенство $ab + bc + ca - abc \leqslant 2$ переписывается в виде $x^2 - y - 2z \leqslant 4$.

Зафиксируем y и z. Неравенство достаточно проверить для максимального x (максимальное x существует, поскольку $x \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2) \leqslant 12$). В соответствующей тройке a, b, c две переменные равны. Подставив в исходное неравенство $a = b$, получим верное неравенство. Случаи равенства: $a = b = c = 1$ и $a = b = \sqrt{2}$, $c = 0$.

Решение 2. (Дидин Павел) Исходное неравенство переписывается следующим образом: $q - r \leqslant 2$, при условии $p^2 - 2q + r = 4$. Зафиксируем q_0 и r_0, для которых существует p_1, удовлетворяющее условию. Для этих q_0 и r_0 рассмотрим минимальное p_0 такое, что тройка (p_0, q_0, r_0) допустима (но не обязательно выполнено $p_0^2 - 2q_0 + r_0 = 4$). Поскольку исходное неравенство не зависит от p, то докажем, что оно выполняется для тройки (p_0, q_0, r_0), отсюда будет следовать справедливость неравенства для тройки (p_1, q_0, r_0). В силу минимальности p_0 достаточно проверить неравенство для $a = b$, при условии $p^2 - 2q + r \leqslant 4$.

47. (Китай-запад, 2004) Известно, что a, b, $c > 0$. Докажите, что

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Решение. Перепишем исходное неравенство следующим образом:

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Сделаем замену $x = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, $y = \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}$, $z = \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}}$.

Неравенство переписывается в следующем виде:

$$1 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Условия переписываются следующим образом:

$$x, y, z \geqslant 1 \Leftrightarrow p - 3 \geqslant 0, \quad q - 2p + 3 \geqslant 0, \quad r - q + p - 1 \geqslant 0.$$

На новые переменные наложено следующее условие:

$$(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=1 \Leftrightarrow (r+p)^2-(q+1)^2=1.$$

Левое неравенство доказывается легко, будем доказывать правое. Запишем его в виде

$$q \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}\,r.$$

Сделаем замены: $p'=p+r$, $q'=q$, $r'=r$. Все условия могут быть переформулированы в терминах p', q', r'. Значит, мы можем зафиксировать значения p' и q', и нам надо доказать неравенство

$$r' \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}q'.$$

Осталось доказать неравенство в случае, когда $x=y$.

48. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+nabc=n+3$.

а) Пусть $0 \leqslant n \leqslant \frac{3}{2}$. Докажите, что $a+b+c \leqslant 3$.

б) Пусть $\frac{3}{2} \leqslant n \leqslant 2$. Докажите, что $a+b+c \leqslant \sqrt{2(n+3)}$.

в) Пусть $n=2$. Докажите, что $ab+bc+ac-abc \leqslant \frac{5}{2}$.

Указание: а), б) Введите обозначения

$$x=a+b+c, \quad y=a^2+b^2+c^2+nabc, \quad z=abc.$$

с) Аналогично решению задачи 46.

49. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(2+\sqrt{4-3abc}).$$

Решение. Обозначим

$$x=a^2+b^2+c^2+abc=4, \quad y=ab+bc+ca, \quad z=abc.$$

Тогда $p=\sqrt{x-z+2y}$, $q=y$, $r=z$. Условие вещественности чисел a,b,c записывается в виде $S(x,y,z)=T(\sqrt{x-z+2y},y,z) \geqslant 0$. Хоть это уже и не многочлен, но все еще непрерывная функция в области $x-z+2y \geqslant 0$. Как обычно, из равенства $S(x,y,z)=0$ следует, что две из a, b, c равны. Неравенство переписывается следующим образом:

$$q^2-2rp \geqslant r(2+\sqrt{4-3r}) \Leftrightarrow y^2-2z\sqrt{x-z+2y} \geqslant z(2+\sqrt{4-3z}).$$

Зафиксируем x и z. Заметим, что выражение слева монотонно возрастает по y, ведь его производная неотрицательна:

$$2y-2\frac{2z}{2\sqrt{x-z+2y}} \geqslant 0 \Leftrightarrow y\sqrt{x-z+2y} \geqslant r \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant r,$$

что очевидно. Теперь нам надо рассмотреть минимальный возможный y, он берется или из того, что $S(x,y,z)=0$, или из $x-z+2y=0$ (как граница области определения, но этот случай невозможен). Дальше можно без потери общности полагать, что $a=b$.

50. Докажите, что следующие функции непрерывны: $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна для любого $x\in(0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна для любого $x\in(0,+\infty)$, $f(x,y)=x+y$ непрерывна для любых $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Решение. Если $f(x)=\frac{1}{x}$, то положим $\delta=\min\left(\frac{x}{2},\frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}\right)$. Тогда

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{y-x}{xy}\right|\leqslant\frac{\delta}{x(x-\delta)}\leqslant\varepsilon.$$

Если $f(x)=\sqrt{x}$, положим $\delta=\min\left(1,x,\left(\frac{2\sqrt{x}\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right)$. Тогда

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leqslant\frac{\delta}{2\sqrt{x}-\sqrt{\delta}}\leqslant\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{x}-\sqrt{\delta}}\leqslant\varepsilon.$$

Если $f(x,y=x+y)$, то положим $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$(x+y)-(x_1+y_1)\leqslant\sqrt{(x-x_1)^2}+\sqrt{(y-y_1)^2}\leqslant2\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\leqslant\delta.$$

51. Пусть функция $g(x)$ непрерывна для всех $x\in M\subset\mathbb{R}^n$, а все её значения лежат в множестве $N\subset\mathbb{R}$. Пусть также функция $f(y)$ непрерывна для всех $y\in N$ и принимает вещественные значения. Докажите, что функция $f(g(x))$ непрерывна для всех $x\in M$.

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0\in M$ и $\varepsilon>0$. В силу непрерывности функции f знаем, что для любогофиксированного x существует такое $\delta_1>0$, что если $|x-y|<\delta_1$, то $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Поскольку функция $g(x)$ непрерывна, то существует такое δ, что если $||x_0-y||<\delta$, то $|g(x_0)-g(y)|<\delta_1$. Получается, что если $||x_0-y||<\delta$, то $|f(g(x_0))-f(g(y))|<\varepsilon$, поэтому функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

52. а) Докажите, что многочлен $P(x)$ от одной переменной является непрерывной функцией для всех $x\in\mathbb{R}$.

б) Докажите, что многочлен $P(x_1,\ldots,x_n)$ от n переменных является непрерывной функцией для всех $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Указание. Докажите, что если функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g(y_1,\ldots,y_m)$ непрерывны на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, то функция $f(x_1,\ldots,x_n)\cdot g(y_1,\ldots y_m)$ непрерывна на $\mathbb{R}^{n+m}$.

53. Предположим, на переменные a, b, c наложено симметрическое условие G. Зафиксируем $r=r_0$, для которого существует допустимая тройка (p_0,q_0,r_0) такая, что $G(p_0,q_0,r_0)=0$. Предположим, что условие G равносильно тому, что $p=f(q)$

(с учётом фиксированного r), где f — некоторая функция, а множество возможных значений q ограничено. Докажите, что q достигает своего максимума и минимума, причём в экстремальных точках обязательно какие-то две из переменных равны,

а) если f — линейная функция;

б) если f — многочлен.

Решение. Заметим, что множество возможных значений q определяется следующими условиями. Во-первых, должно быть выполнено $T(p,q,r) = T(f(q),q,r) \geqslant 0$. Во-вторых, p должно быть неотрицательным, то есть $f(q) \geqslant 0$. Решением первого неравенства служит объединение нескольких отрезков, а решением второго — объединение нескольких отрезков и лучей. В пересечении получится объединение нескольких отрезков. На концах этих отрезков либо $T(p,q,r) = 0$, либо $p = 0$. В обоих случаях получаем, что какие-то две переменные равны. Заметим, что если f является непрерывной функцией, а не обязательно многочленом, то условие задачи остается верным. Действительно, в этом случае множество решений неравенства $f(q) \geqslant 0$ замкнуто, следовательно, максимум и минимум существуют.

54. Предположим, на переменные a, b, c наложено симметрическое условие G. Пусть (x,y,z) — произвольная перестановка (p,q,r). Зафиксируем $z = z_0$, для которого существует допустимая тройка (p,q,r) такая, что $G(p,q,r) = 0$. Предположим, что условие G равносильно тому, что $x = f(y)$ (с учётом фиксированного z), где f — многочлен, а множество возможных значений y ограничено. Тогда y достигает своего максимума и минимума, причём если $z = r$, то в любой точке экстремума $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, иначе в любой точке экстремума $abc(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Решение. Аналогично предыдущей задаче.

55. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = 10$. Докажите, что

$$\frac{9}{8} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \leqslant \frac{6}{5}.$$

56. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите, что

$$(a+b+c)(1+abc) \geqslant 6.$$

57. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $ab+bc+ca = a^3+b^3+c^3$. Докажите, что

$$ab+bc+ca \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

58. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$. Им естественным образом соответствуют p, q, r, причём оказалось, что $q + r = 4$. Докажите, что

$$p^3 - 27r \geqslant 7(p^2 - 3q).$$

59. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca+(abc-1)^2$. Докажите, что

$$ab+bc+ca+3 \geqslant 2(a+b+c).$$

60. Является ли отрезок $[0,1]$ компактом? Является ли луч $[0,+\infty)$ компактом? А множество, состоящее из точки $(1,1,\ldots,1)$? Шар радиуса 1 с центром в точке $(1,1,\ldots,1)$? Этот же шар без точки $(1,1,\ldots,1,0)$? А сфера радиуса 1 с центром в точке $(1,1,\ldots,1)$?

Следующей задачей в дальнейшем можно будет пользоваться без доказательства.

Решение. Да, является. Нет, он не ограничен. Да, является, Да, является. Нет, множество не замкнуто. Да, является.

61. Рассмотрим набор условий

$$P_1(x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots,P_s(x_1,\ldots,x_n)=0,P_{s+1}(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 0,\ldots,P_m(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 0,$$

где m — натуральное, а s — целое неотрицательное число, $P_1,\ldots,P_m$ — многочлены от n переменных. Предположим, что множество точек M в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих всем этим условиям, ограничено. Докажите, что M является компактом.

Решение. Докажем следующий вспомогательный факт: если функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывна в точке $A=(a_1,\ldots,a_n)$ и $f(A)>0$, то существует шар с центром в точке A такой, что значения функции f на этом шаре положительны. Действительно, рассмотрим $\varepsilon=\frac{f(A)}{2}$ и соответствующий ему δ (из определения непрерывности функции f). Тогда шар радиуса δ является искомым.

62. Дана симметрическая непрерывная функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, определенная на компакте $M\subset\mathbb{R}^n$. Предположим, f такова, что при любых фиксированных $a_4,\ldots,a_n$ (для которых существуют a_1, a_2, a_3 такие, что $(a_1,\ldots a_n)\in M$) функция

$$h(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2,x_3,a_4,\ldots,a_n)$$

достигает своих экстремальных значений только когда $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)=0$ (или $x_1x_2x_3(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)=0$). Докажите, что функция f достигает своих экстремальных значений, причём в точке экстремума среди $x_1,\ldots,x_n$ есть максимум два различных числа (или максимум два различных ненулевых числа).

Решение. Докажем для точки минимума (для точки максимума аналогично). Предположим, что минимум достигается в точке $(a_1,\ldots,a_n)$. Предположим, что a_1, a_2, a_3 — попарно различные числа (попарно различные ненулевые числа). Тогда рассмотрим функцию

$$h(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2,x_3,a_4,\ldots,a_n).$$

По условию она достигает минимума, если какие-то две переменные x_1, x_2, x_3 равны (какие-то две переменные x_1, x_2, x_3 равны или одна из переменных равна 0). Получаем противоречие.

63. Известно, что a, b, c, $d\geqslant 0$, $a+b+c+d=1$. Докажите, что

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2+(1-d^2)^2\geqslant 3.$$

64. (Россия, отбор на IMO, 2015) Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Докажите, что

$$a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab \leqslant 1.$$

65. (IMO Shortlist, 2010) Про вещественные a, b, c, d известно, что $a+b+c+d=6$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Докажите, что

а) $abcd \leqslant 3$;

б) $36 \leqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \leqslant 48$.

66. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$. Докажите, что

$$a^3+b^3+c^3+d^3+4\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3} \geqslant 2(abc+bcd+cda+dab).$$

67. (Всероссийская олимпиада, 2016) Известно, что a, b, c, $d>0$ и $a+b+c+d=3$.

а) Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

б) Докажите, что

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

в) Известно, что $x \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b^x}+\frac{1}{c^x}+\frac{1}{d^x}+\left|\frac{(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})(1-\frac{1}{c})(1-\frac{1}{d}))}{2}\right|^x \leqslant \frac{1}{a^xb^xc^xd^x}.$$

68. Известно, что $a,b,c,d \geqslant 0$ и $a+b+c+d=4$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+4 \geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

69. Известно, что a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$, $a+b+c+d+e=20$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=100$. Найдите экстремальные значения выражения

$$abcd+abce+abde+acde+bcde.$$

70. Известно, что a, b, c, $d>0$ и $a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Докажите, что

$$(a+b+c+d)(17+46abcd) \geqslant 252.$$

71. (АРМО, 2004) Для вещественных чисел a, b, c докажите, что

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

72. (Иран, 2005) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2$. Докажите, что

$$ab + bc + ca \leqslant \frac{3}{2}.$$

Указание: Допустим противное, пусть $ab + bc + ca > \frac{3}{2}$. Покажите, что в этом случае выполнено неравенство $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} < 2$.

73. В остроугольном треугольнике со сторонами a, b, c радиус описанной окружности равен R. Докажите, что

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} > 5R.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{ab}{cR} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}.$$

Обозначим $x = \operatorname{ctg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\beta$, $z = \operatorname{ctg}\gamma$. Тогда исходное неравенство переписывается в виде

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} > \frac{5}{2},$$

где x, y, $z \geqslant 0$ и $xy + xz + yz = 1$. Это неравенство переписывается в виде

$$\frac{p^2+q}{pq-r} > \frac{5}{2},$$

при условии $q = 1$. Зафиксируем p и q. Левая часть минимальна при минимальном r, то есть если $x = 0$ или $x = y$.

1. Если $x = 0$, то $yz = 1$. Без ограничения общности $y \leqslant 1$. Тогда неравенство переписывается следующим образом: $(1-y)(5y^2 - y + 4) > 0$, что верно.

2. Если $x = y$, то $z = \frac{1-x^2}{2x}$ и неравенство переписывается в виде

   $$5x^3 - 9x^2 + 5x - 1 < 0,$$

   что верно, так как $x > 1$.

74. (Shortlist IMO, 2011) Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, причём $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(a+c-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \geqslant \frac{3}{(abc)^2}.$$

Указание: Сделайте замену $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$, после чего можно будет несложно показать, что два из x, y, z равны, а значит, и два из чисел a, b, c

равны. Далее можно анализировать многочлены от одной переменной с помощью производной.

75. Назовём многочлен от трёх переменных $G(a,b,c)$ *циклическим*, если его значение не меняется при циклической перестановке переменных (то есть $G(a,b,c) = G(b,c,a) = G(c,a,b)$). Докажите, что любой циклический многочлен от a, b, c можно представить в виде $X(a,b,c) + Y(a,b,c)(l_{12} - l_{21})$, где X и Y — симметрические многочлены.

Указание: Если такие X, Y нашлись, то верно, что $G(a,b,c) = X + Y(l_{12} - l_{21})$, $G(b,a,c) = X - Y(l_{12} - l_{21})$, откуда видим, что если такие X, Y существуют, то они равны $\frac{G(a,b,c)+G(b,a,c)}{2}$ и $\frac{G(a,b,c)-G(b,a,c)}{2}(l_{12} - l_{21})$ соответственно. Докажите, что они и являются искомыми.

76. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{2}(ab + bc + ca)$. Докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant \frac{25}{8}(a^3b + b^3c + c^3a).$$

77. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leqslant 9.$$

78. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + 3b^2}{a + 3b} + \frac{b^2 + 3c^2}{b + 3c} + \frac{c^2 + 3a^2}{c + 3a} \geqslant 3.$$

79. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$10(a + b + c)^5 \geqslant 81(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b + b^2c + c^2a + 7abc).$$

80. (Корея, 2012) Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2 = 2abc+1$. Найдите максимум выражения

$$(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab).$$

Указание: Сделайте замену $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$.

81. Известно, что $a, b, c \in [0, 1]$ и $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = abc$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a + b + c}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

82. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$, $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ и $a + b + c \geqslant \sqrt{8}$. Докажите, что

$$a + b + c \geqslant 2 + \sqrt[3]{abc}.$$

83. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = 11(a+b+c-3)$. Докажите, что

$$\sqrt{a+2}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+2} \geqslant \sqrt{a+b+c+24}.$$

84. Известно, что a, b, $c > 0$, $abc = 1$. Докажите, что

а)

$$a^{10}+b^{10}+c^{10} \geqslant 3+45((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2);$$

б*)

$$a^{10}+b^{10}+c^{10} \geqslant 3+46((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2);$$

в) существует константа k такая, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 3+kn((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2);$$

г*) существует константа $k > 0$ такая, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 3+kn^2((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2),$$

но ни для какого $\varepsilon > 0$ не существует константы $k' > 0$ такой, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 3+k'n^{2+\varepsilon}((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2).$$

85. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$, $(a+1)(b+1)(c+1) = 84$, $(a+b+c)(ab+bc+ac) = \frac{14256}{abc}$. Найдите максимум выражения

$$(a+b+c)^2+(ab+bc+ac)^2+a^2b^2c^2.$$

86. Известно что a, b, c, $d \geqslant 0$, $a+b+c+d = 3$, $a^2+b^2+c^2+d^2 = 5$, $a^4+b^4+c^4+d^4 = 17$. Найдите максимально возможное значение d.

A. Doledenok, M. Fadin, A. Menshchikov, A. Semchankau

1 Opening problems

For a start, you can try to solve several problems. They are rather complicated, so if you wouldn't succeed, return to this section after studying *pqr*-lemmas.

1. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a+b+c=1$. Prove that

$$1+12abc \geqslant 4(ab+bc+ca).$$

2. Let a, b, c be real numbers such that

$$a+b+c=9, \quad ab+bc+ca=24.$$

Prove that $16 \leqslant abc \leqslant 20$. Prove moreover that for any $r \in [16,20]$ there exist real numbers a, b, c such that $a+b+c=9$, $ab+bc+ca=24$, $abc=r$.

3. Let P be a symmetric polynomial of degree not greater than 5. Prove that if $P(a,a,c) \geqslant 0$ and $P(0,b,c) \geqslant 0$ for all non-negative real numbers a,b,c, then $P(a,b,c) \geqslant 0$ for all non-negative real numbers a, b, c.

4. (Russia TST, 2015) Let a, b, c be non-negative real numbers such that $1+a+b+c = 2abc$. Prove that

$$\frac{ab}{1+a+b}+\frac{bc}{1+b+c}+\frac{ca}{1+c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

5. (Iran TST, 1996) Let a, b, c be non-negative real numbers such that $ab+bc+ca \neq 0$. Prove that

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

2 Symmetric polynomials

We start out discussion of *pqr*-method by considering symmetric polynomials. Main results of this section will be used in the next sections.

[1] At the moment the name *uvw*-method is commonly used.

[2] The authors are grateful to Michael Rozenberg for useful remarks. We would like to draw your attention to the important role he played in popularization of the *uvw*-method.

[3] The authors are grateful to Anna Doledenok and Ilya Bogdanov for help with the translation.

2.1 Properties of symmetric polynomials

6. Express a^2+b^2, a^3+b^3, a^4+b^4, $(a-b)^2$ in terms of $a+b$ and ab.

For three variables a, b, c denote $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$ (elementary symmetric polynomials in 3 variables).

7. Express polynomials $a^2+b^2+c^2$, $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$, $a^3+b^3+c^3$, $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$, $a^4+b^4+c^4$, $(a+b)(b+c)(c+a)$ in terms of p, q, r.

8. By definition, put $s_k = a^k+b^k+c^k$ for any non-negative integer number k. Express s_k ($k \geqslant 3$) in terms of p, q, r, s_{k-1}, s_{k-2} and s_{k-3}.

The polynomial $G(a, b, c)$ in 3 variables is called *symmetric* if its value does not change after swapping any two variables (i.e. $G(a, b, c) = G(b, a, c) = \ldots$).

You may use result of the next problem in the sequel without proof.

9. Prove that any symmetric polynomial in a, b, c can be expressed as a polynomial in p, q, r.

10. Let t be a real number. Solve a system of equations: $\begin{cases} a+b+c = t, \\ a^2+b^2+c^2 = t^2, \\ a^3+b^3+c^3 = t^3. \end{cases}$

Often it is useful to rewrite an inequality to be proved in terms of symmetric polynomials. However, some troubles are to be resolved. For instance, a trivial inequality $a^2+b^2+c^2 \geqslant 0$, where a, b, c are real numbers, turns into $p^2-2q \geq 0$. This resulting inequality holds not for all pairs of real p and q. Thus, it turns out that the triples of p, q, and r are not arbitrary. Our next goal is to work out the conditions p, q, and r must satisfy.

11. Let a, b, c be real numbers. Prove that $q^2 \geqslant 3pr$.

12. Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove that $\dfrac{p}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{q}{3}} \geqslant \sqrt[3]{r}$.

2.2 Symmetric polynomials in 2 variables

A *complex number* is an ordered pair of real numbers (x, y). It is useful to write the pair (x, y) as $x+iy$, where i is the *imaginary unit*. Define the sum and the product of complex numbers as:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

It is easy to see that $i^2 = -1$. For the complex number x is called *real part* and y is called *imaginary part*. A complex number is called *pure imaginary* if $x = 0$. The *complex conjugate* of a complex number $x+yi$ is the number $x-yi$ (it is denoted as $\overline{x+yi}$). Notice that every real number x is complex: $x = x+0 \cdot i$.

For two complex numbers a, b denote $p = a + b$ and $q = ab$.

13. Prove that a and b are roots of equation $x^2 - px + q = 0$ and there are no other roots.

14. Prove that if p and q are real, then either a and b are both real or b is the complex conjugate of a.

15. Prove that if p and q are real, then $(a - b)$ is either real or pure imaginary.

16. Which conditions (particularly, inequalities) should satisfy p and q for a and b to be real?

17. Prove that a and b are real and non-negative if and only if p and q are non-negative real numbers which satisfy conditions from the previous problem.

2.3 Symmetric polynomials in 3 variables

For three (perhaps complex) numbers a, b, c denote $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$.

18. Prove that a, b, c are roots of equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ and there are no other roots.

19. Prove that for real numbers p', q', r' there exist complex numbers a', b', c' (unique up to a permutation) such that $p' = a' + b' + c'$, $q' = a'b' + b'c' + c'a'$, $r' = a'b'c'$. Prove moreover that either numbers a', b', c' are real or a' is real and b' is a complex conjugate of c' (up to a permutation).

20. Assume that p, q, and r are real numbers. Prove that if a, b, c are real, then $(a - b)(b - c)(c - a)$ is real, otherwise it is pure imaginary.

21. Prove that

$$(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2.$$

Hint. Denote $l_{xy} = a^x b^y + b^x c^y + c^x a^y$. Then $(l_{12} - l_{21})^2 = (l_{12} + l_{21})^2 - 4l_{12}l_{21}$.

22. Criterion for reality. Let (p, q, r) be a triple of real numbers. Prove that the numbers a, b, c (which are defined as the roots of $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ counting multiplicities) are real if and only if $T(p, q, r) \geqslant 0$, where $T(p, q, r)$ is a polynomial in 3 variables defined as $T(p, q, r) = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.

23. Non-negativity lemma. Prove that p, q, $r \geqslant 0$ and $T(p, q, r) \geqslant 0$ if and only if a, b, c are non-negative real numbers.

The formula for $T(p, q, r)$ may look too complicated for being useful. In what follows, we shall mainly use the following idea. Let us regard the expression $T(p, q, r)$ as a polynomial in one variable (e.g., r), the other two are assumed to be fixed (e.g., $p = p_0$ and $q = q_0$). Then the condition $T(p, q, r) \geq 0$ defines some union of segments and closed rays.

3 *pqr*-lemmas

A triple (p, q, r) is called *acceptable* if $p,\ q,\ r \geqslant 0$ and $T(p, q, r) \geqslant 0$, i.e., if the non-negativity lemma applies. In other words, polynomial $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ has three (perhaps multiple) real non-negative roots.

24. r**-lemma.** Fix some values $p = p_0$ and $q = q_0$ such that there exists at least one value of r for which the triple (p_0, q_0, r) is acceptable. Prove that such triple with the minimal value of r corresponds to a triple (a, b, c) in which either two numbers are equal, or $abc = 0$. Prove moreover that such triple with the maximal value of r corresponds to a triple (a, b, c) containing two equal numbers.

25. q**-lemma.** Fix some values $p = p_0$ and $r = r_0$ such that there exists at least one value of q for which the triple (p_0, q, r_0) is acceptable. Prove that such triples with minimal and maximal values of q correspond to a triple (a, b, c) containing two equal numbers.

26. p**-lemma.** Fix some values $q = q_0$ and $r = r_0 > 0$ such that there exists at least one value of p for which the triple (p, q_0, r_0) is acceptable. Prove that such triples with minimal and maximal values of p correspond to a triple (a, b, c) containing two equal numbers.
Does the same statement holds true when $r_0 = 0$?

Let us illustrate the use of the *pqr*-method by the following simple problem.

Example. Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

Proof. The inequality can be rewritten as $p^2 - 2q \geqslant q \Leftrightarrow p^2 \geqslant 3q$. Fix $p = p_0$ and $r = r_0$. We need to prove that $q \leqslant \frac{p_0^2}{3}$. In other words, we shall show that q is bounded from above by some constant. Notice that if the last inequality holds for greatest q, then it holds for all q. So it suffices to check the inequality for the largest value of q. It follows from the q-lemma that q attains the maximal value when two of a, b, c are equal. Assume without loss of generality that $a = b = x$, $c = z$. The inequality $q \leqslant \frac{p_0^2}{3}$ is equivalent to the desired one. Now, plugging $a = b = x$, $c = z$ into $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ we obtain

$$2x^2 + z^2 \geqslant x^2 + 2xz \Leftrightarrow (x - z)^2 \geqslant 0.$$

This argument shows that $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ holds for all non-negative a, b, c. Equality holds if and only if $x = z$, i.e. $a = b = c$.

You can now return to the first section and use *pqr*-method in order to solve the problems 1-5.

4 Inequalities

Suppose we want to check whether a symmetric inequality in 3 non-negative variables a, b, c holds. Fixing two of the three variables p, q, and r, we can rewrite the inequality as $f \geqslant 0$, where f is a function of the remaining variable. If f is either monotonic or concave, then we need to check the inequality only in the case when $a = b$, and also when $a = 0$ if the non-fixed variable is p or q.

For all inequalities you must find values of the numbers a, b, c such that an inequality turns out to be equality!

27. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Prove that

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$

28. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}.$$

29. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant \frac{2}{1+abc}.$$

30. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a+b+c = 4$ and $a^2+b^2+c^2 = 6$. Prove that

$$a^6 + b^6 + c^6 \leqslant a^5 + b^5 + c^5 + 32.$$

31. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $ab + bc + ca \neq 0$. Prove that

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \geqslant \frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

32. Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove that

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geqslant a^2b^2(a+b) + b^2c^2(b+c) + c^2a^2(c+a).$$

33. a) Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove that

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca} + \frac{3abc}{a+b+c} \geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

b) Find the least non-negative real k such that the inequality

$$k\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca} + (1-k)\frac{3abc}{a+b+c} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

holds for all non-negative numbers a, b, c.

34. For positive real numbers a, b, c define $X = \frac{a^2+b^2}{2c^2} + \frac{b^2+c^2}{2a^2} + \frac{c^2+a^2}{2b^2}$, $Y = \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b}$. Prove that

$$4X + 69 \geqslant 27Y.$$

35. a) Let $P(a,b,c)$ be a homogeneous symmetric polynomial of degree not greater than 8. Find an algorithm checking whether P is non-negative when a, b, c are non-negative. We assume that we are ale to find extrema and zeroes of an arbitrary function in one variable.

b) Find an analogous algorithm for a homogeneous symmetric polynomial of degree not greater than 17.

c*) Find an analogous algorithm for any homogeneous symmetric polynomial.

In order to simplify the application of *pqr*-method, it is often useful to make a change of variables.

36. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Prove that

$$2(a+b+c-2)^2 + (ab+bc+ca)(2+3(a+b+c)) \geqslant 35.$$

37. Let a, b, c be real numbers such that $a, b, c \geqslant 1$ and $a+b+c = 9$. Prove that

$$\sqrt{ab+bc+ca} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

38. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^3 + \frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2.$$

39. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Prove that

$$\frac{a^2}{4-bc} + \frac{b^2}{4-ca} + \frac{c^2}{4-ab} \leqslant 1.$$

40. Let a, b, c be real numbers. Prove that

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Equality holds if either $a = b = c$ or

$$\frac{a}{\sin^2\frac{4\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2\frac{\pi}{7}}, \quad \frac{b}{\sin^2\frac{4\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2\frac{\pi}{7}},$$

$$\frac{c}{\sin^2\frac{4\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2\frac{\pi}{7}}.$$

Hint. Perform the substitution $a = x + 2ty$, $b = y + 2tz$, $c = z + 2tx$ for $t \in \mathbb{R}$.

5 Unusual conditions

Up to this point we have considered rather simple conditions on a, b, c, e.g. a, b, $c \geqslant 0$ or $a+b+c=3$. These conditions can be easily written in terms of p, q, r. Is it possible to formulate unusual conditions in terms of p, q, r?

41. Find conditions on numbers p, q, r necessary and sufficient for
a) numbers a, b, c to be not less than 1;
b) numbers a, b, c to be side lengths of a triangle (perhaps degenerate);
c) non-negative real numbers a, b, c to satisfy $2\min(a,b,c) \geqslant \max(a,b,c)$.

42. Let a, b, c be real numbers such that a, b, $c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Prove that

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geqslant \frac{7}{5}.$$

43. Let a, b, c be side lengths of a triangle. Prove that

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\right).$$

44. Prove that there exists a polynomial $S(x,y,z)$ such that the following conditions are equivalent: **(i)** a, b, c are real numbers; **(ii)** $S(x,y,z) \geqslant 0$, where $x = a+b+c$, $y = a^2+b^2+c^2$, $z = a^3+b^3+c^3$.

45. Prove that the following conditions are equivalent: **(i)** $s \in \left[\frac{86}{9}, 10\right]$; **(ii)** there exist real numbers a, b, c such that $a+b+c=4, a^2+b^2+c^2=6, a^3+b^3+c^3=s$.

46. (USA TST, 2001) Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Prove that

$$ab+bc+ca-abc \leqslant 2.$$

47. (China-West, 2004) Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

48. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2+nabc = n+3$ for some real n.

a) Assume that $0 \leqslant n \leqslant \frac{3}{2}$. Prove that $a+b+c \leqslant 3$.

b) Assume that $\frac{3}{2} \leqslant n \leqslant 2$. Prove that $a+b+c \leqslant \sqrt{2(n+3)}$.

c) Assume that $n=2$. Prove that $ab+bc+ac-abc \leqslant \frac{5}{2}$.

49. Let a, b, c be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Prove that

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(2+\sqrt{4-3abc}).$$

6 Special cases

In this section we consider complicated symmetric conditions containing all three elementary symmetric polynomials. If a symmetric inequality (on non-negative numbers) obey conditions of this type, then the *pqr*-method can not be applied. Indeed, if we fix two numbers of the triple p, q, r, then the third one will almost certainly be uniquely defined. What is to be done?

Fix one number of the numbers p, q, r (to be precise, r). Then our condition will describe the relationship between the remaining two numbers. If we express one of them by the other, then our condition states that the first elementary symmetric polynomial (to be precise, p) is a function of the second one (to be precise, q). Thus, the triple (p, q, r) is uniquely determined by q. This means that our inequality can be naturally written as $h(q) \geqslant 0$, where h is a function of real non-negative variable. If h is monotonic or concave, then it suffices to prove our inequality only for extremal q. So, the problem is reduced to the problem of finding extremal q (when condition and r are fixed).

Let us spend some time setting the scene.

Let $\mathbb{R}^n$ denote a set of ordered groups of n real numbers. For small n the set $\mathbb{R}^n$ has a natural geometric interpretation. Namely, $\mathbb{R}^1$ is a line, $\mathbb{R}^2$ is a plane. Hence we say that the elements of $\mathbb{R}^n$ are points.

The *distance* between two points $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ is defined by $||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$. In particular, for $n = 1$ distance is equal to the modular of the difference between corresponding numbers, for $n = 2$ distance is the well-known distance between points.

Let M be a subset of $\mathbb{R}^n$. The function $f : M \to \mathbb{R}$ is *continuous* in the point $x \in M$ if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ such that if for $y \in \mathbb{R}^n$ holds $||x - y|| < \delta$, then $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Example. Let us prove that the function $f(x) = x^2$ is continuous for any $x \in \mathbb{R}$. Note that

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |(y - x) + 2x| \leqslant |x - y| \cdot (|x - y| + |2x|) < \delta^2 + 2|x|\delta.$$

Suppose $\delta = \min(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\varepsilon}{4|x|})$. Since both items are not greater than $\frac{\varepsilon}{2}$, it follows that $|x^2 - y^2| < \varepsilon$.

You may use results of the next three problems in the sequel without proof.

50. Prove that the function $f(x) = \frac{1}{x}$ is continuous for any $x \in (0, +\infty)$, the function $f(x) = \sqrt{x}$ is continuous for any $x \in (0, +\infty)$, the function $f(x, y) = x + y$ is continuous for any $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

51. Let the function $g(x)$ be continuous for any $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, let range of $g(x)$ belongs

to $N \subset \mathbb{R}$. Let the real-valued function $f(y)$ be continuous for any $y \in N$. Prove that the function $f(g(x))$ is continuous for any $x \in M$.

52. a) Prove that the polynomial $P(x)$ in one variable is continuous for any $x \in \mathbb{R}$.

b) Prove that the polynomial $P(x_1, \ldots, x_n)$ in n variables is continuous for any $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

We say that the real numbers a, b, c obey the *symmetric relation* G, if the equality $g(p, q, r) = 0$ holds, where g is a continuous function in 3 variables.

53. Let the variables a, b, c obey the symmetric condition G. Fix some value $r \geqslant 0$ such that there exist p, $q \geqslant 0$ for which the triple (p, q, r) is acceptable and $G(p, q, r) = 0$. Assume that the condition G is equivalent to $p = f(q)$ (while r is fixed), where f is a function defined below, and a set of admissible q is bounded. Prove that q attains its maximal and minimal value. Moreover, in both cases two variables of a, b, c are equal when

a) f is a linear function;

b) f is a polynomial.

54. Let the variables a, b, c obey the symmetric condition G. Let (x, y, z) be an arbitrary permutation of (p, q, r). Fix some value $z \geqslant 0$ such that there exist $x, y \geqslant 0$ for which the triple (p, q, r) is acceptable and $G(p, q, r) = 0$. Assume that the condition G is equivalent to $x = f(y)$ (while z is fixed), where f is a polynomial, and a set of admissible y is bounded. Prove that y attains its maximal and minimal values. Moreover, if $z = r$, then the equality $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ holds for any extreme point, otherwise $abc(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ holds for any extreme point.

Remark. Let I be a union of segment containing admissible y. Statement of the previous problem is also true when f is continuous function for any point of I. If you solve the previous problem, you may use this fact in the sequel without proof.

Example. Let a, b, c be non-negative numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Prove that

$$a + b + c \geqslant 2 + \sqrt{abc(4 - a - b - c)}.$$

Proof. The desired inequality can be written as

$$p \geqslant 2 + \sqrt{r(4 - p)}, \quad (*)$$

while the relation $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ can be written as $\frac{p^2 - 4 + r}{2} = q$. If variable r is fixed, we can write the desired inequality as $f(p) \geqslant 0$, where $f(x) = x - 2 - \sqrt{r(4 - x)}$ is a monotonic function. Therefore, it suffices to check $(*)$ for the smallest value of p. From the problem 54 it follows that it suffices to check the desired inequality for $a = b$. If $a = b$, then $c = 2 - a^2$. The desired inequality can be written as

$$a^4(a - 1)^2 \geqslant 0.$$

Equality holds if $a=b=c=1$; $a=b=0, c=2$; $a=c=0, b=2$; $b=c=0, a=2$.

55. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=10$. Prove that

$$\frac{9}{8} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \leqslant \frac{6}{5}.$$

56. Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Prove that

$$(a+b+c)(1+abc) \geqslant 6.$$

57. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $ab+bc+ca=a^3+b^3+c^3$. Prove that

$$ab+bc+ca \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

58. Let a, b, c be non-negative real numbers, p, q, r are defined naturally. Prove that if $q+r=4$, then

$$p^3-27r \geqslant 7(p^2-3q).$$

59. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca+(abc-1)^2$. Prove that

$$ab+bc+ca+3 \geqslant 2(a+b+c).$$

7 n variables

Up to this point we considered symmetric inequalities in 3 variables. What can we say if there are more than 3 variables?

The *ball* (the *sphere*) in $\mathbb{R}^n$ of radius r and center x is a set of points y such that $||x-y|| \leqslant r$ ($||x-y||=r$, respectively). In particular, if $n=2$, then ball is a circle and sphere is a circumference.

Consider a sequence $z_1, z_2, \ldots$ in $\mathbb{R}^n$. We say that this sequence *converges* to the point z, if for any $\varepsilon > 0$ the exterior of the ball of radius ε and center z contains only finitely many elements of this sequence.

Example. Since there are only finitely many elements of the sequence $z_n=\frac{1}{n}$, where $n \in \mathbb{N}$, in the exterior of the segment $[-\varepsilon, \varepsilon]$, it follows that z_n converges to $z=0$.

Consider a set of points M in $\mathbb{R}^n$. The point z is called *a limit point* of M if there exists a sequence of points $z_1, z_2, \ldots$, where $z_i \in M$ and $z_i \neq z$, converging to z. We say that the set M in $\mathbb{R}^n$ is *closed*, if it contains all its limit points.

Example. Since 0 is a limit point of the interval $(0,1)$ but does not belong to it, this interval is not a closed set. Conversely, the segment $[0,1]$ is a closed set.

We say that the set M in $\mathbb{R}^n$ is *bounded*, if there exists constant C such that for any $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ and for any i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $|x_i| < C$. The set M in $\mathbb{R}^n$ is called *a compact set* if M is closed and bounded.

60. Is the segment $[0, 1]$ a compact set? The ray $[0, +\infty)$? The point $(1, 1, \ldots, 1)$? The ball of radius 1 and center $(1, 1, \ldots, 1)$? The same ball without the point $(1, 1, \ldots, 1, 0)$? The sphere of radius 1 and center $(1, 1, \ldots, 1)$?

You may use result of the next problem in the sequel without proof.

61. Consider a number of relations

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, P_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, P_{s+1}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ldots, P_m(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

where $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $P_1, \ldots, P_m$ are polynomials in n variables. Let M be a set of points obeying this relations. Prove that if M is bounded, then M is a compact set.

We need the following classical theorem of calculus. You can use it without proof.

The Weierstrass theorem. Continuous function on a compact set attains its maximum and minimum.

Example. The function x^2 on the segment $[0, 1]$ attains its maximum and minimum. However the Weierstrass theorem doesn't imply an analogous statement for x^2 on the half-interval $(0, 1]$.

62. Let $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be a symmetric continuous function on the compact set $M \subset \mathbb{R}^n$. Let f be such that if $a_4, \ldots, a_n$ are fixed (and there exist a_1, a_2, a_3 such that $(a_1, \ldots a_n) \in M$), then the function

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, a_4, \ldots, a_n)$$

attains the maximal and minimal values only when $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$ (or $x_1x_2x_3(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$). Prove that the function f attains its maximum and minimum. Moreover, in both cases there are less than 3 different numbers among $x_1, \ldots, x_n$ (or there are less than 3 different non-zero numbers among $x_1, \ldots, x_n$).

Example. Let a, b, c, d be non-negative real numbers such that $a + b + c + d = 4$. Prove that

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geqslant 16.$$

Proof. From the problem 61 it follows that the given relations define a compact set. By definition, put

$$f(a, b, c, d) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd.$$

From the problem 52 we can say that f is a continuous function. Fix $d = d_0 \geqslant 0$. By definition, put $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ac$, $r = abc$. Consider the function

$$h(a, b, c) = f(a, b, c, d_0) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d_0^2) + 4abcd_0 = 3p^2 - 6q + 4d_0r + 3d_0^2 =$$

$$= 3p^2 - 6q + 4d_0 r + 3d_0^2.$$

Fix p and r. Since h linear in q, it follows that h attains its minimum only when $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$. From the problem 62 it follows that it suffices to prove the desired inequality when there are less than 3 different numbers among a, b, c, d.

- Considering $a = b$ and $c = d = 2 - a$, we obtain

$$4(a-1)^2((a-1)^2 + 1) \geqslant 0.$$

  Equality holds if $a = b = c = d = 1$.

- Considering $a = b = c$ and $d = 4 - 3a$, we obtain

$$4(a-1)^2(4-3a)(a+2) \geqslant 0.$$

  Since $a \leqslant \frac{4}{3}$, if follows that inequality holds true. Equality holds if $a = b = c = \frac{4}{3}, d = 0$; $a = b = d = \frac{4}{3}, c = 0$; $a = c = d = \frac{4}{3}, b = 0$; $b = c = d = \frac{4}{3}, a = 0$.

63. Let a, b, c, d be non-negative real numbers such that $a + b + c + d = 1$. Prove that

$$(1-a^2)^2 + (1-b^2)^2 + (1-c^2)^2 + (1-d^2)^2 \geqslant 3.$$

64. (Russia TST, 2015) Let a, b, c, d be non-negative real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Prove that

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + bcd + cda + dab \leqslant 1.$$

65. (IMO Shortlist, 2010) Let a, b, c, d be real numbers such that $a + b + c + d = 6$ and $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$. Prove that

a) $abcd \leqslant 3$;

b) $36 \leqslant 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leqslant 48$.

66. Let a, b, c, d be non-negative real numbers. Prove that

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3} \geqslant 2(abc + bcd + cda + dab).$$

67. (Russia, 2016) Let a, b, c, d be positive real numbers such that $a + b + c + d = 3$.

a) Prove that

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

b) Prove that

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

c) Let x be real number not less than 2. Prove that

$$\frac{1}{a^x} + \frac{1}{b^x} + \frac{1}{c^x} + \frac{1}{d^x} + \left|\frac{(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})(1-\frac{1}{c})(1-\frac{1}{d}))}{2}\right|^x \leqslant \frac{1}{a^x b^x c^x d^x}.$$

68. Let a, b, c, d be non-negative numbers such that $a+b+c+d=4$. Prove that

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+4 \geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

69. Let a, b, c, d, e be real numbers such that $a+b+c+d+e=20$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=100$. Find extrema of

$$abcd+abce+abde+acde+bcde.$$

70. Let a, b, c, d be positive real numbers such that $a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Prove that

$$(a+b+c+d)(17+46abcd) \geqslant 252.$$

8 Additional problems

In the problems below you can apply *pqr*-method in the non-obvious way.

71. (APMO, 2004) Let a, b, c be real numbers. Prove that

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

72. (Iran, 2005) Let a, b, c be real non-negative numbers such that $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$. Prove that

$$ab+bc+ca \leqslant \frac{3}{2}.$$

73. Let a, b, c be side lengths of an acute triangle and R be a circumradius of this triangle. Prove that

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}>5R.$$

74. (Shortlist IMO, 2011) Let a, b, c be side lengths of a triangle such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(a+c-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2} \geqslant \frac{3}{(abc)^2}.$$

75. The polynomial $G(a,b,c)$ in 3 variables is called *cyclic* if $G(a,b,c)=G(b,c,a)=G(c,a,b)$. Prove that any cyclic polynomial in a, b, c can be written as $X(a,b,c)+Y(a,b,c)(l_{12}-l_{21})$ (X and Y are symmetric polynomials).

76. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{2}(ab+bc+ca)$. Prove that

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant \frac{25}{8}(a^3b+b^3c+c^3a).$$

77. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab+bc+ca) \leqslant 9.$$

78. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{a^2+3b^2}{a+3b}+\frac{b^2+3c^2}{b+3c}+\frac{c^2+3a^2}{c+3a} \geqslant 3.$$

79. Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove that

$$10(a+b+c)^5 \geqslant 81(a^2+b^2+c^2)(a^2b+b^2c+c^2a+7abc).$$

80. (Korea, 2012) Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2=2abc+1$. Find the maximum of

$$(a-2bc)(b-2ca)(c-2ab).$$

81. Let a, b, c be real numbers such that a, b, $c \in [0,1]$ and $(1-a)(1-b)(1-c)=abc$. Prove that

$$a^2+b^2+c^2+\frac{a+b+c}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

82. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2+abc=4$ and $a+b+c \geqslant \sqrt{8}$. Prove that

$$a+b+c \geqslant 2+\sqrt[3]{abc}.$$

83. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=11(a+b+c-3)$. Prove that

$$\sqrt{a+2}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+2} \geqslant \sqrt{a+b+c+24}.$$

84. Let a, b, c be positive real variables such that $abc=1$. Prove that

a)

$$a^{10}+b^{10}+c^{10} \geqslant 3+45\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right);$$

b*)

$$a^{10}+b^{10}+c^{10} \geqslant 3+46\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right);$$

c) there exists $k>0$ such that for any natural number $n \geqslant 3$

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 3+kn((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2);$$

d*) there exists $k>0$ such that for any natural number $n \geqslant 3$

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 3+kn^2((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2),$$

but there is no $\varepsilon > 0$ such that there exists $k' > 0$ such that for any natural number $n \geqslant 3$

$$a^n + b^n + c^n \geqslant 3 + k'n^{2+\varepsilon}((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2).$$

85. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $(a+1)(b+1)(c+1) = 84$, $(a+b+c)(ab+bc+ac) = \frac{14256}{abc}$. Find the maximum of

$$(a+b+c)^2 + (ab+bc+ac)^2 + a^2b^2c^2.$$

86. Let a, b, c, d be non-negative real numbers such that $a+b+c+d = 3$, $a^2+b^2+c^2+d^2 = 5$, $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 17$. Find the maximum of d.

Список литературы

[1] М.А. Розенберг "Метод uvw для доказательства неравенств", Математическое образование, № 3-4 (59-60), 2011.

[2] M.B.T. Knudsen "The uvw method", http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h278791.

A. Doledenok, M. Fadin, A. Menshchikov, A. Semchankau

Almost all inequalities considered in our project are symmetric. Hence if plugging (a_0, b_0, c_0) into our inequality we obtain an equality, then plugging a permutation of (a_0, b_0, c_0) into the same inequality we also obtain an equality. For brevity, we shall mention only triples that are not permutations of one another.

Therefore after reducing our inequality we assume without loss of generality that either $a = b$ or $a = 0$.

1. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a + b + c = 1$. Prove that

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca).$$

Solution. The desired inequality can be written as $1 + 12r \geqslant 4q$, and the relation $a + b + c = 1$ can be written as $p = 1$. Fix p and r. Then q attains the maximal value when $a = b$ and $c = 1 - 2a$. Substituting $a = b$ and $c = 1 - 2a$, we get

$$24a^3 - 24a^2 + 8a - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow 24\left(a - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{9} \leqslant 0.$$

The left hand side attains its maximal value when a does, i.e. $a = \frac{1}{2}$. Equality is attained when $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$.

2. Let a, b, c be real numbers such that

$$a + b + c = 9, \quad ab + bc + ca = 24.$$

Prove that $16 \leqslant abc \leqslant 20$. Prove moreover that for any $r \in [16, 20]$ there exist real numbers a, b, c such that $a + b + c = 9$, $ab + bc + ca = 24$, $abc = r$.

Solution. From the problem 22 it follows that numbers a, b, c are real if and only if p, q, r are real and $T(p, q, r) \geqslant 0$. Substituting $p = 9$ and $q = 24$, we get

$$T(9, 24, r) = -27(r - 16)(r - 20).$$

Its value is non-negative if and only if $r \in [16, 20]$.

3. Let P be a symmetric polynomial of degree not greater than 5. Prove that if $P(a, a, c) \geqslant 0$ and $P(0, b, c) \geqslant 0$ for all non-negative real numbers a, b, c, then $P(a, b, c) \geqslant 0$ for all non-negative real numbers a, b, c.

Solution. We have $P(a, b, c) = A(p, q)r + B(p, q)$. Fix p and q. Since $P(a, b, c)$ is linear

in r, it follows that $P(a,b,c)$ attains its maximal and minimal values only when either $a=b$ or $a=0$.

4. (Russia TST, 2015) Let a, b, c be non-negative real numbers such that $1+a+b+c = 2abc$. Prove that

$$\frac{ab}{1+a+b}+\frac{bc}{1+b+c}+\frac{ca}{1+c+a}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$2q^2-q(p+1)+9r+2pr-3(p+1)^2\geqslant 0,$$

and the relation $1+a+b+c = 2abc$ can be written as $1+p=2r$. Fix p and r. The left hand side is a quadratic polynomial in q, its leading coefficient is positive. Its minimal value is attained when $q_0=\frac{p+1}{4}$.

Let us prove an inequality $4q-(p+1)\geqslant 0$. Fix p and r. Left hand side attains its minimal value when q does. Substituting $a=b$, $c=\frac{1+2a}{2a^2-1}$ in $4q-(p+1)\geqslant 0$, we get

$$8a^4-4a^3+10a^2+8a\geqslant 0,$$

which is correct.

Since $4q-(p+1)\geqslant 0$, it follows that left hand side is an increasing function. Substituting $a=b$ and $c=\frac{1+2a}{2a^2-1}$ in the desired inequality, we get

$$a(2a^2-2a-1)^2\geqslant 0.$$

Equality is attained when $a=b=c=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

5. (Iran TST, 1996) Let a, b, c be non-negative real numbers such that $ab+bc+ca\neq 0$. Prove that

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geqslant\frac{9}{4}.$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$\frac{4qpr+q(p^4-2p^2q+q^2)}{(pq-r)^2}\geqslant\frac{9}{4}$$

Fix p and q. Since $r\leqslant pq$, it follows that left hand side attains its minimal value when r attains either maximal or minimal value.

- If $a=0$, then the desired inequality can be written as

$$\frac{(b-c)^2(b^2+bc+c^2)}{2bc(b+c)^2}\geqslant 0.$$

  Equality is attained when $a=0$, $b=c$.

- If $a = b$, then the desired inequality can be written as

$$t(t-1)^2 \geqslant 0,$$

where $t = \frac{c}{b}$. Equality is attained when $a = b = c$.

6. Express $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$, $a^4 + b^4$, $(a-b)^2$ in terms of $a + b$ and ab.

Solution.

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab),$$
$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = ((a+b)^2 - 2ab)^2 - 2(ab)^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab.$$

7. Express polynomials $a^2 + b^2 + c^2$, $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$, $a^3 + b^3 + c^3$, $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$, $a^4 + b^4 + c^4$, $(a+b)(b+c)(c+a)$ in terms of p, q, r.

Solution.

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = p^2 - 2q,$$
$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = (a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc = pq - 3r,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - 6abc = p^3 - 3pq + 3r,$$
$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2(ab^2c + abc^2 + a^2bc) = q^2 - 2pr,$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr,$$
$$(a+b)(b+c)(c+a) = (p-c)(p-a)(p-b) = p^3 - p \cdot p^2 + pq - r = pq - r.$$

8. By definition, put $s_k = a^k + b^k + c^k$ for any non-negative integer number k. Express s_k $(k \geqslant 3)$ in terms of p, q, r, s_{k-1}, s_{k-2} and s_{k-3}.

Solution. Let us prove that $s_k = ps_{k-1} - qs_{k-2} + rs_{k-3}$.

$$ps_{k-1} - qs_{k-2} + rs_{k-3} = (a+b+c)(a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}) - (ab+bc+ca)(a^{k-2} + b^{k-2} + c^{k-2}) +$$
$$+ abc(a^{k-3} + b^{k-3} + c^{k-3}) = (s_k + ab^{k-1} + ac^{k-1} + ba^{k-1} + bc^{k-1} + ca^{k-1} + cb^{k-1}) -$$
$$- (ab^{k-1} + ac^{k-1} + ba^{k-1} + bc^{k-1} + ca^{k-1} + cb^{k-1} + abc^{k-2} + ab^{k-2}c + a^{k-2}bc) +$$
$$+ (abc^{k-2} + ab^{k-2}c + a^{k-2}bc) = s_k.$$

9. Prove that any symmetric polynomial in a, b, c can be expressed as a polynomial in p, q, r.

Solution. Let $G(a,b,c)$ be a given polynomial. $G = G_1 + G_2 + G_3$, where all monomials in G_i contain i variables, $i = 1, 2, 3$. From the previous problem it follows that G_1 can be expressed as a polynomial in p, q, r. Since an equality

$$s_k s_l - s_{k+l} = a^k b^l + a^k c^l + b^k a^l + b^k c^l + c^k a^l + c^k b^l$$

holds, it follows that G_2 can be expressed as a polynomial in p, q, r. Finally, for a sum $a^k b^l c^m + \dots$ in G_3 we factorize $(abc)^n$ (where $n = \min(k, l, m)$) and reduce our problem to the previous cases.

10. Let t be a real number. Solve a system of equations: $\begin{cases} a + b + c = t, \\ a^2 + b^2 + c^2 = t^2, \\ a^3 + b^3 + c^3 = t^3. \end{cases}$

Solution. $\begin{cases} a + b + c = t \\ a^2 + b^2 + c^2 = t^2 \\ a^3 + b^3 + c^3 = t^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = t \\ p^2 - 2q = t^2 \\ p^3 - 3pq + 3r = t^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = t \\ q = 0 \\ r = 0 \end{cases}$

If $q = 0$, then two of a, b, c are equal to zero. So, there are 3 solutions: $a = b = 0$, $c = t$ and its permutations.

11. Let a, b, c be real numbers. Prove that $q^2 \geqslant 3pr$.

Solution. Substituting a, b, c in the desired inequality, we get

$$(ab + bc + ca)^2 \geqslant 3(a + b + c)abc. \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(ab - ac)^2 + \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(ac - bc)^2 \geqslant 0.$$

12. Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove that $\dfrac{p}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{q}{3}} \geqslant \sqrt[3]{r}$.

Solution.

$$\frac{p}{3} \geqslant \sqrt{\frac{p}{3}} \;\Leftrightarrow\; p^2 \geqslant 3q \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

$$\sqrt{\frac{q}{3}} \geqslant \sqrt[3]{r} \;\Leftrightarrow\; \frac{ab + bc + ca}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}.$$

Using the AM-GM inequality for ab, bc, ca, we get the desired inequality.

13. Prove that a and b are roots of equation $x^2 - px + q = 0$ and there are no other roots.

Solution. $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - px + q$. Left hand side equals 0 if and only if either $x = a$ or $x = b$.

14. Prove that if p and q are real, then either a and b are both real or b is the complex conjugate of a.

Solution. If a is real, then $b = p - a$ is also real as a difference of real numbers. Assume that $a = x + yi$, where $y \neq 0$. Then $b = p - a = (p - x) - yi$. Since

$$q = ab = (x + iy)(p - x - yi) = (xp - x^2 + y^2) + (py - 2xy)i,$$

it follows that $py - 2xy = 0$ and $p = 2x$, so $b = x - yi = \overline{a}$.

15. Prove that if p and q are real, then $(a - b)$ is either real or pure imaginary.

Solution. It is an obvious corollary of the previous problem.

16. Which conditions (particularly, inequalities) should satisfy p and q for a and b to be real?

Solution. p and q should be real numbers and $p^2 - 4q$ should be non-negative.

17. Prove that a and b are real and non-negative if and only if p and q are non-negative real numbers which satisfy conditions from the previous problem.

Solution. It is an obvious corollary of the previous problem.

18. Prove that a, b, c are roots of equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ and there are no other roots.

Solution. The proof is similar to the proof of the problem 13.

19. Prove that for real numbers p', q', r' there exist complex numbers a', b', c' (unique up to a permutation) such that $p' = a' + b' + c'$, $q' = a'b' + b'c' + c'a'$, $r' = a'b'c'$. Prove moreover that either numbers a', b', c' are real or a' is real and b' is a complex conjugate of c' (up to a permutation).

Solution. Since any polynomial of odd degree has a real root, it follows that the desired statement is an obvious corollary of the problem 14.

20. Assume that p, q, and r are real numbers. Prove that if a, b, c are real, then $(a-b)(b-c)(c-a)$ is real, otherwise it is pure imaginary.

Solution. If a, b, c are real numbers, then the problem is obvious. Let a be a real number, $b = x + yi$, $c = x - yi$. Then

$$(a-b)(b-c)(c-a) = -(a^2 - (b+c)a + bc)(b-c) = -2yi(a^2 + 2ax + x^2 + y^2).$$

21. Prove that

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2.$$

Solution.

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = (ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a)^2 = (ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a)^2 -$$

$$-4(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) = (pq - 3r)^2 - 4((ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3) -$$

$$-4(a^4bc+ab^4c+abc^4+3(abc)^2) = (pq-3r)^2-4(q^3-3pqr+3r^2)-4r(p^3-3pq+3r)-12r^2 =$$

$$= -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2.$$

22. Criterion for reality. Let (p, q, r) be a triple of real numbers. Prove that the numbers a, b, c (which are defined as the roots of $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ counting multiplicities) are real if and only if $T(p, q, r) \geqslant 0$, where $T(p, q, r)$ is a polynomial in 3 variables defined as $T(p, q, r) = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.

Solution. It is an obvious corollary of the problems 20 and 21.

23. Non-negativity lemma. Prove that p, q, $r \geqslant 0$ and $T(p, q, r) \geqslant 0$ if and only if a, b, c are non-negative real numbers.

Solution. It is an obvious corollary of the previous problem.

24. r**-lemma.** Fix some values $p = p_0$ and $q = q_0$ such that there exists at least one value of r for which the triple (p_0, q_0, r) is acceptable. Prove that such triple with the minimal value of r corresponds to a triple (a, b, c) in which either two numbers are equal, or $abc = 0$. Prove moreover that such triple with the maximal value of r corresponds to a triple (a, b, c) containing two equal numbers.

Solution. For triple (p, q, r) to be acceptable it is necessary to have $T(p_0, q_0, r) \geqslant 0$ and $r \geqslant 0$ (p_0, q_0 are non-negative, by the condition). Since $T(p_0, q_0, r)$ is a quadratic function in r with non-negative leading coefficient, it follows that $T(p_0, q_0, r) \geqslant 0$ defines a segment. Therefore the maximal value of r is right end-point of that segment and the minimal one is either left end-point or 0. Since $T(p_0, q_0, r) = 0$ in the end-points, it follows that two numbers of a, b, c are equal ($T(p, q, r) = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$). If $r = 0$, then one number of a, b, c equals 0.

25. q**-lemma.** Fix some values $p = p_0$ and $r = r_0$ such that there exists at least one value of q for which the triple (p_0, q, r_0) is acceptable. Prove that such triples with minimal and maximal values of q correspond to a triple (a, b, c) containing two equal numbers.

Solution. $T(p_0, q, r_0)$ is a third degree polynomial in q with negative leading coefficient. Constant term equals $-4p_0^3 r_0 - 27r_0^2$, so it is negative. Therefore $T(p_0, q, r_0) \geqslant 0$ defines a union of a segment with non-negative end-points and a ray $(-\infty, q']$, where $q' \leqslant 0$. Now the proof is trivial.

26. p**-lemma.** Fix some values $q = q_0$ and $r = r_0 > 0$ such that there exists at least one value of p for which the triple (p, q_0, r_0) is acceptable. Prove that such triples with minimal and maximal values of p correspond to a triple (a, b, c) containing two equal numbers.
Does the same statement holds true when $r_0 = 0$?

Solution. The proof is similar to the proof of the problem 25 when $r_0 \neq 0$. If $r_0 = 0$, then $p \in [2\sqrt{q_0}, +\infty)$, i.e. p is unbounded.

27. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Prove that

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$r - q + p - 9 \geqslant 0$$

and the relation $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ can be written as $q = r$. From relation it follows that $r \neq 0$. Fix q and r. Then p attains the minimal value when $a = b$. Substituting $a = b$ and $c = \frac{a}{a-2}$, we get

$$2a^2 - 12a + 18 = 2(a-3)^2 \leqslant 0.$$

Equality is attained when $a = b = c = 3$.

28. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}.$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$-3r^2 + 19rp - 99q + 243 \geqslant 0$$

and the relation $a + b + c = 3$ can be written as $p = 3$. Fix p and r. Then q attains the maximal value when $a = b$. Substituting $a = b$ and $c = 3 - 2a$, we get

$$6a^4 - 9a^3 - 27a^2 + 57a - 27 = 3(a-1)^2(2a^2 + a - 9) \leqslant 0.$$

Since $0 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$, it follows that $2a^2 + a - 9 < 0$. Equality is attained when $a = b = c = 1$.

29. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant \frac{2}{1+abc}.$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$4r^2p + 4rq - 4rp - 16r^2 + 3r + 1 \geqslant 0$$

and the relation $a + b + c = 3$ can be written as $p = 3$. Fix p and r. Then q attains the maximal value when $a = b$. Substituting $a = b$ and $c = 3 - 2a$, we get

$$4a^4 - 12a^3 + 13a^2 - 6a + 1 = (2a-1)^2(a-1)^2 \geqslant 0.$$

Equality is attained when $a = b = c = 1$, $a = b = \frac{1}{2}$ and $c = 2$.

30. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a + b + c = 4$ and $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Prove that

$$a^6 + b^6 + c^6 \leqslant a^5 + b^5 + c^5 + 32.$$

Solution. Using condition, we get $p = 4$ and $q = 5$. Now, by problem 8,

$$a^5 + b^5 + c^5 = p^5 - 5p^3q + 5pq^2 + 5p^2r - 5qr,$$

$$a^6 + b^6 + c^6 = p^6 - 6p^4q + 6p^3r + 9p^2q^2 - 12pqr - 2q^3 + 3r^2.$$

Substituting these equalities in the desired inequality, we get inequality that can be easily proved. Equality is attained when $a = b = 1$ and $c = 2$.

31. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $ab + bc + ca \neq 0$. Prove that

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \geqslant \frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$\frac{p^4 - 4p^2q + 5q^2 - 2pr}{q^2p^2 - 2q^3 - 2p^3r + 4pqr - r^2} \geqslant \frac{10}{p^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10r^2 + r(18p^3 - 40pq) - 10p^2q^2 + 20q^3 + p^6 - 4p^3q + 5pq^2 \geqslant 0.$$

Since $p^2 \geqslant 3q$, it follows that $18p^3 - 40pq \geqslant 0$ and the left hand side attains the minimal value when r is minimal.

- If $a = b$ and $t = \frac{a}{c}$, then the desired inequality can be written as

$$20t^3 - 11t^2 + 4t + 1 \geqslant 0.$$

- If $a = 0$ and $t = \frac{b}{c}$, then the desired inequality can be written as

$$(t-1)^2(t^4 + 4t^3 + t^2 + 4t + 1) \geqslant 0.$$

Equality is attained when $a = 0$, $b = c$.

32. Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove that

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geqslant a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a).$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$p^5 - 5p^3q + 7p^2r + 4pq^2 - 3qr \geqslant 0.$$

If $a = b = c = 0$, then inequality turns out to be equality. Fix p and q. Since $7p^2 > 3q$, it follows that left hand side is linear in r and the minimal value is attained when r is minimal.

- If $a = 0$, then the desired inequality can be written as

$$(b^2 - c^2)(b^3 - c^3) = (b - c)^2(b + c)(b^2 + bc + c^2) \geqslant 0.$$

Equality is attained when $a = 0$, $b = c$.

- If $a = b$, then the desired inequality can be written as

$$c(c^2 - a^2)^2 \geqslant 0.$$

Equality is attained when $a = b = c$.

33. a) Let a, b, c be non-negative real numbers. Prove that

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a + b + c} \geqslant \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$3p^5 - 14p^3q + 8q^2p + 12p^2r + 9qr \geqslant 0.$$

If $a = b = c = 0$, then inequality turns out to be equality. Fix p and q. Left hand side is linear in r and the minimal value is attained when r is minimal.

- If $a = 0$ and $t = \frac{b}{c}$, then the desired inequality can be written as

$$3t^4 - 2t^3 - 2t + 4 \geqslant 0.$$

- If $a = b$ and $t = \frac{a}{c}$, then the desired inequality can be written as

$$4t^5 - 5t^4 + 6t^3 - 10t^2 + 2t + 3 = (t-1)^2(4t^3 + 3t^2 + 8t + 3) \geqslant 0.$$

Equality is attained when $a = b = c$.

b) Find the least non-negative real k such that the inequality

$$k\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + (1-k)\frac{3abc}{a+b+c} \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

holds for all non-negative numbers a, b, c.

Solution. The solution is similar to the previous problem.

34. For positive real numbers a, b, c define $X = \frac{a^2+b^2}{2c^2} + \frac{b^2+c^2}{2a^2} + \frac{c^2+a^2}{2b^2}$, $Y = \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b}$. Prove that

$$4X + 69 \geqslant 27Y.$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$f(p,q,r) = -225r^3 - 50p^3r^2 + 4q^3r + 55pqr^2 + 6p^2q^2r - 4p^4qr - 4pq^4 + 2p^3q^3 \geqslant 0. \quad (*)$$

Fix $p = p_0$ and $q = q_0$. Then $f''(p_0, q_0, r) = -1350r - 100p_0^3 + 110p_0q_0$. Let us prove that

$$-1350r - 100p^3 + 110pq \leqslant 0.$$

Fix p and r. The left hand side is linear in q. So q attains the minimal value when $a = b$. Since inequality is homogeneous, we see that it is enough to prove inequality when $a = b = 1$. Substituting $a = b = 1$ in the desired inequality, we get

$$-20(5c^3 + 19c^2 + 100c + 29) \leqslant 0,$$

which is correct.

From $f''(p_0, q_0, r) \leqslant 0$ it follows that f is concave. So it attains the minimal value when r is either minimal or maximal.

- Substituting $a = 0$ in $(*)$, we get

$$pq^3(2p^2 - 4q) \geqslant 0.$$

- Substituting $a = b = 1$ in the desired inequality, we get

$$(c-2)^2(c-1)^2(4c+1) \geqslant 0.$$

Equality is attained when $2a = 2b = c$ and $a = b = c$.

35. a) Let $P(a,b,c)$ be a homogeneous symmetric polynomial of degree not greater than 8. Find an algorithm checking whether P is non-negative when a,b,c are non-negative. We assume that we are ale to find extrema and zeroes of an arbitrary function in one variable.

Solution. Without loss of generality, the degree of the polynomial $P(a,b,c)$ is equal to 8. If $a=0$ and $t=\frac{c}{b}$, then

$$P(0,b,c)\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; P(0,0,c)\geqslant 0,\; P(0,1,t)\geqslant 0.$$

If $a=b$ and $t=\frac{c}{a}$, then

$$P(a,a,c)\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; P(0,0,c)\geqslant 0,\; P(1,1,t)\geqslant 0.$$

Consider an inequality

$$P(a,b,c)=A(q)r^2+B(q)r+C(q)\geqslant 0$$

Fix q such that $A(q)\leqslant 0$. Then $P(a,b,c)\geqslant 0 \Leftrightarrow P(a,a,c)\geqslant 0,\, P(0,b,c)\geqslant 0$. Fix q such that $A(q)>0$. The left hand side is minimal when $r=r_0=-\frac{B(q)}{2A(q)}$. Since $T(p,q,r)\geqslant 0$, it follows that r belongs to a segment $I=\left[\frac{9q-2}{27}-\frac{2-6q}{27}\sqrt{1-3q},\,\frac{9q-2}{27}+\frac{2-6q}{27}\sqrt{1-3q}\right]$. If $r_0\notin I$, then

$$P(a,b,c)\geqslant 0 \Leftrightarrow P(a,a,c)\geqslant 0, P(0,b,c)\geqslant 0.$$

If $r_0\in I$, then

$$P(a,b,c)\geqslant 0 \Leftrightarrow A(q)r_0^2+B(q)r_0+C(q)\geqslant 0 \Leftrightarrow 4A(q)C(q)-B^2(q)\geqslant 0. \quad (*)$$

Finally, we have the following algorithm:

1. Check that $P(0,b,c)\geqslant 0$.
2. Check that $P(a,a,c)\geqslant 0$.
3. Express an inequality $P(a,b,c)\geqslant 0$ in terms of p, q, r and substitute $p=1$.
4. Find q such that $A(q)>0$.
5. Find q such that $r_0=-\frac{B(q)}{2A(q)}\in I$.
6. For q belonging to the intersection of sets from 4 and 5 check $(*)$.

b) Find an analogous algorithm for a homogeneous symmetric polynomial of degree not greater than 17.

Hint. Recall Cardano's formula. Note also that arithmetical roots can be complex.

c*) Find an analogous algorithm for any homogeneous symmetric polynomial.

36. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Prove that

$$2(a+b+c-2)^2+(ab+bc+ca)(2+3(a+b+c))\geqslant 35.$$

Hint. Perform the substitution $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$.

37. Let a, b, c be real numbers such that $a,b,c\geqslant 1$ and $a+b+c=9$. Prove that

$$\sqrt{ab+bc+ca}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Hint. Perform the substitution $a=(x+1)^2$, $b=(y+1)^2$, $c=(z+1)^2$.

38. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3+\frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 2.$$

Hint. Perform the substitution $x=\frac{a}{b+c}$, $y=\frac{b}{a+c}$, $z=\frac{c}{a+b}$. Then

$$xy+yz+zx+2xyz=1.$$

39. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Prove that

$$\frac{a^2}{4-bc}+\frac{b^2}{4-ca}+\frac{c^2}{4-ab}\leqslant 1.$$

Solution. The desired inequality can be written as

$$abc(a^3+b^3+c^3)-4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+a^2b^2c^2+16(a^2+b^2+c^2)+16(ab+bc+ca)-64\leqslant 0.$$

Since $a^2+b^2+c^2=4-abc$, we get

$$abc(a^3+b^3+c^3+4(ab+bc+ca)+abc-16)\leqslant 0.$$

Consider the case $a=0$. Equality is attained when $a=0$, $b^2+c^2=4$. Otherwise dividing both sides by abc, we obtain

$$a^3+b^3+c^3\leqslant 16-abc-4(ab+ac+bc).\quad(*)$$

Substituting $x-2$ for a, $y-2$ for b, $z-2$ for c in (*) and the relation $a^2+b^2+c^2+abc=4$, where $x,y,z>2$, we get

$$p^3-3pq+4r\leqslant 6p^2-14q$$

and the relation $r=4q-p^2$. Multiplying both sides by $4q-p^2$, we get the homogeneous inequality

$$(p^3-3pq+4r)(4q-p^2)\leqslant(6p^2-14q)r.$$

It is equivalent to the inequality

$$0\leqslant r(10p^2-30q)-(p^3-3pq)(4q-p^2).$$

The coefficient of r equals 0 if and only if $x=y=z$, i.e. $a=b=c$. Therefore equality in the desired inequality is attained when $a=b=c=1$. Otherwise the right hand side is minimal when r is minimal.

- If $x = 0$, then $a = 2$. Now if we recall $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, we get $b = c = 0$. This solution has been found before.

- If $x = y$, then
$$z = 4x - x^2 = 4(a + 2) - (a + 2)^2 = 4 - a^2.$$
Therefore $a = b$, $c = 2 - a^2$. If we combine this with (*), we obtain
$$0 \leqslant (a - 1)^2(a + 2)^2(a^2 - 2a + 2).$$
Equality is attained when $a = b = c = 1$.

40. Let a, b, c be real numbers. Prove that
$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Equality holds if either $a = b = c$ or
$$\frac{a}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}, \quad \frac{b}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{7}},$$
$$\frac{c}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}.$$

Hint. Perform the substitution $a = x + 2\cos\frac{\pi}{7}y$, $b = y + 2\cos\frac{\pi}{7}z$, $c = z + 2\cos\frac{\pi}{7}x$. Then we get homogeneous inequality.

But there exists another solutions. By definition put
$$f(a, b, c) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Then either
$$f(a, b, c) = \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc - c^2 + ac)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - 2bc + ac - a^2 + ab)^2 +$$
$$+\frac{1}{2}(c^2 - 2ac + ab - b^2 + bc)^2,$$
or
$$f(a, b, c) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 3ab + 3ac - 2c^2)^2 + \frac{3}{4}(a^2 - ab - ac - b^2 + 2bc)^2.$$

41. Find conditions on numbers p, q, r necessary and sufficient for

a) numbers a, b, c to be not less than 1;

Solution. It is an obvious corollary of the problem 23. $T(p, q, r) \geqslant 0$ and
$$(a - 1) + (b - 1) + (c - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow p \geqslant 3,$$
$$(a - 1)(b - 1) + (b - 1)(c - 1) + (c - 1)(a - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow q - 2p + 3 \geqslant 0,$$

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow r-q+p-1 \geqslant 0.$$

b) numbers a, b, c to be side lengths of a triangle (perhaps degenerate);

Hint. Use the problem 23 for numbers $(a+b-c)$, $(a-b+c)$, $(-a+b+c)$.

c) non-negative real numbers a, b, c to satisfy $2\min(a,b,c) \geqslant \max(a,b,c)$.

Hint. $2\min(a,b,c) \geqslant \max(a,b,c) \Leftrightarrow 2a \geqslant b$, $2a \geqslant c$, $2b \geqslant a$, $2b \geqslant c$, $2c \geqslant a$, $2c \geqslant b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $(2a-b)(2b-a) \geqslant 0$, $(2b-c)(2c-b) \geqslant 0$, $(2a-c)(2c-a) \geqslant 0$.

42. Let a, b, c be real numbers such that a, b, $c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Prove that

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geqslant \frac{7}{5}.$$

Hint. Perform the substitution $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{b}$, $z = \frac{a}{c}$.

43. Let a, b, c be side lengths of a triangle. Prove that

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a}\right).$$

44. Prove that there exists a polynomial $S(x,y,z)$ such that the following conditions are equivalent: **(i)** a, b, c are real numbers; **(ii)** $S(x,y,z) \geqslant 0$, where $x = a+b+c$, $y = a^2+b^2+c^2$, $z = a^3+b^3+c^3$.

Solution.

$$S(x,y,z) = T(p,q,r) = T\left(x, \frac{x^2-y}{2}, \frac{x^3-3xy+2z}{2}\right).$$

45. Prove that the following conditions are equivalent: **(i)** $s \in \left[\frac{86}{9}, 10\right]$; **(ii)** there exist real numbers a, b, c such that $a+b+c = 4, a^2+b^2+c^2 = 6, a^3+b^3+c^3 = s$.

Solution. It is an obvious corollary of the previous problem.

46. (USA TST, 2001) Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Prove that

$$ab+bc+ca-abc \leqslant 2.$$

Hint. $x = a+b+c = p$, $y = a^2+b^2+c^2 = p^2-2q$, $z = abc$.

47. (China-West, 2004) Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Hint. Perform the substitution $x = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$, $y = \sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}}$, $z = \sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}}$.

48. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2+nabc = n+3$ for some real n.

a) Assume that $0 \leqslant n \leqslant \frac{3}{2}$. Prove that $a+b+c \leqslant 3$.

b) Assume that $\frac{3}{2} \leqslant n \leqslant 2$. Prove that $a+b+c \leqslant \sqrt{2(n+3)}$.

Hint. $x = a+b+c$, $y = a^2+b^2+c^2+nabc$, $z = abc$.

c) Assume that $n = 2$. Prove that $ab+bc+ac-abc \leqslant \frac{5}{2}$.

Hint. The proof is simular to the proof of the problem 46.

49. Let a, b, c be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Prove that

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(2+\sqrt{4-3abc}).$$

Hint. $x = a^2+b^2+c^2+abc = 4$, $y = ab+bc+ca$, $z = abc$.

Распространение слухов

Задачу представляют: Бурсиан О., Кохась К., Куюмжиян К., Челноков Г.

1 Задача о сплетниках

Есть n сплетников ($n > 3$). Каждый узнал по одному новому слуху, неизвестному другим. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им слухи. Сплетники хотят добиться того, чтобы каждый из них узнал все имеющиеся слухи. Последовательность звонков, которая позволяет этого добиться, называется *способом оповещения*.

В этих задачах мы пытаемся выяснить, какое наименьшее число звонков может быть в способе оповещения при каждом n. Способ оповещения с таким количеством звонков назовем *наибыстрейшим*. Вполне может быть, что имеется несколько различных наибыстрейших способов.

1.1. Какое наименьшее число звонков потребуется четырем сплетникам?

1.2. Докажите, что если все звонки какого-нибудь способа оповещения проделать в обратном порядке, снова получится способ оповещения.

1.3. Докажите, что существует способ оповещения, состоящий из $2n - 4$ звонков.

Допустим, что n сплетников придумали способ оповещения, требующий $2n-5$ звонков или даже еще меньше. Выберем самое маленькое n, при котором существует такой способ оповещения. Такое число n будем называть *интересным*, а наибыстрейший способ оповещения при таком n назовем *сверхбыстрым*. В следующих задачах изучаются свойства сверхбыстрого способа оповещения.

1.4. Пусть n — интересное число. Докажите, что в сверхбыстром способе оповещения никакие два сплетника A и B не говорили друг с другом по телефону дважды.

1.5. Пусть n — интересное число. Сплетники стали звонить друг другу. В какой-то момент сплетник A позвонил сплетнику B, чуть позже B позвонил C, а еще позднее C позвонил A. Докажите, что сплетники использовали не сверхбыстрый способ оповещения.

1.6. Сплетники звонят по сверхбыстрому способу оповещения. В какой-то момент сплетник A позвонил в сплетнику B. Оказалось, что этот звонок был для сплетника A последним. Докажите, что для сплетника B этот звонок тоже был последним.

1.7. Докажите, что если в соответствии со сверхбыстрым способом сплетник A звонит сплетнику B, то непосредственно перед звонком эти сплетники не знали ни одного общего слуха.

1.8. Докажите, что сверхбыстрый способ оповещения содержит не менее $2n - 5$ звонков.

1.9. Докажите, что при сверхбыстром способе оповещения каждый сплетник сделал не менее трех звонков.

1.10. Докажите, что при каждом n наибыстрейший способ содержит $2n - 4$ звонков.

2 Необщительные сплетники

Пусть n сплетников не все знакомы друг с другом, а по телефону общаются только со знакомыми. При этом схема знакомств сплетников представляет собой связный граф F. Цель сплетников прежняя — чтобы все узнали все слухи за наименьшее число звонков.

Когда сплетники сделали несколько звонков, мы можем построить *граф звонков* G: вершины графа — это сплетники, а ребра — звонки (в частности, могут появиться кратные ребра). Что касается порядка, в котором совершались звонки, эта информация в графе G «утрачена». Чтобы восстановить хронологический порядок звонков, мы можем снабжать ребра дополнительными метками.

2.1. Докажите, что для любого связного графа F наибыстрейший способ содержит $2n - 3$ или $2n - 4$ звонка.

2.2. Докажите, что если в графе F содержится цикл C_4, то наибыстрейший способ содержит $2n - 4$ звонка.

2.3. Докажите, что если граф F содержит единственный цикл C_k ($k \neq 4$), то наибыстрейший способ содержит $2n - 3$ звонка.

2.4. Докажите, что если граф F не содержит цикла C_4, то наибыстрейший способ содержит $2n - 3$ звонка.

Пусть схема знакомств сплетников представляет собой связный граф F, но теперь сплетники используют вместо телефона телеграф, т. е. время от времени сплетники посылают друг другу телеграммы, содержащие все известные отправителю сплетни.

2.5. Какое наименьшее число телеграмм понадобится?

2.6. Рассмотрим «экономный» способ оповещения, который избегает дублирования информации: каждый сплетник узнает из телеграмм каждый слух не более одного раза. При таком распространении слухов может случиться, что кто-то из сплетников получит телеграмму, где среди прочего приведена и его исходная сплетня. Докажите, что в каждом экономном способе оповещения число таких сплетников не меньше $n - 1$.

3 Вариация задачи о сплетниках: NOHO

Пусть все n сплетников попарно знакомы. Рассмотрим следующее ограничение на разговоры сплетников: пусть сплетники совершают звонки так, чтобы никому из них не пришлось услышать свой собственный слух от другого человека (NOHO: No One Hears Own).

Очевидно, в этом случае в графе звонков G не может быть кратных ребер (и даже треугольников), а все вершины имеют степень не меньше 2.

3.1. Нетипичная ситуация. Пусть имеются три сплетника, знающих слух A, еще три сплетника знают слух B, два сплетника знают слух C и еще два сплетника — слух D. (Всего, значит, 10 сплетников.) Существует ли в этом случае способ оповещения, удовлетворяющий ограничению NOHO?

3.2. При каком n возможно распространение слухов NOHO?

3.3. Докажите, что в схеме NOHO требуется $2n - 4$ звонка

4 Вариация задачи о сплетниках: NODUP

Рассмотрим ситуацию, когда n сплетников строят свое общение так, чтобы каждый раз при беседе сплетники не знали ни одного общего слуха (NODup: No Duplication). Такое свойство нам уже встречалось в задаче 1.7, правда, у несуществующего объекта. Все сплетники знакомы друг с другом.

4.1. Возможно ли распространение слухов NODUP при $n = 12$?

4.2. Пусть имеются группы из 13, 8, 6, 5, 4, 4 сплетников. Каждая группа знает свой уникальный слух. Существует ли в этом случае способ оповещения, удовлетворяющий ограничению NODUP?

4.3. Возможно ли распространение слухов NODUP при $n = 20$?

4.4. При каком n возможно распространение слухов NODUP?

4.5. Приведите пример обмена слухов с ограничением NODUP за $\frac{9}{4}n + c$ звонков для бесконечного множества значений n.

4.6. Докажите, что наименьшее число звонков в схеме оповещения NODUP не меньше чем $\frac{9}{4}n + c$.

Дополнения к предыдущим сюжетам

Назовем сплетника *экспертом*, если он знает все слухи. Назовем сплетника *знатоком*, если среди остальных сплетников найдется такой не эксперт, после разговора с которым этот сплетник стал бы экспертом. Двух таких знатоков будем взаимодополняющими.

Отметим одну полезную идею. Если в некотором способе оповещения сплетники A и B стали знатоками после 50-го звонка, а впервые поговорили между собой по телефону лишь на 100-м звонке, то последовательность звонков можно переставить, поместив звонок AB на 51-е место (и сдвинув остальные), в результате чего способ оповещения по-прежнему будет работать.

1.11. Среди сверхбыстрых способов оповещения, выберем такой, в котором первый эксперт появляется как можно раньше. (Ясно, что для этого требуется не менее $n-1$ звонков.) Зафиксируем этот способ оповещения. После того как появился эксперт, в каждый момент времени пусть ℓ — это количество экспертов, m — наибольшее количество непересекающихся пар взаимодополняющих знатоков. Докажите, что для завершения способа оповещения требуется не меньше чем $n-\ell-m$ звонков.

1.12. Придумайте другое доказательство теоремы о сплетниках 1.10, использующее полуинвариант из предыдущей задачи.

4.3$\frac{1}{2}$. Докажите, что распространение слухов с ограничением NODUP невозможно:
a) при $n=14$; b) при $n=18$.

4.4$\frac{1}{2}$. Докажите, что для $n>4$ при распространении слухов с ограничением NODUP каждый сплетник говорил по телефону не менее трех раз.

Есть n химиков ($n>3$). У каждого имеется уникальный реактив в количестве 1 кг. Когда два химика встречаются, они поровну делят все имеющиеся у них реактивы. В хорошей домашней лаборатории должны быть представлены все имеющиеся реактивы. За $2n-4$ встречи домашние лаборатории всех химиков могут стать хорошими. Но для эффективной лаборатории требуется, чтобы имеющиеся реактивы присутствовали в достаточном количестве, а именно: не менее α граммов каждого реактива.

1.13. При каком наибольшем α после $2n-4$ встреч домашние лаборатории всех химиков могут стать эффективными?

5 Плохая связь

Пусть имеется n сплетников и натуральное число k. Рассмотрим ситуацию, когда расписание звонков составляется заранее и сплетники не могут от него отклоняться. Но при этом известно, что «связь плохая», из за чего могут «сорваться» k звонков (т. е. соответствующие сплетники не смогут во время звонка поменяться слухами). Аналогичная постановка вопроса может быть для случая, когда сплетники вместо звонков используют телеграф.

5.1. Решите задачу о плохой связи для случая «плохой почты» — когда сплетники посылают телеграммы, k из которых могут не дойти до адресата.

a) Пусть один из сплетников — генерал. Требуется составить такое расписание отправления телеграмм, для которого, несмотря на плохую связь, все сплетники сумеют доложить генералу свои слухи. Какое наименьшее число телеграмм им понадобится?

b) Какое наименьшее число телеграмм понадобится сплетникам, чтобы все смогли узнать все слухи?

5.2. Пусть один из сплетников — генерал. Требуется составить такое расписание звонков, чтобы несмотря на плохую связь, все сплетники сумели доложить генералу свои слухи. Обозначим через $\mu(n,k)$ наименьшее число звонков, которое понадобится сплетникам в этой ситуации. Докажите, что

a) $\mu(n,k)=\left\lceil\frac{k+1}{2}\cdot n\right\rceil$ при $k\geqslant n-2$.

b) $\mu(n,k) = \left\lceil \frac{k+2}{2} \cdot (n-1) \right\rceil$ при $k \leqslant n-2$;

5.3. Докажите, что наименьшее возможное количество звонков $\tau(n,k)$ для сплетников с плохой связью удовлетворяет неравенствам:

a) $\tau(n,k) \leqslant \left\lfloor (k+\frac{3}{2})(n-1) \right\rfloor$;

b) Оцените $\tau(n,k)$ снизу. Желательно, чтобы эта оценка была не сильно меньше оценки из пункта a).

Точное значение $\tau(n,k)$ неизвестно. Что же касается вопроса предыдущей задачи, известна следующая оценка снизу: $\mu(n,k) + n - 2\sqrt{n} \leqslant \tau(n,k)$. Является ли при фиксированном k последовательность $\tau(n,k) - (k+\frac{3}{2})n$ ограниченной — неизвестно.

5.4. Пусть теперь звонки не срываются, но сплетники хотят, чтобы все слухи, которые им известны, были *надежными*. Надежным слухом они считают всякий «чужой» слух, который им сообщили другие сплетники не менее $k+1$ раз. Докажите, что наименьшее возможное количество звонков $\gamma(n,k)$ удовлетворяет неравенствам

a) $\gamma(n,k) \leqslant \left\lceil \frac{(k+4)n}{2} \right\rceil - 4$;

b) $\left\lceil \frac{(k+4)(n-1)}{2} \right\rceil - \lfloor \log_2 n \rfloor \leqslant \gamma(n,k)$.

6 Ленивые сплетники

6.1. Пусть n сплетников совершили несколько звонков. Оказалось, что граф звонков представляет собой дерево, а каждый сплетник в результате этих звонков знает не менее k слухов.

a) Докажите, что $n \geqslant 2^{k-1}$.

b) Докажите, что если граф звонков представляет собой дерево, а каждый сплетник, кроме одного, в результате этих звонков знает не менее k слухов, то $n \geqslant 2^{k-1} - 1$.

Зафиксируем натуральные числа n и k, где $k \leqslant n$. Рассмотрим теперь ситуацию, когда n сплетников попарно знакомы друг с другом, но обладают ограниченным любопытством: они лишь хотят, чтобы в результате общения каждый узнал не менее k сплетен. Цель сплетников прежняя — узнать требуемое число сплетен за наименьшее число звонков. Наименьшее возможное число звонков, позволяющее этого достигнуть, обозначим $P(n,k)$.

В дальнейшем будем считать, что $k \geqslant 4$. Введем полезное обозначение. При фиксированном k рассмотрим конечную последовательность

$$t_i = i + 2^{k-i-2}, \quad \text{где } 0 \leqslant i \leqslant k-4.$$

Эта последовательность убывает.

6.2. Пусть число k — «мало́» по сравнению с n, а именно, выполнено неравенство $n \geqslant 2^{k-1}$. Докажите, что сплетникам потребуется «почти n» звонков: $P(n,k) = \left\lceil \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \cdot n \right\rceil$.

6.3. Для более крупных k подберем i, $0 \leqslant i \leqslant k-4$, при котором $t_i \leqslant n < t_{i-1}$. Докажите, что $P(n,k) \leqslant n+i$.

6.4. Докажите, что в условиях предыдущей задачи имеет место равенство $P(n,k) = n+i$.

Решения

1.1. Ответ: 4 звонка.

1.2. Если слух сплетника A по цепочке звонков дошел до сплетника B, то по обратной цепочке слух от сплетника B дойдет до сплетника A.

1.3. Индукция: База 4 сплетника. Переход: добавим сплетника и два звонка: новый сплетник раньше всех звонит кому угодно, а потом последним звонит тоже кому угодно.

1.4. [11, лемма 2]. Будем считать, что A и B — это один и тот же человек, знающий в каждый момент объединенную информацию. Звонки между A и B удалим. Тогда мы получим способ оповещения $(n-1)$ человека, состоящий из $2(n-1)-5$ звонков, что противоречит минимальности n.

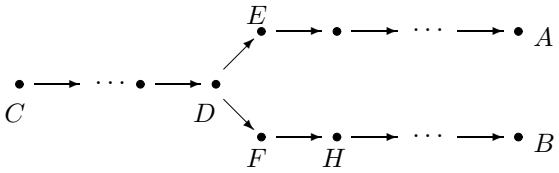
1.5. Мы взяли это утверждение в [1]. Нужно отменить сплетника A, причем до разговора BC всю активность A берет на себя B, а после разговора BC всю активность A берет на себя C. Число людей уменьшилось на 1, а число звонков на 2 — это противоречит минимальности n.

Аналогично проверяется, что невозможны более длинные цепочки, начинающие и заканчивающиеся одним и тем же человеком.

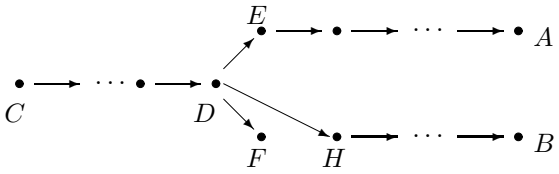
1.6. После разговора с A сплетник B знает все слухи. Допустим тем не менее, что после разговора с A сплетник B позвонил какому-то сплетнику C. Значит, в этом разговоре сплетник C услышал от B свой собственный слух. Но циклы запрещены задачей 1.5, противоречие.

1.7. Мы взяли это утверждение в [11, лемма 4], оно эквивалентно лемме о пересечении в [1]. Воспользуемся следующей идеей: если в какой-то момент Петр и Павел обладают одинаковой информацией (например сразу после разговора друг с другом), то мы можем "поменять их местами" во всех последующих звонках и у нас получится опять способ оповещения.

Допустим, что при разговоре сплетники A и B знали общий C-слух. Рассмотрим любую последовательность звонков, по которой этот слух дошел от C до A и до B.



Допустим, что в этой последовательности звонок DE был раньше звонка DF. Тогда, поменяв местами сплетников D и F, сразу после звонка DF мы можем считать, что вместо звонка FH имел место звонок DH. У нас получится последовательность звонков, в которой цепочка $DFH\ldots B$, находящаяся после «развилки», укоротилась (теперь это цепочка $DH\ldots B$).



Звонок DH по-прежнему позже DE. Продолжая такие действия, мы полностью устраним цепочку $H\ldots B$ после «развилки». На последнем шаге этого процесса мы поменяем местами сплетников B и D (сразу после разговора BD), при этом разговор AB, с которого мы начали решение, заменится на AD. У нас останется цепочка $DE\ldots A$ и последующий разговор AD. Это невозможно по задаче 1.4.

1.8. Мы взяли это утверждение в [1]. Если каждый сплетник звонил не менее 4 раз, то всего было не менее $2n$ звонков. Допустим, A звонил три раза. Чтобы от A информация дошла

до других, требуется не менее $n-1$ звонков, чтобы до A дошла информация от других, требуется не менее $n-1$ звонков. В силу предыдущей задачи, эти наборы звонков могут пересекаться только по звонкам, которые совершал сам A. Действительно, если звонок CD служил для того, чтобы передавать информацию от A, то оба говоривших знают A-слух и если кто-то из них будет передавать информацию для A, то вместе с нею он вернет A его A-слух, что запрещено задачей 1.5. Итого $(n-1)+(n-1)-3=2n-5$.

1.9. Если Вася сделал k звонков, то как и в предыдущей задаче $2n-5 \geqslant (n-1)+(n-1)-k$. Откуда $k \geqslant 3$.

1.10. Достаточно убедиться, что не существует сверхбыстрых способов, содержащих $2n-5$ звонков. По задаче 1.6 звонки бывают начальные (их $n/2$ шт., для обоих собеседников это первый звонок), финальные (их тоже $n/2$ шт., для обоих собеседников это последний звонок) и средние (каковых получается $n-5$). По задаче 1.9 каждый сплетник сделал хотя бы один средний звонок. Нарисуем граф средних звонков. В нем n вершин, $n-5$ ребер, значит, всего не менее 5 компонент, причем в каждой есть хотя бы одно ребро.

Если AB и AC — первый и последний звонки (произвольного) сплетника A, то при помощи средних звонков информация от A могла распространяться лишь в компонентах, куда входит A или B, а информация для A распространялась лишь по компонентам, куда входит A или C. Таким образом, как минимум две компоненты рассматриваемого графа не участвовали в передаче информации ни от A, ни к A. Эти компоненты содержат $d \geqslant 2$ ребер. Тогда, как в задаче 1.9, $2n-5 \geqslant (n-1)+(n-1)-k+d$. Отсюда k (количество звонков произвольного сплетника A, а значит, и любого другого сплетника) не меньше 5, чего не может быть (см. решение 1.8).

2.1. Это утверждение доказано в [6]. С учетом задачи 1.10 утверждение следует из того, что для любого дерева требуется $2n-3$ звонка. Действительно, $2n-3$ звонков достаточно, если сплетники будут последовательно звонить от периферии к корню. (Сначала звоним по ребрам, которые находятся дальше всего от корня, потом по долее близким и т.д.) Это приведет к тому, что появится два полностью осведомленных сплетника — корень и один из его соседей. Потом повторяем все звонки в обратной последовательности. Меньшим числом звонков не обойтись, поскольку при меньшем числе звонков в дереве будет по крайней мере два ребра, использованных лишь по одному разу (будем называть такие ребра *сингулярными*). Наличие двух сингулярных ребер разбивает граф на три компоненты связности, между которыми невозможен полный обмен информацией.

2.2. Конструкция приведена в [6]. Сожмем цикл C_4 в одну вершину, будем считать ее корнем полученного дерева. Будем звонить от периферии к корню, как в предыдущем пункте, потом применим наибыстрейший способ из пункта 1.1 к подграфу C_4, после чего повторим звонки на дереве в обратной последовательности. Такой способ оповещения требует $(n-4)+4+(n-4)=2n-4$ звонка.

2.3. Доказательство приведено в [6].

Предположим, что существует способ, содержащий всего $2n-4$ звонка. Тогда заметим, что каждое ребро должно быть использовано в этом способе оповещения хотя бы один раз. Если это ребро является мостом и не было использовано, то невозможно распространение информации между двумя частями, на которые оно делит граф. Если оно лежит на цикле, то после его удаления из графа получаем дерево, в котором распространение информации невозможно быстрее, чем за $2n-3$ по решению пункта 2.1. Следовательно, при способе за $2n-4$ звонка имеется по крайней мере 4 сингулярных ребра (напомним, что мы называем ребро сингулярным, если ему соответствует лишь один звонок).

Допустим, что хотя бы одно из этих ребер является мостом. При его удалении граф распадается на две компоненты связности. Тогда к моменту звонка по этому ребру в каждом из его концов должна накопиться вся информация из соответствующей компоненты. Пусть размер одной из компонент равен a, тогда для этого потребуется $(a-1)+(n-a-1)=$

$n-2$ звонков. После этого происходит звонок по мосту и еще столько же звонков, чтобы информация распространилась обратно. В сумме получаем $2n-3$ звонка. Таком образом, сингулярные ребра не могут быть мостами, т. е. все они лежат на цикле.

Тогда после удаления сингулярных ребер из графа получится 4 компоненты связности, каждая из которых является деревом. Перенумеруем их в порядке обхода цикла, пусть эти компоненты содержат n_1, n_2, n_3, n_4 вершин, $n_1+n_2+n_3+n_4=n$. Посмотрим, в каком порядке сингулярные ребра могут входить в последовательность звонков. Пусть сначала в последовательности звонков стоят два ребра, связанных с одной и той же компонентой i. Это невозможно, так как тогда эта компонента не получит сведений из компоненты $(i+2) \mod 4$. Значит, порядок вхождения сингулярных ребер в способ оповещения аналогичен порядку вхождения ребер графа в решении пункта 1.1: можно считать, что сначала были сделаны звонки 1–2, 3–4, а после этого 2–3 и 1–4.

К моменту совершения звонка 1–2, оба собеседника должны были знать все слухи из своей компоненты, значит, к этому времени должно было быть совершено не менее $(n_1-1)+(n_2-1)$ звонков внутри этих компонент. Аналогично к моменту звонка 3–4 должно было быть совершено не менее $(n_3-1)+(n_4-1)$ звонков внутри третьей и четвертой компонент. Мы насчитали $n-4$ звонков.

Далее, в результате совершения звонка 2–3 каждый из собеседников узнал уникальный для своей компоненты новый слух. Значит, после этого звонка в компонентах должно произойти еще не менее $(n_2-1)+(n_3-1)$ звонков, распространяющих эти уникальные слухи. Аналогично после звонка 1–4 произойдет не менее $(n_1-1)+(n_4-1)$ звонков в первой и четвертой компонентах. Мы обнаружили еще $n-4$ звонка.

Так как наш цикл содержит более 4 вершин, то есть хотя бы одна компонента, пусть для определенности первая, для которой смежные с ней два сингулярных ребра не имеют общей вершины. Следовательно, эта компонента сможет передать информацию, как это требуется при способе оповещения, только если в промежутке между звонками 1–2 и 1–4 внутри первой компоненты будет сделан хотя бы один звонок, передающий слухи второй компоненты от собеседника, только что узнавшего по звонку 1–2, к собеседнику, который будет передавать их по звонку 1–4. Этот звонок еще не был учтен нами ранее.

Итого мы имеем $(n-4)+(n-4)+4+1$ звонков.

2.4. Ф. Харари и А. Швенк [6] предлагали в 1974 г. \$10 за доказательство этого факта. В 1980 г. R. Bumby [4] решил эту задачу. Чуть позже D. Kleitman и J. Shearer [7] привели другое доказательство, причем в их рассуждениях не требовалось, чтобы все звонки были двусторонними. Мы приводим доказательство из [7], впрочем, опуская детали, возникающие в случае односторонних звонков.

Пусть дана схема оповещения, состоящая из $2n-4$ звонков. Докажем, что она содержит 4-цикл.

Порядок звонков в схеме оповещения не задан жестко. Разные перестановки последовательности звонков, реализующие оповещение, будем называть *упорядочиваниями* схемы оповещения.

Рассмотрим граф, изображающий первые $n-1$ звонков, и отметим его наименьшую компоненту связности, являющуюся деревом. Такая компонента всегда найдется, так как в противном случае суммарное число ребер окажется не меньше суммарного числа вершин. Пусть S — минимальная отмеченная компонента-дерево, выбранная по всем упорядочиваниям.

Пусть в компоненте S содержится m вершин. Отметим, что $m \geqslant 2$, поскольку иначе, если $m=1$, а мы изобразили уже $n-1$ звонков, то чтобы информация от этой вершины дошла до остальных, потребуется еще не менее $n-1$ звонков, т. е. в сумме будет больше $2n-4$ звонков. Рассмотрим $(m-1)$-й по порядку звонок внутри компоненты S. Если его отменить, компонента распадется на две части — S_1 и S_2. Опять перебирая упорядочения, меняющие местами звонки внутри S, мы можем дополнительно считать, что S_1 — наименьшая возможная компонента в том смысле, что другие упорядочения не могут дать нам компоненту строго содержащуюся в S_1. Пусть $(m-1)$-й звонок происходит между вершинами $x_1 \in S_1$

и $y_1 \in S_2$. Мы последовательно проверим следующие пять утверждений, выделенных курсивом. Из пятого утверждения следует, что схема оповещения содержит 4-цикл, что нам и требуется.

Утверждения.

1) *Компонента S_1 содержит не менее двух вершин.*

2) Пусть компонента S_1 состоит из j вершин. Тогда $(j-1)$ звонков, сделанные внутри S_1, (среди первых $m-2$ звонков в S) превращают эту компоненту в дерево, обозначим его T (а обозначение S_1 будем относить скорее к множеству вершин). Пусть дана некоторая последовательность звонков. Будем называть звонок между вершинами a и b *особенным*, если этот звонок произошел позже всех остальных звонков с участием a или b. *Дерево T содержит единственный особенный звонок, в этом звонке обязательно участвует вершина x_1.* Обозначим через x_2 второго участника этого звонка.

3) Для построения множеств S, S_1 и дерева T мы использовали $n-1$ первых звонков. Способ оповещения содержит еще $n-3$ звонка, обозначим множество этих звонков через $\mathcal{L}$. Если удалить из дерева T ребро x_1x_2, дерево распадется на две части T_1 и T_2, где обозначения выбраны так, что $x_1 \in T_1$, $x_2 \in T_2$, см. рис. 1. *Для каждой вершины $z \notin T_1$ (в том числе для вершин z, лежащих вне S) существует цепочка звонков, содержащая лишь звонки из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, по которой к z может прийти слух от вершины x_1. То же касается распространения информации от x_2 к вершинам вне T_2. Более того, множество звонков $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$ образует дерево.*

4) *Последовательность звонков, которая доставляет слух вершине x_1 (или x_2) от остальных, может содержать не более одного звонка из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, и если таковой звонок встретился в этой последовательности, он является в ней последним.*

5) Рассмотрим какую-нибудь последовательность звонков, по которой слух y_1 дошел до x_2. Пусть y_2x_2 — последний звонок в этой последовательности. Теперь рассмотрим какую-нибудь последовательность звонков, по которой слух y_2 дошел до x_1. Пусть y_3x_1 — последний звонок в этой последовательности. Продолжая это построение, скажем, что y_{i+1} — это тот сплетник (не совпадающий с x_1 и x_2), который участвовал в последнем звонке из последовательности, доставившей слух от y_i к x_1 (если i четно) или x_2 (если i нечетно). *Все вершины y_i лежат в S_2. Найдутся нечетное i_1, четное i_2, такие что $y_{i_1}y_{i_2}$ — звонок из S_2. Более того, в этом случае $y_{i_1}x_1$, $y_{i_2}x_2$ — звонки, принадлежащие нашей схеме оповещения, причем они совершены позже звонков x_1x_2 и $y_{i_1}y_{i_2}$.*

Доказательства.

1) Можно считать, что звонок x_1y_1 был $(n-1)$-м по счету. Если S_1 состоит из одной вершины, то после первых $n-2$ звонков, слух из этой вершины еще никуда не ушел. Для

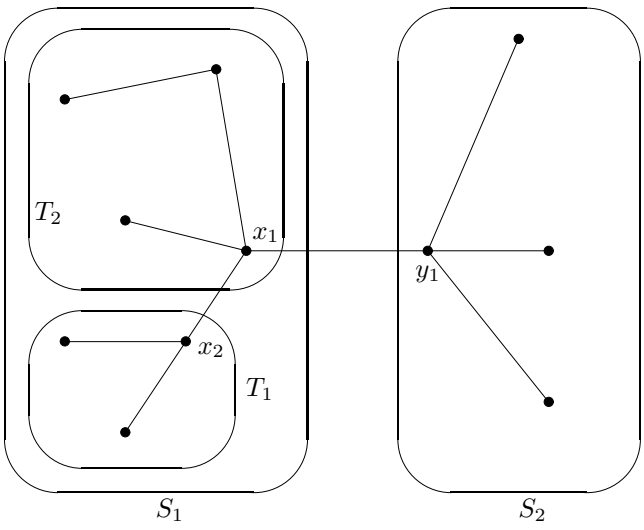


Рис. 1. Компонента связности S

его распространения понадобится еще по крайней мере $n-1$ звонков, т.е. в сумме будет не менее $2n-3$ звонков.

2) Это следует из условия минимальности, наложенного нами на S_1. Последний звонок — всегда особенный, так что хотя бы один особенный звонок существует. Если бы в S_1 нашелся особенный звонок ab, не задевающий вершину x_1, мы могли бы переупорядочить звонки в S, поставив звонок ab на $(m-1)$-е по счету место. Тогда первые $m-2$ звонка порождали бы компоненту, строго содержащуюся в S_1, что противоречит ее минимальности.

3) В нашей схеме оповещения слух от x_1 по какой-то цепочке звонков дошел до z. Пусть ab — первый звонок в этой цепочке, не лежащий в T_1. Тогда ab и все последующие звонки в этой цепочке лежат в $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Если существует цепочка звонков из $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$, предшествующая ab и доставляющая информацию от x_1 к a или b, объединим ее с предыдущей рассмотренной цепочкой и получим требуемую цепочку от x_1 к z. Если же такой цепочки не существует, то схема оповещения допускает следующее переупорядочивание звонков: пусть звонок x_1y_1 идет n-м по счету, звонок x_1x_2 — $(n-1)$-м, а звонок ab или какой-то звонок из $\mathcal{L}$, предшествующий звонку ab, — $(n-2)$-м по счету (относительный порядок остальных звонков не изменился).

Если теперь $(n-2)$-й звонок не задевает S_1 (или S_2), то в начале в качестве S можно было взять S_1 (или S_2), что противоречит минимальности S. Если же $(n-2)$-й звонок соединяет S_1 с S_2, то это противоречит минимальности S_1, так как удаление $(n-1)$-го по счету звонка x_1x_2 теперь создает компоненту, строго содержащуюся в S_1.

Мы доказали существование цепочки звонков, передающих информацию от x_1 к z и лежащих в $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$. Аналогично существуют цепочки, передающие информацию от x_2 к $z\notin T_2$. Таким образом, множество $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$, содержащее $n-1$ ребро, позволяет распространять информацию от x_1 и x_2 к остальным $n-2$ вершинам. Следовательно, ребра из $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$ порождают остовное дерево графа звонков.

4) Остовное дерево, описанное в предыдущем пункте, состоит из звонков $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$. Эти звонки в нашем способе оповещения хронологически последние. Поэтому если последовательность звонков, передающая информацию из z в x_1 (для x_2 рассуждения аналогичны), содержит звонок из $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$, то и все последующие звонки тоже лежат в этом множестве. Но цепочки звонков в этом остовном дереве «уводят» информацию от «центра» $x_1\cup x_2$ к другим вершинам, поэтому единственный способ передать информацию в x_1 — передать ее от непосредственного соседа вершины x_1, т. е. по цепочке, содержащей лишь один звонок с участием x_1, ч.т.д.

5) По определению $y_1\in S_2$. В силу свойства 4) в цепочке звонков, доставившей информацию от y_1 к x_2 все звонки, кроме, быть может, последнего звонка y_2x_2, — это какие-то из первых $n-1$ звонков, кроме x_1y_1, x_1x_2. По отношению к этим звонкам мы определяли S_2 как компоненту связности, поэтому $y_2\in S_2$. Аналогично проверяется, что и все остальные вершины y_i лежат в S_2. Отметим, что тогда звонки вида y_ix_1 или y_ix_2 из определения вершин y_i принадлежат остовному дереву $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Поскольку компонента S_2 конечна, какие-то две из вершин совпадают, скажем, $y_i=y_{i+k}$. При этом число k — обязательно четное, так как ребра y_ix_1 и y_ix_2 не могут одновременно принадлежать остовному дереву $\mathcal{L}\cup\{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Рассмотрим теперь цепочку путей

$$y_i\to y_{i+1}\to\cdots\to y_{i+k}=y_i$$

(каждый путь в этой цепочке хронологически упорядочен, но соседние пути могут нарушать хронологию). Поскольку этот замкнутый маршрут расположен на дереве, каждое ребро в нем было пройдено в обоих направлениях. Мы утверждаем, что все вершины, по которым проходит этот маршрут, лежат в множестве $\{y_j, i\leqslant j\leqslant i+k\}$. Действительно, если маршрут проходит через вершину a, не совпадающую ни с одним из y_j, рассмотрим хронологически самый последний звонок в этом маршруте с участием вершины a, пусть это звонок ab.

В какой-то момент, проходя очередной путь $y_j \to y_{j+1}$, мы двигались в направлении от b к a, но поскольку этот звонок хронологически последний, мы не можем продолжить движение за точку a. Значит, $a = y_{j+1}$.

Теперь мы без труда можем выбрать звонок $y_{i_1}y_{i_2}$, где i_1 нечетное, i_2 четное (и разумеется, он лежит в S_2). Звонки $y_{i_1}x_1$ и $y_{i_2}x_2$ также присутствуют в схеме оповещения, поскольку по определению точек y_i они использовались для передачи информации вершинам x_1, x_2.

2.5. Ответ: $2n-2$ телеграммы.

Мы взяли эту задачу в [6]. До того как появится первый человек, узнавший все слухи, должно быть послано не менее $n-1$ телеграммы. После этого каждый из остальных должен получить хотя бы одну телеграмму, чтобы завершить ознакомление со слухами. Значит, еще будет послано еще не менее $n-1$ телеграмм.

Пример строится на базе любого дерева, если сначала посылать телеграммы от периферии к корню, а потом обратно.

2.6. Это теорема 3 [9]. Пример способа оповещения, в котором $n-1$ человек прочтет в телеграмме свой собственный слух, тривиален: пусть все сначала телеграфируют Васе, а потом Вася посылает всем телеграммы с полным комплектом слухов.

Оценка. Рассмотрим минимальный контрпример, в котором не более $n-1$ человек прочли в телеграмме свой собственный слух. Пусть последняя телеграмма была послана сплетником A сплетнику B. Очевидно, сплетник A уже знает все слухи, значит, сплетник B, во-первых, один из тех, кто прочел свой слух в полученной телеграмме, а во-вторых, не знает ни одного слуха, кроме своего собственного (иначе он какой-то слух выучил из телеграмм дважды). Значит, ранее сплетник B не получил ни одной телеграммы, а только посылал. Удаляя из этой компании сплетника B и соответствующие телеграммы, мы получим меньший контрпример. Противоречие.

3.1. Ответ: это возможно даже с ограничением NODUP. См. начало решения задачи 4.3.

3.2. Ответ: при четных n. [12]

Для каждого сплетника отметим последний звонок, в котором он участвовал. При выполнении ограничения NOHO эти последние звонки разбивают всех сплетников на пары — см. рассуждение в решении задачи 1.6 без последнего предложения. Таким образом, n должно быть четным.

Отметим, что первые звонки тоже разбивают сплетников на пары.

Для каждого четного n предъявим способ оповещения, подчиненный ограничению NOHO, состоящий из $2n-4$ звонков [12, лемма 2.4]. Пусть $m = \frac{1}{2}n - 1$. Обозначим сплетников a_i, b_i, $i = 0, 1, \ldots, m+1$, — но здесь $n+2$ сплетника, будем считать, что $a_0 = b_{m+1}$, $a_{m+1} = b_0$. В качестве первых звонков возьмем звонки (в порядке возрастания i, см. рис. 2)

$$a_i b_{m+2-i}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m+1;$$

далее выполним средние звонки

$$a_i a_{i+1}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad \text{и} \qquad b_i b_{i+1}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m-1;$$

и, наконец, последние звонки

$$b_i a_{m-i}, \qquad \text{где } i = 0, 1, \ldots, m.$$

Непосредственно проверяется, что указанная система звонков является способом оповещения, подчиненным ограничению NOHO.

3.3. Поскольку любая схема оповещения содержит не менее $2n-4$ звонков, достаточно привести пример, удовлетворяющий ограничению NOHO и содержащий $2n-4$ звонка. Этот пример приведен в предыдущем решении.

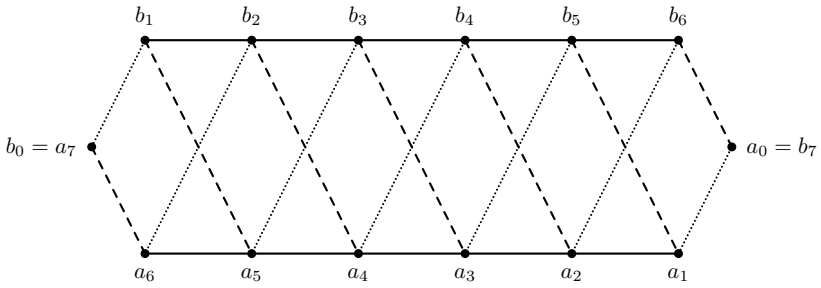


Рис. 2. Оптимальные звонки с ограничением NOHO.

4.1. Ответ: да. [8]. Прежде чем приводить решение задачи, дадим несколько определений.

Уникальные сплетники, известные сплетникам до того как они стали обмениваться информацией, будем называть также *изначальными*. Пусть после нескольких звонков имеется такое подмножество изначальных сплетен, что каждый сплетник либо знает все сплетни из этого подмножества, либо не знает ни одной из них. Тогда при рассмотрении последующих звонков можно рассматривать такое подмножество сплетен как одну большую сплетню. Будем называть ее *объединенной* или *общей* сплетней (определение из статьи [8]). Например, пусть сплетникам, номера которых указаны ниже, известны следующие сплетни, обозначенные греческими буквами.

Сплетник	1	2	3	4
Какие сплетни знает	$\alpha\gamma$	β	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$

В этом примере сплетни α и γ образуют объединенную сплетню, поскольку каждый сплетник либо знает обе эти сплетни, либо не знает ни одной. А вот набор сплетен β, δ объединенную сплетню не образует, так как второй сплетник знает лишь одну из них.

Рассмотрим чуть более общую постановку задачи. Пусть имеются группы из $a_1, a_2, \ldots, a_k$ сплетников, причем в каждой группе всем известен один и тот же набор сплетен. Такое объединение сплетников будем называть *коллективом*. Сплетники по-прежнему общаются друг с другом по телефону и хотят, чтобы каждый из них узнал все имеющиеся сплетни. Если для такого коллектива существует хотя бы один способ оповещения, подчиненный ограничению NODUP, то будем называть этот коллектив *сплоченным*. Коллектив, содержащий только одну группу, тоже будем считать сплоченным. Так, коллектив из трех групп сплетников $\{1, 3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ в предыдущем примере не является сплоченным. В этих терминах задача про n сплетников, знающих по одной уникальной сплетне, теперь формулируется для коллектива из n групп, каждая из которых состоит из одного сплетника.

Если в коллективе каждая группа знает лишь одну сплетню (эта сплетня может быть изначальной или объединенной, являющейся подмножеством нескольких изначальных в смысле определения выше), то такой коллектив назовем *простым*. Так, коллектив из трех групп сплетников $\{1, 3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ в предыдущем примере не является простым (сплетник 4 знает две сплетни, не образующие объединенную сплетню).

Заметим, что если объединить два сплоченных коллектива сплетников, в которых поровну сплетников, а множества их изначальных сплетен не пересекаются, то снова получится сплоченный коллектив. Действительно, мы сразу получим способ оповещения, если сначала в каждом из коллективов все сплетники узнают все сплетни своего коллектива, а потом каждый сплетник из первого коллектива поговорит с кем-то из второго. Таким способом можно из коллективов, содержащих одну группу, построить, например, следующие коллективы:

$$(a, a), \quad (a, a, 2a, 4a, 8a, 16a), \quad (a, a, a, a, 4a, 4a, 4a, 16a), \quad \underbrace{a, a, a, \ldots, a}_{2^k \text{ групп}} \tag{1}$$

Пусть имеется два коллектива $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, для которых множества изначальных сплетен совпадают. Предположим, что при каждом i группа из a_i человек первого

коллектива и группа из b_i человек второго знают одно и то же множество сплетен. При этом мы допускаем, что a_i или b_i может быть равным нулю; если так случилось, к примеру, если $a_i = 0$, то изначальные сплетни, составляющие это множество сплетен, должны быть известны в других ненулевых группах первого коллектива. Назовем *суммой* этих коллективов коллектив $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_k + b_k)$. Например, непростой коллектив из 10 сплетников, которым известны сплетни α, β, γ

Наборы сплетен	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
количество сплетников	3	3	2	2

представи́м в виде суммы двух коллективов:

Коллектив	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
1	3	0	0	2
2	0	3	2	0

Заметим, что если коллективы были сплоченными, то и их сумма тоже является сплоченным коллективом. Значит, если коллектив сплетников раскладывается в сумму сплоченных коллективов, каждый из которых знает в объединении тот же набор сплетен, что и исходный коллектив, то он тоже является сплоченным.

Вернемся к решению задачи. Преобразуем простой коллектив, состоящий из 12 одиночных сплетников, в простой коллектив $(4, 4, 4)$ (2^d сплетников, каждый из которых знает одну уникальную сплетню, всегда могут объединиться в группу как в примерах (1)). А теперь заметим, что он является суммой трех простых сплоченных коллективов $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ и $(2, 1, 1)$.

4.2. Ответ: да.

Сначала слегка укрупним группы.

Сплетни	α	β	γ	δ	ε	ζ
Число сплетников	13	8	6	5	4	4

$\rightarrow$

α	β	γ	δ	$\varepsilon\zeta$
13	8	6	5	8

$\rightarrow$

α	γ	δ	$\beta\varepsilon\zeta$
13	6	5	16

Полученный простой коллектив легко раскладывается в сумму пяти сплоченных: $(2, 1, 1, 4)$ (2 раза), $(4, 1, 1, 2)$ (2 раза), $(1, 2, 1, 4)$ (1 раз).

Другое разложение. Пусть сначала один человек, знающий сплетню γ, поговорит с человеком, знающим сплетню ζ, а также один человек, знающий сплетню δ, поговорит с человеком, знающим сплетню ε.

Коллектив	α	β	γ	δ	ε	ζ	$\delta\varepsilon$	$\gamma\zeta$
1	2	2	1	0	0	2	1	0
2	8	4	0	2	1	0	0	1
3	1	1	4	0	0	1	1	0
4	2	1	0	2	2	0	0	1

4.3. Ответ: да. [8].

Рассмотрим сначала простой коллектив сплетников $(3, 3, 2, 2)$, в котором каждая группа знает соответственно сплетню α, β, γ, δ. Пусть один сплетник из I группы переговорит с одним из III группы, а один из II — со сплетником из IV. Получится коллектив (уже не простой) из 6 групп, который легко разложить в сумму трех сплоченных.

α	β	γ	δ
3	3	2	2

$\rightarrow$

α	β	γ	δ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$
2	2	1	1	2	2

$\rightarrow$

Коллектив	α	β	γ	δ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$
1	0	0	0	0	1	1
2	2	0	1	0	0	1
3	0	2	0	1	1	0

Теперь возьмем наших 20 сплетников и преобразуем их в простой коллектив $(4,4,4,4,4)$. Этот коллектив является суммой двух простых коллективов $(3,3,2,1,1)$ и $(1,1,2,3,3)$, каждый из которых может с помощью одного звонка быть преобразован в коллектив $(3,3,2,2)$, который мы уже рассматривали.

4.3$\frac{1}{2}$. Докажем, что при $n = 6$, 10, 14, 18 распространение слухов с ограничением NODUP невозможно [8, предложение 4].

Утверждение 1 [8, лемма 1]. При выполнении ограничения NODUP сплетники разбиваются на пары по первым звонкам, а также разбиваются на пары по последним звонкам.

Доказательство. Утверждение о последних звонках очевидно (если кто-либо узнал все сплетни, то его последний собеседник тоже узнал все сплетни и оба больше не могут ни с кем разговаривать).

Докажем утверждение о первых звонках. Пусть сплетник A — это первый человек, с которым разговаривал сплетник B. Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда для сплетника A первый разговор был с другим человеком C. После этого разговора сплетник C знает сплетню человека A и не знает сплетню B. После разговора сплетника B с A сплетня B всегда путешествует с A. Следовательно, C не сможет ее узнать. □

Пусть $n = 2k$. Можно считать, что первые звонки сплетников суть в точности первые k звонков схемы оповещения, а последние звонки сплетников — это в точности последние k звонков схемы оповещения. После того как сделаны первые k звонков, образовалось k объединенных сплетен. В каждый момент времени для каждого сплетника X назовем *напарником* сплетника X того сплетника Y, с которым X непосредственно перед этим разговаривал по телефону. Сразу после их разговора оба знали одинаковый набор сплетен.

Утверждение 2. При $n > 4$ ни один из сплетников не может перед своим последним разговором знать $k-1$ объединенных сплетен.

Доказательство. Если сплетник A перед последним разговором знает $k-1$ объединенную сплетню, то его собеседник B в этом последнем разговоре знал всего одну объединенную сплетню. Обозначим через B_1 первого собеседника сплетника B, через A_1 — собеседника A в предпоследнем разговоре. Теперь ясно, что сплетни B и B_1 могут быть известны только перечисленным в этом рассуждении персонажам. □

Из этих двух утверждений сразу следует, что при $n = 6$ схема NODUP невозможна: так как после первых звонков сплетни попарно объединились, то в любом последнем звонке участники могут знать лишь 2 и 4 сплетни, что запрещено вторым утверждением.

Разберем случай $n = 10$. В силу запрета из утверждения 2 в последнем разговоре могут участвовать лишь сплетники, один из которых знает две объединенные сплетни, а другой — три. Таким образом, перед тем как произошли k последних разговоров, было ровно 5 сплетников, знавших по 3 объединенные сплетни. Напарник каждого из этих пяти сплетников — один из этих же пяти сплетников (потому что человек, узнавший три сплетни, может после этого участвовать лишь в последнем разговоре). Таким образом, мы разбили 5 сплетников на пары. Это противоречие показывает, что единственный логически возможный случай не может быть реализован.

Разберем случай $n = 14$. В силу запрета из утверждения 2 в ни один из сплетников, участвующих в последнем разговоре, не должен знать ровно 6 сплетен. Так же, как в предыдущем параграфе, убеждаемся, что случай, в котором все сплетники в последнем разговоре знают по три или по четыре объединенные сплетни, невозможен (иначе мы найдем паросочетание на множестве из 7 сплетников, знающих 4 сплетни). Из тех же соображений должно быть четное число пар сплетников, знающих в последнем разговоре 2 или 5 сплетен. Тогда имеется нечетное количество пар сплетников, знающих в последнем разговоре 3 или 4 сплетни, и чтобы в очередной раз не возникло противоречия, напарник хотя бы одного из сплетников, знавших в последнем разговоре 4 сплетни, должен перед своим последним разговором «выучить» пятую сплетню.

Введем обозначения. Пусть A — сплетник, знавший в последнем разговоре объединенные сплетни номер 1, 2, 3, 4; B — его напарник, выучивший после разговора с A, сплетню номер 5 (в разговоре с C, знавшим только эту одну сплетню). Пусть B и C свои последние разговоры провели со сплетниками D и E, знавшими лишь 7-ю и 8-ю сплетни, ничто нам не мешает думать, что они узнали эти сплетни друг от друга. Пусть F, G, H — сплетники, узнавшие после своего первого разговора сплетни 5, 6, 7 (и не совпадающие с уже обозначенными сплетниками).

C	5	D	6,7
	↕		
B	1,2,3,4	E	6,7

A	1,2,3,4
F	5,6,7

H	5,6,7
G	6,7

Последний собеседник сплетника A должен был знать сплетни 5, 6, 7. В силу симметрии обозначений F, G, H, мы можем считать, что сначала F и G поговорили друг с другом, потом F поговорил с H и, наконец, F стал последним собеседником для A. Но теперь единственный способ для G узнать объединенную сплетню, известную изначально H (даже с учетом того, что мы рассматриваем сейчас не всех 14 сплетников), — это поговорить с ним. При этом G услышит повторно сплетню от F.

Случай $n = 18$ еще хуже.

4.4. Ответ: при $n = 1$, 2, 4, 8, 12, 16 и при всех четных $n \geqslant 20$.

Случаи $n = 1$, 2 тривиальны. Далее полагаем $n \geqslant 3$. Из решения задачи $4.3\frac{1}{2}$ сразу следует, что при нечетных n и при $n = 6$, 10, 14, 18 NODUP-схема не существует.

Утверждение [8, леммы 5, 6 и предложение 2]. При $n \equiv 0 \pmod 4$ возможно распространение слухов с ограничением NODUP.

Доказательство. По индукции.

Для n, являющихся степенью двойки, возможность распространения слухов следует из конструкции (1). Для $n = 12$, 20 примеры распространения слухов приведены в предыдущих задачах. Отнесем случаи $n = 4$, 8, 12, 16, 20 к базе индукции.

Докажем переход. Пусть $n \geqslant 24$ — очередное число, для которого мы хотим построить схему распространения слухов, а для меньших n существование такой схемы уже установлено. Заметим, что если n делится на 12, то можно разделить всех сплетников на 3 группы одинакового размера, в каждой из них число сплетников делится на 4 и меньше n, значит, внутри всех этих групп существует способ оповещения. Получим простой коллектив $(4a, 4a, 4a)$, $a = n/12$, который является суммой a сплоченных простых коллективов $(4, 4, 4)$. Если n не делится на 12, то $n = 12a + r$, где остаток $r = 4$ или 8. Если удастся разбить остаток на слагаемые $r = r_1 + r_2 + r_3$ таким образом, чтобы $4a + r_i$ сплетников по-прежнему образовывали группу, а (r_1, r_2, r_3) образовывали бы сплоченный коллектив, то все будет доказано. Действительно, тогда мы организуем три группы размера $4a + r_1$, $4a + r_2$, $4a + r_3$, а сумма будет содержать одно новое слагаемое — коллектив из r сплетников. Остаток $r = 4$ слишком мал, но всегда можно приписать к нему $12k$. Пусть $k = 1$, получаем коллектив $(4(a-1)+4, 4(a-1)+4, 4(a-1)+8)$, раскладывающийся в сумму из $a - 1$ коллективов $(4, 4, 4)$ и коллектива $(4, 4, 8)$. При $r = 8$ можно положить $k = 2$ и все аналогично.

Утверждение [8, леммы 7, 8, 9 и предложение 3]. При $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \geqslant 22$ возможно распространение слухов с ограничением NODUP.

Доказательство. Мы наметим лишь план действий, подробности см. в [8].

Будем доказывать утверждение по индукции. База здесь представляет некоторую проблему: нужно проверить существование NODUP-схемы для всех четных маленьких n (а именно, при $20 \leqslant n \leqslant 62$).

Заметим, что если бы n делилось на 16, то можно было бы разделить сплетников на 4 группы одинакового размера, образующих простой сплоченный коллектив $(4a, 4a, 4a, 4a)$, $a = n/16$ (в каждой группе число сплетников делится на 4, а для таких чисел уже все доказано).

Но в рассматриваемом случае n не делится даже на 4, значит, $n = 16a + r$, где остаток r может быть равен 2, 6, 10, 14. Если в каждом из этих случаев удастся разбить остаток на слагаемые $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ таким образом, чтобы для $4a + r_i$ сплетников существовал способ оповещения и коллектив (r_1, r_2, r_3, r_4) был сплоченным, то мы получим доказательство утверждения для n сплетников все получится. Действительно, тогда можно было бы разбить n сплетников на группы $4a + r_1$, $4a + r_2$, $4a + r_3$, $4a + r_4$, а потом разбиваем коллектив на слагаемые: $(4a, 4a, 4a, 4a)$ и (r_1, r_2, r_3, r_4).

Однако остатки 2–14 слишком маленькие. Можно приписать ко всем остаткам $16k$. Полагая $k = 3$, получаем сплоченный коллектив $(4a, 4a, 4a, 4a)$, где $a \geqslant 3$, и остатки $r = 50$, 54, 58, 62. Например, в первом случае $r = 50 = 8 + 8 + 12 + 22$, $(8, 8, 12, 22)$ — сплоченный коллектив, и для $n = 4a + 8$, $4a + 12$, $4a + 22$ существует способ оповещения в силу базы индукции. В случае остатков $r = 54$, 58, 62 можно выполнить аналогичную конструкцию.

4.4$\frac{1}{2}$. Это лемма 2.5 [10]. Заметим, что в любой схеме оповещения с ограничением NODUP сплетники разбиваются первыми звонками на пары (как в задаче 1.6). Доказательство см. в начале решения задачи 4.3$\frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что утверждение задачи неверно, и некоторый сплетник A поговорил по телефону всего два раза. Пусть первый раз он беседовал со сплетником B, тогда после их беседы A-слух и B-слух циркулируют вместе. Если во второй раз A беседовал с C, то в этот момент C знал все слухи, кроме A-слуха и B-слуха. Если предыдущий разговор сплетника C был с D, то D тот момент тоже знал все слухи, кроме A-слуха и B-слуха. Единственный возможный способ для D завершить ознакомление со слухами — это поговорить с B, когда B знает только эти два слуха. Но тогда A-слух и B-слух не станут известны остальным $n - 4$ сплетникам.

4.5. Следующее утверждение доказано в заметках Д. Веста [13] и А. Сереша [10, § 3]

У т в е р ж д е н и е Пусть $n = 4k$. Тогда достаточно $9k - 6$ звонков.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем сплетников на k групп по 4 человека, в каждой из которых организуем звонки таким образом, чтобы все узнали сплетни своей группы. Это можно сделать за $4k$ звонков. Теперь поделим сплетников на два одинаковых множества по $2k$ человек, в каждое попадет пара сплетников, знающая все сплетни i-той группы, $i = 1, \ldots, k$. Организуем звонки в первом множестве таким образом, чтобы все сплетники разбились на пары и каждая пара сплетников узнала все сплетни, кроме одной. Тогда каждой паре сплетников первого множества будет соответствовать пара сплетников из второго множества, с которой они могут поговорить, чтобы узнать все. Для этого потребуется $2k$ звонков. Осталось в первом множестве построить нужную конфигурацию из $3k - 6$ звонков.

Нужная последовательность звонков показана на рисунках 3–5. Пронумеруем сплетников первого множества и расположим их на окружности. Сначала $k - 2$ звонка делает второй сплетник: он звонит всем сплетникам, имеющим нечетные номера, кроме $(2k - 1)$-го: 3, 5, 7, ... (именно в такой последовательности). Следующие $k - 2$ звонка делает $(2k - 1)$-й сплетник: он звонит всем сплетникам, имеющим четные номера, кроме второго: $2(k - 1)$, $2(k - 2)$, ... (тоже последовательно). После этих звонков 4 сплетника уже знают все сплетни, кроме одной, а именно: второй и $(2k - 3)$-й сплетники знают все сплетни, кроме k-й, а четвертый и $(2k - 1)$-й — все сплетни, кроме первой, см. рис. 5. Остальных сплетников разобьем на пары: для $i = 2, \ldots, k - 1$ пусть сплетник, знающий сплетни 1, 2, ..., $i - 1$, позвонит сплетнику, знающему сплетни $i + 1$, $i + 2$, ..., n (см. рис. 5), в результате чего образуется пара сплетников, знающая все сплетни, кроме i-й. На это потребуется еще $k - 2$ звонков.

4.6. Это доказано в статье [10, теорема 4.1].

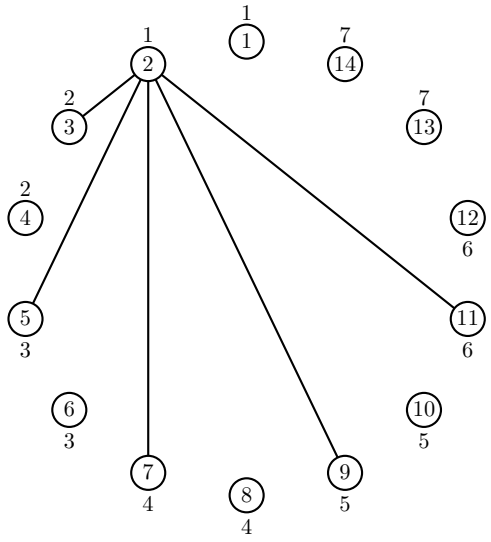


Рис. 3. В кружках номера сплетников первого множества. Линии означают звонки второго сплетника. Рядом с кружком записаны номера объединенных сплетен, известных этому сплетнику до показанных на рисунке звонков.

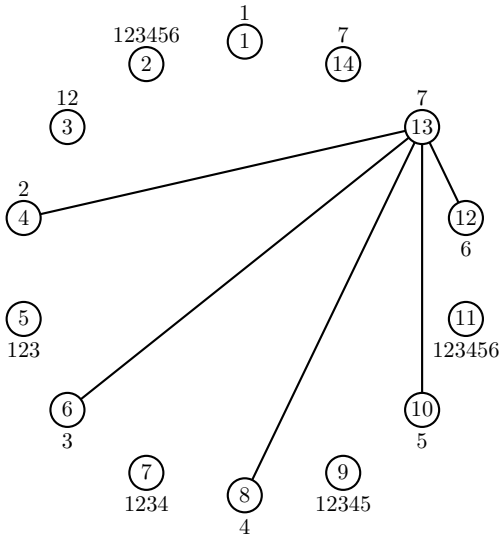


Рис. 4. Линии означают звонки $2k-1$-го сплетника

5.1. a) Ответ: $(n-1)(k+1)$ телеграмм.

Мы взяли это утверждение в [2, Теорема 4.1].

Пример. Пусть каждый рядовой пошлет $k+1$ телеграмму генералу.

Оценка. Каждый рядовой должен послать не менее $k+1$ телеграммы.

b) Ответ: $(k+2)n-2$ телеграммы.

Мы взяли это утверждение в [2, Теорема 4.2]

Пример. Приведем пример ориентированного графа, в котором от каждой вершины до любой другой существует $k+1$ реберно непересекающихся восходщих путей. Проведем $k+2$ ребра от вершины с номером i к вершине с номером $i+1$ с весами i, $n+i$, $2n+i$, …, $(k+1)n+i$ при $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2$; $k+1$ ребро от вершины с номером $n-1$ к вершине с номером n с весами $n-1$, $2n-1$, …, $(k+1)n-1$ и $k+1$ ребро от вершины с номером n к вершине с номером 1 с весами n, $2n$, …, $(k+1)n$. На рис. 6 показан пример такого графа при $n=6$,

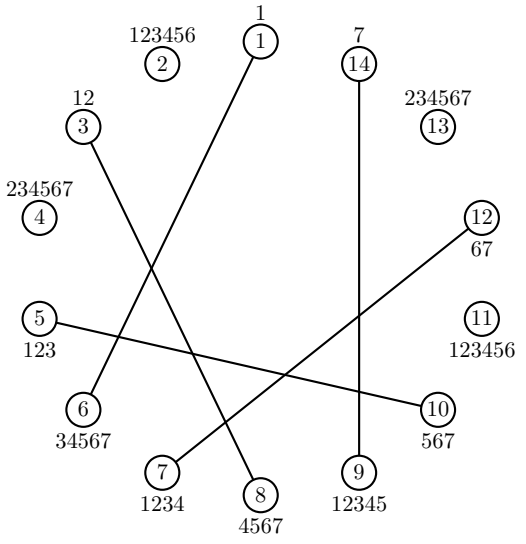


Рис. 5. c) Оставшиеся звонки в первом множестве.

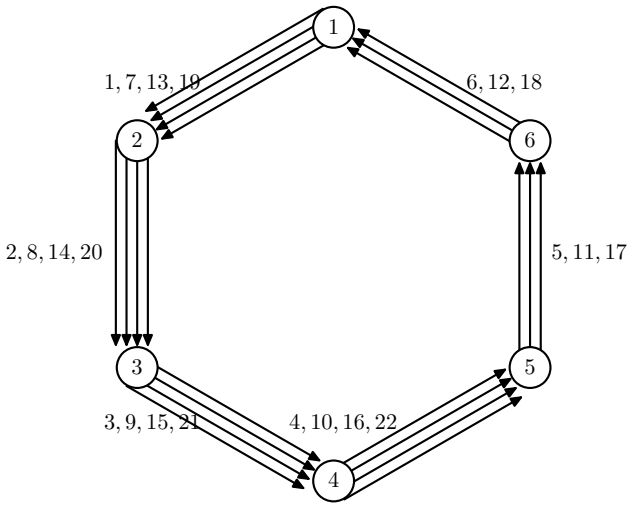


Рис. 6. Плохая почта

$k = 2$.

О ц е н к а. Пусть дан граф звонков, в котором от каждой вершины до любой другой доходят телеграммы даже в случае удалении k ребер. Пусть H — подграф этого графа, содержащий только первые $n-2$ ребер. Граф H не является связным. Значит, для каждой вершины существует по крайней мере $k+1$ ребро, не лежащее в H. Следовательно, общее число ребер графа звонков не меньше $(n-2)+(k+1)n$.

5.2. Это утверждение мы взяли в статье [2, теорема 2.1].

Для построения примеров нам понадобится граф на n вершинах, обозначим его T_n, в котором у генерала степень 0 или 1, остальные вершины имеют степень k, где $k \leqslant n-2$. Строение T_n зависит от четности n и k. Пронумеруем вершины, пусть номер генерала равен n. При четном k между вершинами с номерами i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, есть ребро, если $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k/2\}$. Если k нечетно, а n четно, то проведем ребра при $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k-1)/2\}$, а также добавим любое паросочетание на n вершинах. Если n и k оба нечетные, то проведем ребра при $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k-1)/2, (n-1)/2\}$.

Вернемся к решению задачи. Напомним, что в графе звонков могут быть кратные ребра. Чтобы следить за порядком совершения звонков, поставим на ребрах метки (вещественные числа): чем позже был звонок, тем крупнее должна быть соответствующая метка. Допустимы одинаковые метки звонков, если звонки совершаются последовательно и при этом могут быть переставлены друг с другом. Назовем путь в графе звонков *восходящим*, если при движении вдоль пути веса ребер возрастают.

a) Поскольку после удаления k ребер граф должен остаться связным, степень каждой вершины не может быть меньше $k+1$. Так как сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер, получаем, что число звонков больше либо равно $\left\lceil \frac{k+1}{2} \cdot n \right\rceil$.

Осталось предъявить граф, который обеспечивает возможность передать все слухи генералу и у которого все вершины имеют степень $k+1$ (при неблагоприятной четности одна из вершин будет вынуждена иметь степень $k+2$). При $k \geqslant n-1$ такой граф действительно существует, а при меньших k имеются проблемы с расстановкой весов.

Поделим $k+1$ на $n-1$ с остатком: $k+1 = a(n-1)+b$, где $a > 0$, $0 \leqslant b < n-1$. Построим граф, состоящий из объединения a графов K_n (полных графов на n вершинах) и графа R, у которого все вершины имеют степень b, кроме вершины-генерала, степень которой равна b или $b+1$. Такой граф нетрудно построить, взяв граф T_{n+1} из начала решения и объединив вершину-генерала с одной из «обычных» вершин. Теперь назначим веса ребер. Пусть самые маленькие веса имеют ребра графа R, не соединенные с генералом. Пусть ребра графов K_n, тоже не соединенные с генералом, имеют вес побольше. А ребра всех графов, соединенные с генералом, имеют самые большие веса. Внутри каждого из этих трех множеств ребер веса могут быть упорядочены произвольно. Тогда от каждой вершины до генерала идут $k+1$ непересекающихся по ребрам путей. Следовательно, даже после удаления из графа произвольных k ребер информация все равно дойдет до генерала. Все вершины построенного графа имеют степень $k+1$, кроме генерала, который может иметь степень $k+1$ или $k+2$.

b) При $k = 0$ граф звонков должен быть связным, следовательно, в нем не менее $n-1$ ребер, а с другой стороны, дерево, корнем которого является генерал, а все пути к корню восходящие, является примером подходящего графа.

Рассмотрим теперь граф звонков при $1 \leqslant k < n-1$. Возьмем произвольную вершину v (отличную от генерала) и среди инцидентных ей ребер выберем ребро ℓ максимального веса. Пусть некоторый восходящий путь проходит через это ребро: он пришел в вершину v по ребру меньшего веса и вышел по ребру ℓ. Перенаправим ребро ℓ сразу в вершину-генерала. В результате число ребер графа осталось прежним и, как нетрудно видеть, после этого изменения генерал по-прежнему сможет получить все слухи в условиях плохой связи. Сделаем такую операцию для всех вершин, тогда каждая вершина окажется соединенной с генералом. Значит, степень генерала не меньше $n-1$. Суммируя степени вершин, получаем теперь, что

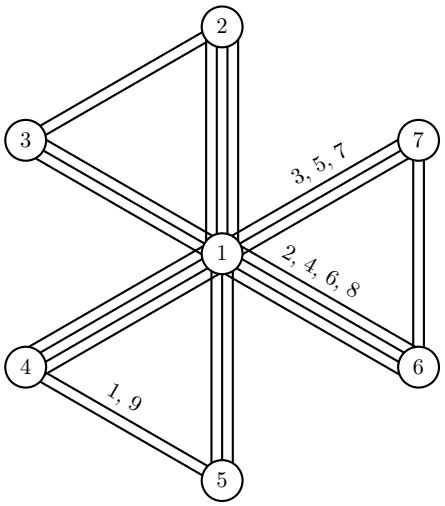


Рис. 7. Конструкция графа

число звонков больше либо равно $\lceil \frac{(k+1)\cdot(n-1)+(n-1)}{2} \rceil$.

Теперь построим граф, обеспечивающий генерала слухами, в котором степени всех рядовых равны $k+1$, а степень генерала равна $n-1$ или n (за счет кратного ребра, при неблагоприятной четности). Возьмем граф T_n, описанный в начале решения, произвольно назначим (небольшие) веса его ребер, после чего соединим все вершины T_n с генералом, назначив новым ребрам большие веса.

5.3. [2, Теорема 3.1]

a) Приведем пример подходящего графа звонков. Пусть n нечетно. Тогда от каждой вершины с нечетным номером, не равным 1, проведем k ребер к вершине с номером 1 с весами 3, 5, ..., $2k+1$, а от каждой вершины с четным номером проведем $k+1$ ребер к вершине с номером 1 с весами 2, 4, ..., $2k+2$. Теперь проведем два ребра между вершинами с номерами i и $i+1$ с весами 1 и $2k+3$. Получилось много ребер с одинаковыми весами. В данном случае веса ребер обозначают не номера звонков, а имеется в виду, что ребра разбиваются на классы (множества ребер с одинаковыми весами), в каждом классе ребра могут быть упорядочены произвольно, но ребро класса i всегда имеет меньший номер, чем ребро класса j при $i < j$. Пример такого графа при $n = 7$ и $k = 3$ показан на рис. 7. Можно проверить, что тогда от каждой вершины до каждой проходят $k+1$ реберно непересекающихся путей.

Если n четно, то к предыдущей конструкции присоединим еще одну вершину, соединив ее $k+1$ ребром с первой вершиной, веса ребер будут 2.5, 3.5, 5.5, 7.5, ..., $2k+1.5$.

b) Оценим $\tau(n,k)$ через $\mu(n,k)$. Пусть G — граф звонков, в котором даже после удаления k ребер информация от каждой вершины будет доходить до любой другой. Посмотрим на ситуацию после того, как мы сделали r первых звонков. Оставшиеся звонки образуют граф на тех же вершинах, который будем называть H. Рассмотрим произвольную вершину v графа H. Заметим, что этой вершине для получения полной информации (даже с учетом удаления k ребер) требуются только первые r звонков и звонки внутри ее компоненты связности в графе H. Значит, число ребер графа, содержащего ребра, которые ей могут пригодиться, больше либо равно $\mu(n,k)$. Будем считать, что $r = \mu(n,k) - \xi$, где ξ подберем таким образом, чтобы получить наилучшую оценку. Очевидно, $|E(G)| = r + |E(H)|$. Чтобы оценить число ребер H снизу, будем считать, что вершина v лежит в компоненте связности наименьшего размера, пусть l — число ребер этой компоненты, тогда количество компонент не меньше $\frac{n}{l}$, и $|E(H)| \geqslant n - \frac{n}{l}$ (правая часть — это количество ребер в графе в предположении, что все компоненты содержат по l вершин и являются деревьями). При этом $l \geqslant \xi$, так как в противном случае рассматриваемая вершина v может не получить полной информации, следовательно, $|E(H)| \geqslant n - \frac{n}{\xi}$. Получим $|E(G)| \geqslant (\mu(n,k) - \xi) + E(H) \geqslant (\mu(n,k) - \xi) + (n - \frac{n}{\xi})$. Правая часть

минимальна при $\xi = \sqrt{n}$ и мы получаем неравенство $E(G) \geqslant \mu(n,k) + n - 2\lceil\sqrt{n}\,\rceil$.

5.4. Мы взяли это утверждение в [3, Теорема 3.2].

а) Как обычно, оценка сверху получается предъявлением примера. Пусть R — регулярный (или почти регулярный) (мульти)граф на n вершинах, в котором каждая вершина имеет степень k (за исключением, возможно, одной вершины, имеющей степень $k+1$). Рассмотрим следующую схему оповещения. Сначала выполним $2n-4$ звонка в соответствии с любым наибыстрейшим способом оповещения. После этого произвольно выполним звонки, соответствующие ребрам графа R. Все слухи, полученные всеми сплетниками в этой схеме, очевидно, являются надежными. При этом схема содержит $\left\lceil\frac{(k+4)n}{2}\right\rceil - 4$ звонков.

б) Лемма 1 [3, лемма 3.1]. Пусть дано дерево T на n вершинах, в котором на каждом ребре задан вес, позволяющий «хронологически» упорядочивать ребра. Для каждой вершины u обозначим через r_u наибольшее количество вершин, в которые можно прийти из вершины u, двигаясь так, чтобы вес при движении возрастал. Минимальное по всем вершинам дерева значение r_u обозначим через $R(T)$. Обозначим через $r(n)$ максимум величины $R(T)$ по множеству всех ориентированных деревьев T с n вершинами. Тогда $r(n) = \lfloor\log_2 n\rfloor$.

Доказательство. Рассмотрим дерево T, для которого $R(T) = r(n)$. Пусть xy — ребро максимального веса, T_x, T_y — компоненты связности, которые получаются после его удаления ($x \in T_x$, $y \in T_y$). Можно считать, что в T_x не больше вершин, чем в T_y, тогда $R(T_x) \leqslant r(\lfloor n/2\rfloor)$. Выберем в T_x вершину u, реализующую значение $R(T_x)$. В дереве T путь из вершины u не может пройти в компоненту T_y дальше вершины y, поскольку xy — ребро максимального веса. Тогда $r(n) = R(T) \leqslant r_u + 1 = R(T_x) + 1 \leqslant r(\lfloor n/2\rfloor) + 1$. Вместе с начальным условием $r(1) = 0$ мы получаем неравенство $r(n) \leqslant \lfloor\log_2 n\rfloor$.

Пример, реализующий равенство, строится по индукции. На очередном шаге берем две копии дерева, служащего примером для $n-1$, и, сохраняя относительный порядок ребер внутри каждой копии, соединяем их корни ребром максимального веса. □

Лемма 2 [3, следствие 2.1]. Пусть в (мульти)графе G на n вершинах на каждом ребре задан вес, с помощью которого можно хронологически упорядочить ребра. Пусть u — фиксированная вершина графа G. Пусть оказалось, что для каждой вершины $v \neq u$ существует не менее k возрастающих путей из u в v, которые отличаются друг от друга последними ребрами. Пусть, наконец, среди всех графов с такими свойствами граф G имеет наименьшее число ребер. Тогда в нем $\left\lceil\frac{(k+2)(n-1)}{2}\right\rceil$ ребер.

Доказательство. Граф G представляет собой объединение остовного дерева и k-регулярного подграфа (или почти k-регулярного подграфа) на множестве всех вершин, за исключением u. В этом случае формула очевидна.

Построим это остовное дерево: для каждой вершины $v \neq u$ отметим ребро e_v с наименьшим весом, принадлежащее какому-нибудь восходящему пути из u в v. Мы отметили $n-1$ ребер, они задевают все вершины графа (минимальное ребро вершины u тоже окажется отмеченным), поэтому это остовное дерево. Далее, среди ребер вершины v ребро e_v — единственное ребро, принадлежащее хоть какому-то восходящему пути из u в v. Действительно, если ребро e_w инцидентно вершине v и лежит на пути из u в v, то этот путь проходит через w и тогда он должен входить в w по ребру, у которого вес меньше, чем вес e_w, что невозможно. Таким образом, граф G для каждой вершины u содержит, помимо e_u, еще не менее k ребер, инцидентных u. Ясно, что минимальное число ребер будет в k-регулярном случае. □

С помощью этих двух лемм решим задачу. Пусть имеется способ оповещения, обеспечивающий сплетников надежными слухами. Первые $n-1$ звонков этого способа оповещения задают подграф H в графе звонков. В силу малости количества звонков хотя бы одна из компонент подграфа H является деревом, обозначим его T. По лемме 1 в дереве T можно выбрать вершину u, из которой можно добраться по возрастающим путям лишь не более чем в $\lfloor\log_2 n\rfloor$ вершин. Уберем ребра всех этих путей из графа H, полученный граф назовем H', он содержит не менее $n-1-\lfloor\log_2 n\rfloor$ ребер.

Для графа $G - H'$ и вершины u выполнены условия леммы 2 (отброшенные нами ребра не могли быть использованы для построения путей из вершины u, так как они были хронологически «слишком ранними»), значит, в нем не менее $\left\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \right\rceil$ ребер. Тогда в G не менее $n - 1 - \lfloor \log_2 n \rfloor + \left\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \right\rceil$ ребер.

6.1. а) [5, Лемма 3] Индукция по k. База тривиальна. Для доказательства перехода отменим первый звонок. В результате дерево окажется разбитым на две компоненты, в каждой из которых перестанет быть известным один слух из противоположной компоненты. По индукционному предположению тогда каждая из компонент содержит не менее 2^{k-1} вершин.

Пункт б) решается аналогично.

6.2. Пример [5, Лемма 1]. Поделим n на 2^{k-1} с остатком: $n = 2^{k-1}n_1 + n_2$. Разобьем сплетников на n_1 групп по 2^{k-1} человек и последнюю группу из n_2 человек. В каждой группе из 2^{k-1} человек можно сделать 2^{k-1} звонок так, чтобы в результате все члены группы знали по k слухов (двое звонят друг другу — в результате двое знают по 2 слуха; потом каждый из них разговаривает новым членом группы, в результате четверо знают по 3 слуха; потом каждый из четырех разговаривает с новым членом группы, в результате восемь человек знают по 4 слуха и т.д.). Что касается последней группы, пусть каждый человек из нее позвонит кому-нибудь из первых групп, когда там уже закончатся звонки, чтобы узнать k слухов. Итого, $P(n,k) \leqslant (2^{k-1}-1)n_1 + n_2 = \left\lceil \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \cdot n \right\rceil$.

Оценка [5, Лемма 4]. Докажем оценку $P(n,k) \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} n$, не накладывая никаких условий на k.

Рассмотрим последовательность, дающую $P(n,k)$ звонков. Пусть для каждого $i \geqslant 1$ этот граф звонков G имеет n_i компонент связности, содержащих i вершин, тогда

$$\sum_i i n_i = n.$$

Заметим, что каждая компонента с i вершинами имеет не менее $i-1$ ребер. Более того, по утверждению задачи 6.1 малые компоненты (те, для которых $i < 2^{k-1}$) не могут быть деревьями, значит, в них не менее i ребер. Таким образом,

$$P(n,k) \geqslant \sum_{i<2^{k-1}} i n_i + \sum_{i \geqslant 2^{k-1}} (i-1) n_i.$$

Осталось заметить, что $i - 1 \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} i$ при $i \geqslant 2^{k-1}$, и следовательно,

$$P(n,k) \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \sum_i i n_i = \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} n.$$

6.3. [5, Лемма 2] Выделим из множества всех сплетников два непересекающихся набора: набор X, состоящий из i сплетников, и набор $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{2^{k-i-2}}\}$ из 2^{k-i-2} сплетников. Звонки организуем следующим образом. Сначала каждый человек из множества X сообщает сплетнику y_1 свой слух. В результате сделано i звонков, а сплетник y_1 знает теперь $i+1$ слух. Далее итерационным процессом мы начинаем удваивать число «осведомленных» сплетников в множестве Y. База: делаем звонки: y_1y_2, y_3y_4, y_1y_3, y_2y_4; в результате сделано 4 звонка и первые 4 человека из множества Y знают по $i+4$ слуха. Переход. Если на предыдущем шаге первые 2^r человек из множества Y знали $i+r+2$ слуха, то на очередном шаге мы делаем 2^r звонков

$$y_1y_{1+2^r}, \quad y_2y_{2+2^r}, \quad \ldots, \quad y_{2^r}y_{2^{r+1}}$$

и теперь первые 2^{r+1} сплетников из множества Y знают по $i+r+3$ слухов. Процесс завершится, когда будет «охвачено» все множество Y. К этому моменту будет всего сделано $i + 2^{k-i-2}$

звонков и все сплетники из Y будут знать k слухов. После этого пусть y_1 позвонит всем сплетниками не из Y, сообщив им свои k слухов. Таким образом, $P(n,k) \leqslant i+2^{k-i-2}+(n-2^{k-i-2}) = n+i$.

В этом рассуждении мы использовали лишь неравенство $t_i \leqslant n$.

6.4. Пусть имеется последовательность c_i звонков сплетников ($1 \leqslant i \leqslant s$). Заметим, что если во время некоторого звонка c_i поговорили два человека, а следующий звонок c_{i+1} осуществляют два других человека, то мы можем переставить эти звонки друг с другом, что не повлияет на результат распространения сплетен с помощью данной последовательности звонков. Такое же *перестановочное правило* действует для наборов из нескольких звонков: если две группы из нескольких последовательных звонков $c_{j-p}, c_{j-p+1}, \ldots, c_{j-1}$ и $c_j, c_{j+1}, \ldots, c_{j+q-1}$ непосредственно следуют одна за другой и не пересекаются по множеству разговаривавших в них людей, эти две группы звонков можно поменять местами. Получится последовательность

$$c_1, \ldots, c_{j-p-1}, \quad c_j, c_{j+1}, \ldots, c_{j+q-1}, \quad c_{j-p}, c_{j-p+1}, \ldots, c_{j-1}, \quad c_{j+q}, \ldots, c_s,$$

которая дает то же финальное распределение сплетен, что и исходная. Последовательности звонков, полученные друг из друга с помощью таких перестановок, будем называть *эквивалентными*.

С учетом результата предыдущей задачи, для доказательства требуемого утверждения достаточно проверить, что при $t_i \leqslant n < t_{i-1}$, где $0 \leqslant i \leqslant k-4$, имеет место неравенство $P(n,k) \geqslant n+i$. Мы докажем более тонкий вариант этого неравенства [5, Лемма 5], из которого это утверждение сразу следует. Будем называть сплетника *осведомленным*, если в результате разговоров он узнает не менее k слухов.

Лемма. Предположим, что $n \leqslant t_{i-1}-1$, где $0 \leqslant i \leqslant k-4$. Пусть $c_1, \ldots, c_{i+j}$ — последовательность из $i+j$ звонков. Тогда

1) в результате этих звонков образовалось не более j осведомленных сплетников;

2) если в результате этих звонков образовалось ровно j осведомленных сплетников (запомним их), то существует эквивалентная последовательность $c'_1, \ldots, c'_{i+j}$, в которой последние j звонков $c'_{i+1}, c'_{i+2}, \ldots, c'_{i+j}$ были только строго между осведомленными сплетниками (т.е. только между теми людьми, которых мы запомнили).

Доказательство. Индукция по j.

База $1 \leqslant j \leqslant k-i-2$. Тогда $i+j \leqslant k-2$, т. е. любая компонента связности графа звонков содержит не более $k-1$ вершины, поэтому ни один из сплетников пока еще не стал осведомленным. Оба доказываемых утверждения оказались неинтересными.

Переход. Пусть $j \geqslant k-i-1$, и для $j' = j-1$ выполняется предположение индукции.

Докажем утверждение 1). Пусть в результате последовательности из j звонков имеется $j+1$ осведомленный сплетник. Поскольку в результате последнего звонка c_{i+j} могло появиться не более двух осведомленных сплетников, к моменту завершения звонка c_{i+j-1} было в точности $j-1$ осведомленных сплетников $x_1, \ldots, x_{j-1}$, а последний звонок состоялся между «новыми» осведомленными сплетниками x_j и x_{j+1}. В силу второго утверждения предположения индукции мы можем считать, что все звонки $c_{i+1}, \ldots, c_{i+j-1}$ были строго между сплетниками $x_1, \ldots, x_{j-1}$, и тогда эту группу звонков можно переставить с c_{i+j}. Но тогда в результате $i+1$ звонка $c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+j-1}$ появилось два осведомленных сплетника. Этого не может быть, поскольку при ограничениях $i \leqslant k-4$ на переменную i не может появиться вообще ни одного осведомленного сплетника (компонента связности, содержащая осведомленного сплетника – это как минимум дерево, содержащее k вершин, поэтому в ней не менее $k-1 > i+1$ ребер).

Докажем утверждение 2). Предположим что в результате $i+j$ звонков мы имеем ровно j осведомленных сплетников, но при этом последние j звонков затрагивали не только этих сплетников. Тогда выберем максимально возможное p, такое что последние звонки $c_{i+p+1}, \ldots, c_{i+j}$ были только между осведомленными сплетниками. Заметим, что тогда один из собеседников звонка c_{i+p} — тоже осведомленный, так как иначе мы могли бы перенести

этот звонок в конец последовательности звонков и мы получили бы тех же j осведомленных сплетников уже после $i+j-1$ звонков, что противоречит предположению индукции.

Пусть G — граф звонков, G' — его подграф, образованный звонками $c_{i+p}, \ldots, c_{i+j}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $p=1$ и при этом граф G' оказался связным. Тогда G' — дерево (в нем j ребер и $j+1$ вершина — все осведомленные сплетники и один неосведомленный участник звонка c_{i+p}). Рассмотрим компоненту C' графа G, которая содержит G'. Пусть эта компонента содержит i' вершин вне G', тогда она должна содержать еще по крайней мере i' ребер (кроме ребер, лежащих в G'). Эти ребра задают какие-то из звонков $c_1, \ldots, c_i$, поэтому $i' \leqslant i$. Удалим эти i' звонков из полной последовательности звонков, это приведет к тому, что по окончании звонков в дереве G' все сплетники, кроме одного, будут знать не менее $k-i'$ слухов. Тогда по утверждению задачи 6.1 б) выполнено неравенство $j+1 \geqslant 2^{k-i'-1}-1$. Тогда

$$t_{i-1} - 1 = i - 2 + 2^{k-i-1} \geqslant n \geqslant i' + j + 1 \geqslant i' + 2^{k-i'-1} - 1 \geqslant i + 2^{k-i-1} - 1 = t_{i-1}.$$

Противоречие. В последнем неравенстве мы воспользовались убыванием последовательности t_i.

Теперь рассмотрим остальные случаи: когда $p>1$ или граф G' состоит из двух или более компонент. Обозначим через C компоненту графа G', содержащую звонок c_{i+j}. Переобозначим звонки: пусть $c'_1 = c_{i+j}$, $c'_2, \ldots, c'_r$ — это звонки в хронологическом порядке, совершенные в компоненте C, и пусть $c''_1, c''_2, \ldots, c''_s$ — остальные звонки в G'. В обоих рассматриваемых случаях $r<j$ (а вот параметр s может быть равен нулю, когда $p>1$).

В силу перестановочного правила все звонки $c''_1, \ldots, c''_s$ можно осуществить до звонков $c'_1, \ldots, c'_r$, т. е. исходная последовательность звонков эквивалентна последовательности

$$c_1, c_2, \ldots, c_{i+p-1}, \quad c''_1, \ldots, c''_s, \quad c'_1, \ldots, c'_r.$$

Поскольку звонок c'_1 затрагивает только одного осведомленного сплетника, компонента C содержит не более r осведомленных сплетников (в ней r ребер и не более $r+1$ вершин). Значит, после $i+j-r$ звонков из выписанной последовательности образовалось не менее $j-r$ осведомленных сплетников. Тогда по индукционному предположению количество осведомленных сплетников должно быть в точности равно $j-r$ (и тогда компонента C содержит ровно r осведомленных сплетников), и можно реорганизовать эти $i+j-r$ звонков так, что последние $j-r$ звонков будут между осведомленными сплетниками (не лежащими в C):

$$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}, \quad c'_1, \ldots, c'_r.$$

Так как в этой последовательности звонки $\tilde{c}_{i+1}, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}$ совершаются между осведомленными сплетниками не из C, мы можем переставить их со звонками $c'_1, \ldots, c'_r$. Получится эквивалентная последовательность

$$\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_i, \quad c'_1, \ldots, c'_r, \quad \tilde{c}_{i+1}, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}.$$

Первые $i+r$ звонков этой последовательности приводят к появлению r осведомленных сплетников. Значит, по предположению индукции можно переупорядочить эти $i+r$ звонков так, чтобы последние r звонков из них осуществлялись между осведомленными сплетниками. Сделав это, мы получим требуемое: в образовавшейся последовательности последние j звонков происходят между осведомленными сплетниками. Лемма доказана. □

Список литературы

[1] *Шаповалов А.В.* Задача о сплетниках // Математическое просвещение. Сер. 3. 2015. Вып. 19. С. 249–253

[2] *Berman K., Hawrylycz M.* Telephone problems with failures // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1986. Vol. 7. P. 13–17.

[3] *Berman K., Paul J.* Verifiable broadcasting and gossiping in communication networks // Discr. Appl. Math. 2002. Vol. 118. P. 293–298.

[4] *Bumby R.* A problem with telephones // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1981. Vol. 2. P. 13–18.

[5] *Chumg G., Tsay Y.-J.* The partial gossiping problem // Discr. Math. 1996. Vol. 148. P. 9–14.

[6] *Harary F., Schwenk A.J.* The communication problem of graphs and digraphs // J. Franklin Inst. 1974. Vol. 297. P. 491-–495.

[7] *Kleitman D. J., Shearer J. B.* Further gossip problems // Discr. Math. 1980. Vol. 30. P. 151–156.

[8] *Seress A.* Gossiping old ladies // Discrete Math. 1983. Vol. 46. P. 75–81.

[9] *Seress A.* Gossips by conference calls // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1987. Vol. 22. P. 229-—238.

[10] *Seress A.* Quick Gossiping without Duplicate Transmissions // Graphs and Combinatorics. 1986. Vol. 2 P. 363–381.

[11] *Tijdeman R.* On a telephone problem // Nieuw Arch. Wisk. 1971. Vol. 19. P. 188–192.

[12] *West D.* A class of solutions to the gossip problem, I // Discrete Mathematics. 1982. Vol. 39. P. 307–326.

[13] *West D.* Gossiping without duplicate transmissions // SIAM J. Alg. Disc. Math. 1982. Vol. 3. P. 418–419.

[14] *West D.* Introduction to graph theory. 2nd edition. Univ. of Illinois, 2001.

Gossiping

Bursian O., Kokhas K., Kuyumzhiyan K.

1 Gossip problem

Each of $n > 3$ individuals (gossipers) knows a unique piece of information (a gossip) which is not known to the others. Gossipers communicate by phone. At each call, two gossipers participating in it pass on to each other all the gossips they know at that time. Each gossiper wants to transmit his gossip to every other person. A calling sequence which completes gossiping among n people is called a *gossip scheme*.

The aim of this set of problems is to find the minimal number of calls in a gossip scheme for each n. The schemes that contain this number of calls are called *fastest*. There may exist different fastest schemes for some n.

1.1. What minimal number of calls is needed for 4 gossipers?

1.2. Prove that for each gossip scheme, the reversed sequence of calls is a gossip scheme again.

1.3. Prove that there exist gossip schemes of $2n - 4$ calls.

Assume that n gossipers have a gossip scheme of at most $2n-5$ calls. Choose the minimal n for which we can find such a scheme. We call this n *interesting*, and by a *superfast* scheme we mean the fastest gossip scheme for this n. In the next problems we study properties of superfast schemes.

1.4. Let n be an interesting number. Prove that no two gossipers A and B communicate twice in the superfast scheme.

1.5. Let n be an interesting number. A sequence of calls is such that at some moment gossiper A calls to gossiper B, later B calls to C, and after that C calls to A. Prove that this sequence of calls is not superfast.

1.6. Gossipers make calls according to a superfast scheme. Fix a call from a gossiper A to a gossiper B. It turned out that this call is the last call of A in this scheme. Prove that this call is also the last call of B in this scheme.

1.7. Prove that if in a superfast scheme gossiper A calls to gossiper B, then they knew no common gossip before this call.

1.8. Prove that a superfast scheme contains at least $2n - 5$ calls.

1.9. Prove that in a superfast scheme each gossiper makes at least 3 calls.

1.10. For each n, prove that a fastest gossip scheme consists of $2n - 4$ calls.

2 Uncommunicative gossipers

Suppose that not all n gossipers know each other, and that gossipers can call only the persons they know. Let F be a graph that depicts familiarity between persons. We assume that the graph F is connected. The aim of gossipers is to transmit all their gossips to all the others by minimal number of calls.

After several calls, we can construct a *communication graph* G: its vertices are gossipers and edges are calls (multiple edges are allowed). As to the order of the calls, this information is not presented in the graph. To keep the order, we can label its edges.

2.1. Prove that for each connected graph F the fastest scheme consists of $2n - 4$ or $2n - 3$ calls.

2.2. Prove that if a graph F contains a 4-cycle then the fastest scheme consists of $2n - 4$ calls.

2.3. Prove that if a graph F contains a unique cycle C_k ($k \neq 4$) then the fastest scheme consists of $2n - 3$ calls.

2.4. Prove that if a graph F does not contain a 4-cycle then the fastest scheme consists of $2n - 3$ calls.

Let F be a connected graph that depicts familiarity between n persons, but now the gossipers communicate by telegraph, i.e. gossipers can send telegrams, and every telegram contains all the gossips known to the sender.

2.5. Which minimal number of telegrams is needed?

2.6. Consider an «economical» telegraph gossip scheme which avoids duplication of information: every gossiper receives by telegram each gossip at most once. In this scheme, it may happen that a gossiper receives a telegram which contains his own gossip. Prove that in each «economical» gossip scheme there are at least $n-1$ such gossipers.

3 Variations to a gossip problem: NOHO

Suppose that n gossipers know each other. Consider the following restriction on the call scheme: no gossiper hears his own gossip from the others (NOHO: No One Hears Own). It is clear that in a NOHO gossip scheme a communication graph G has no multiple edges (and even triangles), and all the vertices have degree at least 2.

3.1. Atypical example. Consider 10 gossipers: 3 gossipers know gossip A, 3 gossipers know gossip B, 2 gossipers know gossip C and 2 gossipers know gossip D. Does a NOHO gossip scheme exist for these people?

In the next two problems, we assume that initially everybody knows his unique gossip.

3.2. For which n do NOHO gossip schemes exist?

3.3. Prove that a NOHO gossip scheme consists of $2n-4$ calls.

4 Variations to a gossip problem: NODUP

Suppose that n gossipers know each other. Consider gossip schemes with the following restriction: before each communication, the gossipers participating in it know no common gossip (NODup: No Duplication). We met this property (of a non-existing object) in Problem 1.7.

4.1. Does a NODUP gossip scheme exist for $n = 12$?

4.2. Suppose that there are 6 groups consisting of 13, 8, 6, 5, 4, 4 gossipers, and the gossipers in one group know a unique gossip. Does a NODUP gossip scheme exist?

In the next four problems, we assume that initially everybody knows his unique gossip.

4.3. Does a NODUP gossip scheme exist for $n = 20$?

4.4. For which n do NODUP gossip schemes exist?

4.5. For infinitely many values of n and some constant c, give examples of NODUP gossip schemes with $\frac{9}{4}n + c$ communications.

4.6. Prove that a NODUP gossip scheme contains at least $\frac{9}{4}n + c$ communications for some constant c.

Addition to previous variations

A gossiper is called *expert* if he knows all the gossips. A gossiper is called *semi-expert* if there exists a non-expert among the other gossipers such that this gossiper could become expert after a communication with this non-expert. Two such semi-experts are called *complementary*.

The following idea is useful. Fix a gossip scheme and two gossipers A and B in it. If A and B become experts after the 50th communication, but their first talk was the 100th communication, then we can reorder communications: let AB be the 51th communication and shift all the subsequent communications, this will be a gossip scheme again.

1.11. Among all the superfast gossip schemes, find a scheme in which the first expert appears after a minimal number of communications. (This can happen after at least $n-1$ communications.) Let us fix this gossip scheme. After the moment when the expert has appeared, at each moment let ℓ be the number of experts and m be the maximal number of non-intersecting pairs of complementary semi-experts. Prove that there remain at least $n-\ell-m$ communications in this scheme.

1.12. Give another proof of 1.10, using the semiinvariant from the preceding problem.

4.3$\frac{1}{2}$. Prove that NODUP gossip schemes do not exist for
a) $n=14$; b) $n=18$.

4.4$\frac{1}{2}$. Prove that in a NODUP gossip scheme for $n>4$ each gossiper participates in at least three communications.

There are n chemists ($n>3$). Each one has 1 kg of his unique reagent. If two chemists meet, they divide equally all the reagents they have. In a good home laboratory, all the reagents have to be represented. Clearly $2n-4$ meetings are enough to make home laboratories of all the chemists good. But for efficient work, it is necessary to have at least α grams of each reagent.

1.13. For which maximal α we can make all the home laboratories efficient after $2n-4$ meetings?

5 Bad connection

Take n gossipers and an integer k. We consider the following restriction: the communication schedule is strictly fixed in advance, however, it is known that "connection is bad" and k communications may cancel (i.e., the corresponding gossipers cannot pass on their gossips at time). Also, the analogous setting can be considered for the case of telegraph.

5.1. Suppose that gossipers use telegraph and the connection is bad, i.e. it is known that some k telegrams may be lost.

a) Suppose that one gossiper is commander-in-chief. A schedule of telegrams must be such that the commander-in-chief knows all the gossips at the end. Which is the minimal number of telegrams necessary for such a scheme?

b) All the gossipers want to know all the gossips at the end. Which minimal number of telegrams is needed?

5.2. Suppose that one gossiper is commander-in-chief. The connection is bad. A schedule of communications must be such that the commander-in-chief knows all the gossips at the end. Let us denote the minimal number of communications necessary in this case by $\mu(n,k)$. Prove that

a) $\mu(n,k)=\left\lceil\frac{k+1}{2}\cdot n\right\rceil$ for $k\geqslant n-2$.
b) $\mu(n,k)=\left\lceil\frac{k+2}{2}\cdot(n-1)\right\rceil$ for $k\leqslant n-2$;

5.3. Let us denote by $\tau(n,k)$ the minimal number of communications necessary for n gossipers to know all the gossips at the end if it is known that connection is bad.

a) Prove that $\tau(n,k)\leqslant\left\lfloor(k+\frac{3}{2})(n-1)\right\rfloor$.

b) Give a lower bound for $\tau(n,k)$. Please give a bound which is not much worse that the bound from a).

The exact value of $\tau(n,k)$ is not known. In Problem 5.2, the following lower bound is known: $\mu(n,k)+n-2\sqrt{n}\leqslant\tau(n,k)$. It is not known whether the sequence $\tau(n,k)-(k+\frac{3}{2})n$ is bounded for fixed k.

5.4. We have a new setting. Suppose that communications do not cancel, but gossipers want to operate with *reliable* gossips. For a gossiper, a gossip which is not his own gossip is reliable if he

heard it at least $k+1$ times. Prove that the minimal necessary number of communications $\gamma(n,k)$ satisfies the following inequalities:

a) $\gamma(n,k) \leqslant \left\lceil \frac{(k+4)n}{2} \right\rceil - 4$;

b) $\left\lceil \frac{(k+4)(n-1)}{2} \right\rceil - \lfloor \log_2 n \rfloor \leqslant \gamma(n,k)$.

6 *Lazy gossipers*

6.1. Suppose that n gossipers have performed several communications. It turned out that the communication graph is a tree, and that every gossiper knows at least k gossips after these communications.

a) Prove that $n \geqslant 2^{k-1}$.

b) Suppose that the communication graph is a tree. Also suppose that all but one gossipers know at least k gossips each after these communications. Prove that $n \geqslant 2^{k-1} - 1$.

Now let us fix integers n and k, where $k \leqslant n$. We consider the case when n gossipers know each other, but their curiosity is bounded: each one wants to know at least k gossips at the end. Let us denote by $P(n,k)$ the minimal number of communications necessary for this.

We assume below that $k \geqslant 4$. Let us introduce a useful notation. For a fixed k, let us consider the following finite sequence

$$t_i = i + 2^{k-i-2}, \quad \text{where } 0 \leqslant i \leqslant k-4.$$

This sequence is decreasing.

6.2. Suppose that k is "rather small" with respect to n, namely, $n \geqslant 2^{k-1}$. Prove that gossipers need "almost n" communications: $P(n,k) = \left\lceil \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \cdot n \right\rceil$.

6.3. For greater values of k, find i, $0 \leqslant i \leqslant k-4$, such that $t_i \leqslant n < t_{i-1}$. Prove that $P(n,k) \leqslant n+i$.

6.4. Prove that in the previous problem, we have the equality $P(n,k) = n+i$.

Solutions

1.1. Ответ: 4 calls.

1.2. If there is a chain of calls which passes the A's gossip to B, then the reversed chain will pass the B's gossip to A.

1.3. We prove this statement by induction. Induction base for $n = 4$ is already proved. To prove the induction step, we add one gossiper and two calls, the very first call is the conversation of the new gossiper with any other gossiper, then we make calls according to the old gossip scheme, and the very last call is the conversation of the new gossiper with any other gossiper.

1.4. [11, Lemma 2]. Let us "glue together" gossipers A and B: we will treat them as one person who knows the union of the gossips previously known by A and B in every moment. We can delete all the calls between A and B. Then we obtain a gossip scheme for $n - 1$ gossipers, consisting of $2(n - 1) - 5$ calls, which contradicts minimality of n.

1.5. This statement is taken from [1]. We exclude gossiper A, all his calls which were made before the call BC are diverted to B, and his remaining calls are diverted to C. We diminished the number of gossipers by 1 and the number of calls by 2, this contradicts minimality of n.

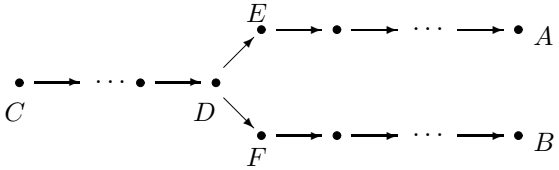
Remark. We can label the edges of the graph of calls: on every edge, we write the number of this call in the gossip scheme. Then the way of a gossip is a path in the graph such that the labels along this path increase. The condition that every gossiper knows all the gossips at the end means that for every two gossipers A and B, there is a path with increasing labels from A to B (and from B to A, too).

In the same way we can show that there do not exist longer (than 3 edges) chains from A to A such that the labels along this path increase. Indeed, let $AB_1B_2 \dots B_kA$ be such a chain. We want to exclude the gossiper A, his two calls AB_1 and AB_k, and to divert all the remaining edges incident to A. We compare labels on these edges with the labels on edges B_1B_2, $B_2B_3, \dots$, $B_{k-1}B_k$, and those which are less than B_1B_2 are diverted to B_1, those which are among B_1B_2 and B_2B_3 are diverted to B_2, and so on. One can check that this will be a gossip scheme for $n - 1$, which contradicts minimality of n.

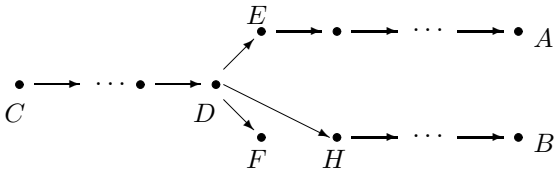
1.6. Suppose that gossiper B knows all the gossips after the conversation with A. Suppose also that after the conversation AB, there was also a conversation BC. It means that C has heard his own gossip from B, i.e., that there are cycles in the gossip scheme. But it contradicts Problem 1.5.

1.7. This statement is taken from [11, Lemma 4], it is equivalent to the intersection lemma [1].The following idea is useful: if at some moment Peter and Paul have the same information (i.e., just after the conversation between them), then we can change them in all the subsequent calls, and this will be a gossip scheme again.

Suppose that just before their conversation, gossipers A and B both knew the gossip of C. Consider the chains of calls which pass the gossip of C to A and to B:



Допустим, что в этой последовательности звонок DE был раньше звонка DF. Тогда, поменяв местами сплетников D и F, сразу после звонка DF мы можем считать, что вместо звонка FH имел место звонок DH. У нас получится последовательность звонков, в которой цепочка $DFH \dots B$, находящаяся после «развилки», укоротилась (теперь это цепочка $DH \dots B$).



Звонок DH по-прежнему позже DE. Продолжая такие действия, мы полностью устраним цепочку $H \dots B$ после «развилки». На последнем шаге этого процесса мы поменяем местами сплетников B и D (сразу после разговора BD), при этом разговор AB, с которого мы начали решение, заменится на AD. У нас останется цепочка $DE \dots A$ и последующий разговор AD. Это невозможно по задаче 1.4.

1.8. This statement is taken from [1]. If every gossiper participated in at least 4 communications, all in total there were at least $2n$ calls.Suppose that a gossiper A participated in three communications. To pass the gossip of A to the other gossipers is the same as to consider the union of all the increasingly labelled paths starting at A. This is a connected subgraph containing all the vertices, hence, it contains at least $n-1$ edges. Also consider the union of all the decreasingly labelled paths starting at A. It also contains at least $n-1$ edges. These two subgraphs may intersect only by the edges incident to A, otherwise the union of a decreasing path and of an increasing path will give a labelled circle which will contradict to the Remark above. This gives at least $(n-1)+(n-1)-3 = 2n-5$ edges.

1.9. If a gossiper A participates in k conversations, then, as in the previous problem, $2n-5 \geqslant (n-1)+(n-1)-k$. Hence, $k \geqslant 3$.

1.10. It is enough to explain why there are no superfast gossip schemes consisting of $2n-5$ calls. By Problem 1.6, a call can be initial (all in total $n/2$ such calls, it is the first call for both interlocutors), final (also, all in total $n/2$ such calls, it is the last call for both interlocutors) and mean calls ($n-5$ such calls). By Problem 1.9, every gossiper participates in at least one mean call. Consider the graph of mean calls. It has n vertices and $n-5$ edges, hence, at least 5 connected component, each containing at least one edge.

Fix a gossiper A and let AB and AC be his first and last calls, respectively. There are at least two connected components of the mean edge subgraph not containing vertices A, B, and C, there are at least two edges in these components.

Consider the union of all the increasingly labelled paths starting at A. This is a spanning subgraph, hence, it contains at least $n-1$ edges. Also consider the union of all the decreasingly labelled paths starting at A. It also contains at least $n-1$ edges. As in the solution of Problem 1.8, these two subgraphs may intersect only by the edges incident to A, otherwise there wil be a labelled circle. Now take two connected components chosen above. The internal edges of these connected components occur neither in increasing nor in decreasing paths starting from A. Let k be the degree of A in the initial graph. The union of two spanning subgraphs contains at least $n-1+n-1-k \geqslant 2n-5-2$ edges, hence, $k \geqslant 5$. Since A was taken arbitrarily, it means that the graph contains at least $5n/2 > 2n-5$ edges.

2.1. This statement is proved in [6]. The hardest part is done in Problem 1.10, and it remains to prove that for a tree, we need $2n-3$ communications. First, let us show that $2n-3$ communications is enough. Fix a root in the tree, and suppose that gossipers subsequently call from faraway vertices to the root (formally, we can order the edges with respect to the distance to the root; firstly, calls are made using the most far edges, then by the edges of maximal distance minus one, and so on). After these calls, we will have two gossipers who know all the gossips: the root and one of his neighbours. Then we make first $n-2$ calls in the reverse order. All in total this gives $n-1+n-2 = 2n-3$ calls.

This is the minimal possible number of calls. Indeed, otherwise there would be at least two edges used once. Let us call such edges *singular*. Two singular edges split the graph into three connected components, and we may treat it as a graph with three vertices and two (singular) edges, hence, this is not a gossip scheme.

2.2. We present here the construction from [6]. We can contract the cycle C_4 into one vertex and treat it as the root of the obtained tree. As in Problem 2.1, gossipers will subsequently call from faraway vertices to the root, then we will apply the fastest gossip scheme from Problem 1.1 to C_4, then make the calls on the edges of the tree in the reverse order. This gossip scheme needs $(n-4)+4+(n-4)=2n-4$ calls.

2.3. Доказательство приведено в [6].

Предположим, что существует способ, содержащий всего $2n-4$ звонка. Тогда заметим, что каждое ребро должно быть использовано в этом способе оповещения хотя бы один раз. Если это ребро является мостом и не было использовано, то невозможно распространение информации между двумя частями, на которые оно делит граф. Если оно лежит на цикле, то после его удаления из графа получаем дерево, в котором распространение информации невозможно быстрее, чем за $2n-3$ по решению пункта 2.1. Следовательно, при способе за $2n-4$ звонка имеется по крайней мере 4 сингулярных ребра (напомним, что мы называем ребро сингулярным, если ему соответствует лишь один звонок).

Допустим, что хотя бы одно из этих ребер является мостом. При его удалении граф распадается на две компоненты связности. Тогда к моменту звонка по этому ребру в каждом из его концов должна накопиться вся информация из соответствующей компоненты. Пусть размер одной из компонент равен a, тогда для этого потребуется $(a-1)+(n-a-1)=n-2$ звонков. После этого происходит звонок по мосту и еще столько же звонков, чтобы информация распространилась обратно. В сумме получаем $2n-3$ звонка. Таком образом, сингулярные ребра не могут быть мостами, т. е. все они лежат на цикле.

Тогда после удаления сингулярных ребер из графа получится 4 компоненты связности, каждая из которых является деревом. Перенумеруем их в порядке обхода цикла, пусть эти компоненты содержат n_1, n_2, n_3, n_4 вершин, $n_1+n_2+n_3+n_4=n$. Посмотрим, в каком порядке сингулярные ребра могут входить в последовательность звонков. Пусть сначала в последовательности звонков стоят два ребра, связанных с одной и той же компонентой i. Это невозможно, так как тогда эта компонента не получит сведений из компоненты $(i+2) \mod 4$. Значит, порядок вхождения сингулярных ребер в способ оповещения аналогичен порядку вхождения ребер графа в решении пункта 1.1: можно считать, что сначала были сделаны звонки 1–2, 3–4, а после этого 2–3 и 1–4.

К моменту совершения звонка 1–2, оба собеседника должны были знать все слухи из своей компоненты, значит, к этому времени должно было быть совершено не менее $(n_1-1)+(n_2-1)$ звонков внутри этих компонент. Аналогично к моменту звонка 3–4 должно было быть совершено не менее $(n_3-1)+(n_4-1)$ звонков внутри третьей и четвертой компонент. Мы насчитали $n-4$ звонков.

Далее, в результате совершения звонка 2–3 каждый из собеседников узнал уникальный для своей компоненты новый слух. Значит, после этого звонка в компонентах должно произойти еще не менее $(n_2-1)+(n_3-1)$ звонков, распространяющих эти уникальные слухи. Аналогично после звонка 1–4 произойдет не менее $(n_1-1)+(n_4-1)$ звонков в первой и четвертой компонентах. Мы обнаружили еще $n-4$ звонка.

Так как наш цикл содержит более 4 вершин, то есть хотя бы одна компонента, пусть для определенности первая, для которой смежные с ней два сингулярных ребра не имеют общей вершины. Следовательно, эта компонента сможет передать информацию, как это требуется при способе оповещения, только если в промежутке между звонками 1–2 и 1–4 внутри первой компоненты будет сделан хотя бы один звонок, передающий слухи второй компоненты от собеседника, только что узнавшего по звонку 1–2, к собеседнику, который будет передавать их по звонку 1–4. Этот звонок еще не был учтен нами ранее.

Итого мы имеем $(n-4)+(n-4)+4+1$ звонков.

2.4. Ф. Харари и А. Швенк [6] предлагали в 1974 г. \$10 за доказательство этого факта. В 1980 г. R. Bumby [4] решил эту задачу. Чуть позже D. Kleitman и J. Shearer [7] привели другое доказательство, причем в их рассуждениях не требовалось, чтобы все звонки были

двусторонними. Мы приводим доказательство из [7], впрочем, опуская детали, возникающие в случае односторонних звонков.

Пусть дана схема оповещения, состоящая из $2n-4$ звонков. Докажем, что она содержит 4-цикл.

Порядок звонков в схеме оповещения не задан жестко. Разные перестановки последовательности звонков, реализующие оповещение, будем называть *упорядочиваниями* схемы оповещения.

Рассмотрим граф, изображающий первые $n-1$ звонков, и отметим его наименьшую компоненту связности, являющуюся деревом. Такая компонента всегда найдется, так как в противном случае суммарное число ребер окажется не меньше суммарного числа вершин. Пусть S — минимальная отмеченная компонента-дерево, выбранная по всем упорядочиваниям.

Пусть в компоненте S содержится m вершин. Отметим, что $m \geqslant 2$, поскольку иначе, если $m = 1$, а мы изобразили уже $n-1$ звонков, то чтобы информация от этой вершины дошла до остальных, потребуется еще не менее $n-1$ звонков, т. е. в сумме будет больше $2n-4$ звонков. Рассмотрим $(m-1)$-й по порядку звонок внутри компоненты S. Если его отменить, компонента распадется на две части — S_1 и S_2. Опять перебирая упорядочения, меняющие местами звонки внутри S, мы можем дополнительно считать, что S_1 — наименьшая возможная компонента в том смысле, что другие упорядочения не могут дать нам компоненту строго содержащуюся в S_1. Пусть $(m-1)$-й звонок происходит между вершинами $x_1 \in S_1$ и $y_1 \in S_2$. Мы последовательно проверим следующие пять утверждений, выделенных курсивом. Из пятого утверждения следует, что схема оповещения содержит 4-цикл, что нам и требуется.

У т в е р ж д е н и я.

1) *Компонента S_1 содержит не менее двух вершин.*

2) Пусть компонента S_1 состоит из j вершин. Тогда $(j-1)$ звонков, сделанные внутри S_1, (среди первых $m-2$ звонков в S) превращают эту компоненту в дерево, обозначим его T (а обозначение S_1 будем относить скорее к множеству вершин). Пусть дана некоторая последовательность звонков. Будем называть звонок между вершинами a и b *особенным*, если этот звонок произошел позже всех остальных звонков с участием a или b. *Дерево T содержит единственный особенный звонок, в этом звонке обязательно участвует вершина x_1.* Обозначим через x_2 второго участника этого звонка.

3) Для построения множеств S, S_1 и дерева T мы использовали $n-1$ первых звонков. Способ оповещения содержит еще $n-3$ звонка, обозначим множество этих звонков через $\mathcal{L}$. Если удалить из дерева T ребро x_1x_2, дерево распадется на две части T_1 и T_2, где обозначения выбраны так, что $x_1 \in T_1$, $x_2 \in T_2$, см. рис. 1. *Для каждой вершины $z \notin T_1$ (в том числе*

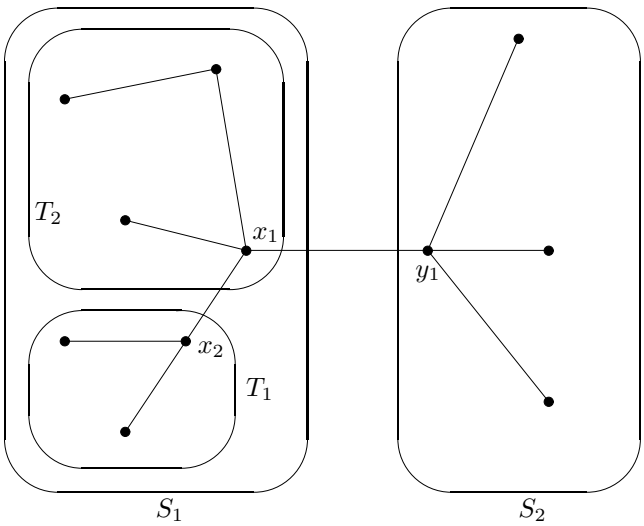


Рис. 1. Компонента связности S

для вершин z, лежащих вне S) существует цепочка звонков, содержащая лишь звонки из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, по которой к z может прийти слух от вершины x_1. То же касается распространения информации от x_2 к вершинам вне T_2. Более того, множество звонков $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$ образует дерево.

4) *Последовательность звонков, которая доставляет слух вершине x_1 (или x_2) от остальных, может содержать не более одного звонка из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, и если таковой звонок встретился в этой последовательности, он является в ней последним.*

5) Рассмотрим какую-нибудь последовательность звонков, по которой слух y_1 дошел до x_2. Пусть y_2x_2 — последний звонок в этой последовательности. Теперь рассмотрим какую-нибудь последовательность звонков, по которой слух y_2 дошел до x_1. Пусть y_3x_1 — последний звонок в этой последовательности. Продолжая это построение, скажем, что y_{i+1} — это тот сплетник (не совпадающий с x_1 и x_2), который участвовал в последнем звонке из последовательности, доставившей слух от y_i к x_1 (если i четно) или x_2 (если i нечетно). *Все вершины y_i лежат в S_2. Найдутся нечетное i_1, четное i_2, такие что $y_{i_1}y_{i_2}$ — звонок из S_2. Более того, в этом случае $y_{i_1}x_1$, $y_{i_2}x_2$ — звонки, принадлежащие нашей схеме оповещения, причем они совершены позже звонков x_1x_2 и $y_{i_1}y_{i_2}$.*

Доказательства.

1) Можно считать, что звонок x_1y_1 был $(n-1)$-м по счету. Если S_1 состоит из одной вершины, то после первых $n-2$ звонков, слух из этой вершины еще никуда не ушел. Для его распространения понадобится еще по крайней мере $n-1$ звонков, т.е. в сумме будет не менее $2n-3$ звонков.

2) Это следует из условия минимальности, наложенного нами на S_1. Последний звонок — всегда особенный, так что хотя бы один особенный звонок существует. Если бы в S_1 нашелся особенный звонок ab, не задевающий вершину x_1, мы могли бы переупорядочить звонки в S, поставив звонок ab на $(m-1)$-е по счету место. Тогда первые $m-2$ звонка порождали бы компоненту, строго содержащуюся в S_1, что противоречит ее минимальности.

3) В нашей схеме оповещения слух от x_1 по какой-то цепочке звонков дошел до z. Пусть ab — первый звонок в этой цепочке, не лежащий в T_1. Тогда ab и все последующие звонки в этой цепочке лежат в $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Если существует цепочка звонков из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, предшествующая ab и доставляющая информацию от x_1 к a или b, объединим ее с предыдущей рассмотренной цепочкой и получим требуемую цепочку от x_1 к z. Если же такой цепочки не существует, то схема оповещения допускает следующее переупорядочивание звонков: пусть звонок x_1y_1 идет n-м по счету, звонок x_1x_2 — $(n-1)$-м, а звонок ab или какой-то звонок из $\mathcal{L}$, предшествующий звонку ab, — $(n-2)$-м по счету (относительный порядок остальных звонков не изменился).

Если теперь $(n-2)$-й звонок не задевает S_1 (или S_2), то в начале в качестве S можно было взять S_1 (или S_2), что противоречит минимальности S. Если же $(n-2)$-й звонок соединяет S_1 с S_2, то это противоречит минимальности S_1, так как удаление $(n-1)$-го по счету звонка x_1x_2 теперь создает компоненту, строго содержащуюся в S_1.

Мы доказали существование цепочки звонков, передающих информацию от x_1 к z и лежащих в $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$. Аналогично существуют цепочки, передающие информацию от x_2 к $z \notin T_2$. Таким образом, множество $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, содержащее $n-1$ ребро, позволяет распространять информацию от x_1 и x_2 к остальным $n-2$ вершинам. Следовательно, ребра из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$ порождают остовное дерево графа звонков.

4) Остовное дерево, описанное в предыдущем пункте, состоит из звонков $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$. Эти звонки в нашем способе оповещения хронологически последние. Поэтому если последовательность звонков, передающая информацию из z в x_1 (для x_2 рассуждения аналогичны), содержит звонок из $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$, то и все последующие звонки тоже лежат в этом множестве. Но цепочки звонков в этом остовном дереве «уводят» информацию от «центра» $x_1 \cup x_2$ к другим вершинам, поэтому единственный способ передать информацию в x_1 — передать ее от непосредственного соседа вершины x_1, т. е. по цепочке, содержащей лишь один звонок

с участием x_1, чтд.

5) По определению $y_1 \in S_2$. В силу свойства 4) в цепочке звонков, доставившей информацию от y_1 к x_2 все звонки, кроме, быть может, последнего звонка y_2x_2, — это какие-то из первых $n-1$ звонков, кроме x_1y_1, x_1x_2. По отношению к этим звонкам мы определяли S_2 как компоненту связности, поэтому $y_2 \in S_2$. Аналогично проверяется, что и все остальные вершины y_i лежат в S_2. Отметим, что тогда звонки вида y_ix_1 или y_ix_2 из определения вершин y_i принадлежат остовному дереву $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Поскольку компонента S_2 конечна, какие-то две из вершин совпадают, скажем, $y_i = y_{i+k}$. При этом число k — обязательно четное, так как ребра y_ix_1 и y_ix_2 не могут одновременно принадлежать остовному дереву $\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$.

Рассмотрим теперь цепочку путей

$$y_i \to y_{i+1} \to \cdots \to y_{i+k} = y_i$$

(каждый путь в этой цепочке хронологически упорядочен, но соседние пути могут нарушать хронологию). Поскольку этот замкнутый маршрут расположен на дереве, каждое ребро в нем было пройдено в обоих направлениях. Мы утверждаем, что все вершины, по которым проходит этот маршрут, лежат в множестве $\{y_j, i \leqslant j \leqslant i+k\}$. Действительно, если маршрут проходит через вершину a, не совпадающую ни с одним из y_j, рассмотрим хронологически самый последний звонок в этом маршруте с участием вершины a, пусть это звонок ab. В какой-то момент, проходя очередной путь $y_j \to y_{j+1}$, мы двигались в направлении от b к a, но поскольку этот звонок хронологически последний, мы не можем продолжить движение за точку a. Значит, $a = y_{j+1}$.

Теперь мы без труда можем выбрать звонок $y_{i_1}y_{i_2}$, где i_1 нечетное, i_2 четное (и разумеется, он лежит в S_2). Звонки $y_{i_1}x_1$ и $y_{i_2}x_2$ также присутствуют в схеме оповещения, поскольку по определению точек y_i они использовались для передачи информации вершинам x_1, x_2.

2.5. Ответ: $2n-2$ телеграммы.

Мы взяли эту задачу в [6]. До того как появится первый человек, узнавший все слухи, должно быть послано не менее $n-1$ телеграммы. После этого каждый из остальных должен получить хотя бы одну телеграмму, чтобы завершить ознакомление со слухами. Значит, еще будет послано еще не менее $n-1$ телеграмм.

Пример строится на базе любого дерева, если сначала посылать телеграммы от периферии к корню, а потом обратно.

2.6. Это теорема 3 [9]. Пример способа оповещения, в котором $n-1$ человек прочтет в телеграмме свой собственный слух, тривиален: пусть все сначала телеграфируют Васе, а потом Вася посылает всем телеграммы с полным комплектом слухов.

Оценка. Рассмотрим минимальный контрпример, в котором не более $n-1$ человек прочли в телеграмме свой собственный слух. Пусть последняя телеграмма была послана сплетником A сплетнику B. Очевидно, сплетник A уже знает все слухи, значит, сплетник B, во-первых, один из тех, кто прочел свой слух в полученной телеграмме, а во-вторых, не знает ни одного слуха, кроме своего собственного (иначе он какой-то слух выучил из телеграмм дважды). Значит, ранее сплетник B не получил ни одной телеграммы, а только посылал. Удаляя из этой компании сплетника B и соответствующие телеграммы, мы получим меньший контрпример. Противоречие.

3.1. Ответ: это возможно даже с ограничением NODUP. См. начало решения задачи **??**.

3.2. Ответ: при четных n. [12]

Для каждого сплетника отметим последний звонок, в котором он участвовал. При выполнении ограничения NOHO эти последние звонки разбивают всех сплетников на пары — см. рассуждение в решении задачи 1.6 без последнего предложения. Таким образом, n должно быть четным.

Отметим, что первые звонки тоже разбивают сплетников на пары.

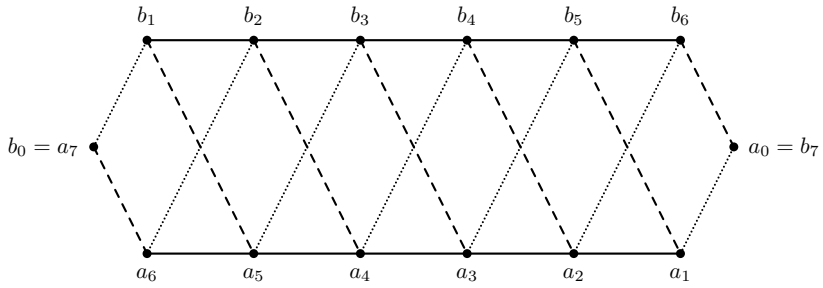


Рис. 2. Оптимальные звонки с ограничением NOHO.

Для каждого четного n предъявим способ оповещения, подчиненный ограничению NOHO, состоящий из $2n-4$ звонков [12, лемма 2.4]. Пусть $m = \frac{1}{2}n - 1$. Обозначим сплетников a_i, b_i, $i = 0, 1, \ldots, m+1$, — но здесь $n+2$ сплетника, будем считать, что $a_0 = b_{m+1}$, $a_{m+1} = b_0$. В качестве первых звонков возьмем звонки (в порядке возрастания i, см. рис. 2)

$$a_i b_{m+2-i}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m+1;$$

далее выполним средние звонки

$$a_i a_{i+1}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad \text{и} \qquad b_i b_{i+1}, \qquad \text{где } i = 1, 2, \ldots, m-1;$$

и, наконец, последние звонки

$$b_i a_{m-i}, \qquad \text{где } i = 0, 1, \ldots, m.$$

Непосредственно проверяется, что указанная система звонков является способом оповещения, подчиненным ограничению NOHO.

3.3. Поскольку любая схема оповещения содержит не менее $2n-4$ звонков, достаточно привести пример, удовлетворяющий ограничению NOHO и содержащий $2n-4$ звонка. Этот пример приведен в предыдущем решении.

4.1. О т в е т: да. [8]. Прежде чем приводить решение задачи, дадим несколько определений.

Уникальные сплетники, известные сплетникам до того как они стали обмениваться информацией, будем называть также *изначальными*. Пусть после нескольких звонков имеется такое подмножество изначальных сплетен, что каждый сплетник либо знает все сплетни из этого подмножества, либо не знает ни одной из них. Тогда при рассмотрении последующих звонков можно рассматривать такое подмножество сплетен как одну большую сплетню. Будем называть ее *объединенной* или *общей* сплетней (определение из статьи [8]). Например, пусть сплетникам, номера которых указаны ниже, известны следующие сплетни, обозначенные греческими буквами.

Сплетник	1	2	3	4
Какие сплетни знает	$\alpha\gamma$	β	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$

В этом примере сплетни α и γ образуют объединенную сплетню, поскольку каждый сплетник либо знает обе эти сплетни, либо не знает ни одной. А вот набор сплетен β, δ объединенную сплетню не образует, так как второй сплетник знает лишь одну из них.

Рассмотрим чуть более общую постановку задачи. Пусть имеются группы из $a_1, a_2, \ldots, a_k$ сплетников, причем в каждой группе всем известен один и тот же набор сплетен. Такое объединение сплетников будем называть *коллективом*. Сплетники по-прежнему общаются друг с другом по телефону и хотят, чтобы каждый из них узнал все имеющиеся сплетни. Если для такого коллектива существует хотя бы один способ оповещения, подчиненный ограничению

NODUP, то будем называть этот коллектив *сплоченным*. Коллектив, содержащий только одну группу, тоже будем считать сплоченным. Так, коллектив из трех групп сплетников $\{1,3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ в предыдущем примере не является сплоченным. В этих терминах задача про n сплетников, знающих по одной уникальной сплетне, теперь формулируется для коллектива из n групп, каждая из которых состоит из одного сплетника.

Если в коллективе каждая группа знает лишь одну сплетню (эта сплетня может быть изначальной или объединенной, являющейся подмножеством нескольких изначальных в смысле определения выше), то такой коллектив назовем *простым*. Так, коллектив из трех групп сплетников $\{1,3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ в предыдущем примере не является простым (сплетник 4 знает две сплетни, не образующие объединенную сплетню).

Заметим, что если объединить два сплоченных коллектива сплетников, в которых поровну сплетников, а множества их изначальных сплетен не пересекаются, то снова получится сплоченный коллектив. Действительно, мы сразу получим способ оповещения, если сначала в каждом из коллективов все сплетники узнают все сплетни своего коллектива, а потом каждый сплетник из первого коллектива поговорит с кем-то из второго. Таким способом можно из коллективов, содержащих одну группу, построить, например, следующие коллективы:

$$(a,a),\quad (a,a,2a,4a,8a,16a),\quad (a,a,a,a,4a,4a,4a,16a),\quad \underbrace{a,a,a,\ldots,a}_{2^k \text{ групп}} \tag{1}$$

Пусть имеется два коллектива $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ и $(b_1,b_2,\ldots,b_k)$, для которых множества изначальных сплетен совпадают. Предположим, что при каждом i группа из a_i человек первого коллектива и группа из b_i человек второго знают одно и то же множество сплетен. При этом мы допускаем, что a_i или b_i может быть равным нулю; если так случилось, к примеру, если $a_i = 0$, то изначальные сплетни, составляющие это множество сплетен, должны быть известны в других ненулевых группах первого коллектива. Назовем *суммой* этих коллективов коллектив $(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_k+b_k)$. Например, непростой коллектив из 10 сплетников, которым известны сплетни α, β, γ

Наборы сплетен	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
количество сплетников	3	3	2	2

представи́м в виде суммы двух коллективов:

Коллектив	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
1	3	0	0	2
2	0	3	2	0

Заметим, что если коллективы были сплоченными, то и их сумма тоже является сплоченным коллективом. Значит, если коллектив сплетников раскладывается в сумму сплоченных коллективов, каждый из которых знает в объединении тот же набор сплетен, что и исходный коллектив, то он тоже является сплоченным.

Вернемся к решению задачи. Преобразуем простой коллектив, состоящий из 12 одиночных сплетников, в простой коллектив $(4,4,4)$ (2^d сплетников, каждый из которых знает одну уникальную сплетню, всегда могут объединиться в группу как в примерах (1)). А теперь заметим, что он является суммой трех простых сплоченных коллективов $(1,1,2)$, $(1,2,1)$ и $(2,1,1)$.

4.2. Ответ: да.

Сначала слегка укрупним группы.

Сплетни	α	β	γ	δ	ε	ζ
Число сплетников	13	8	6	5	4	4

$\rightarrow$

α	β	γ	δ	$\varepsilon\zeta$
13	8	6	5	8

$\rightarrow$

α	γ	δ	$\beta\varepsilon\zeta$
13	6	5	16

Полученный простой коллектив легко раскладывается в сумму пяти сплоченных: $(2,1,1,4)$ (2 раза), $(4,1,1,2)$ (2 раза), $(1,2,1,4)$ (1 раз).

Другое разложение. Пусть сначала один человек, знающий сплетню γ, поговорит с человеком, знающим сплетню ζ, а также один человек, знающий сплетню δ, поговорит с человеком, знающим сплетню ε.

Коллектив	α	β	γ	δ	ε	ζ	$\delta\varepsilon$	$\gamma\zeta$
1	2	2	1	0	0	2	1	0
2	8	4	0	2	1	0	0	1
3	1	1	4	0	0	1	1	0
4	2	1	0	2	2	0	0	1

4.3. Ответ: да. [8].

Рассмотрим сначала простой коллектив сплетников $(3,3,2,2)$, в котором каждая группа знает соответственно сплетню α, β, γ, δ. Пусть один сплетник из I группы переговорит с одним из III группы, а один из II — со сплетником из IV. Получится коллектив (уже не простой) из 6 групп, который легко разложить в сумму трех сплоченных.

α	β	γ	δ
3	3	2	2

$\rightarrow$

α	β	γ	δ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$
2	2	1	1	2	2

$\rightarrow$

Коллектив	α	β	γ	δ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$
1	0	0	0	0	1	1
2	2	0	1	0	0	1
3	0	2	0	1	1	0

Теперь возьмем наших 20 сплетников и преобразуем их в простой коллектив $(4,4,4,4,4)$. Этот коллектив является суммой двух простых коллективов $(3,3,2,1,1)$ и $(1,1,2,3,3)$, каждый из которых может с помощью одного звонка быть преобразован в коллектив $(3,3,2,2)$, который мы уже рассматривали.

4.3$\frac{1}{2}$. Докажем, что при $n = 6$, 10, 14, 18 распространение слухов с ограничением NODUP невозможно [8, предложение 4].

Утверждение 1 [8, лемма 1]. При выполнении ограничения NODUP сплетники разбиваются на пары по первым звонкам, а также разбиваются на пары по последним звонкам.

Доказательство. Утверждение о последних звонках очевидно (если кто-либо узнал все сплетни, то его последний собеседник тоже узнал все сплетни и оба больше не могут ни с кем разговаривать).

Докажем утверждение о первых звонках. Пусть сплетник A — это первый человек, с которым разговаривал сплетник B. Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда для сплетника A первый разговор был с другим человеком C. После этого разговора сплетник C знает сплетню человека A и не знает сплетню B. После разговора сплетника B с A сплетня B всегда путешествует с A. Следовательно, C не сможет ее узнать. □

Пусть $n = 2k$. Можно считать, что первые звонки сплетников суть в точности первые k звонков схемы оповещения, а последние звонки сплетников — это в точности последние k звонков схемы оповещения. После того как сделаны первые k звонков, образовалось k объединенных сплетен. В каждый момент времени для каждого сплетника X назовем *напарником* сплетника X того сплетника Y, с которым X непосредственно перед этим разговаривал по телефону. Сразу после их разговора оба знали одинаковый набор сплетен.

Утверждение 2. При $n > 4$ ни один из сплетников не может перед своим последним разговором знать $k-1$ объединенных сплетен.

Доказательство. Если сплетник A перед последним разговором знает $k-1$ объединенную сплетню, то его собеседник B в этом последнем разговоре знал всего одну объединенную сплетню. Обозначим через B_1 первого собеседника сплетника B, через A_1 — собеседника A в предпоследнем разговоре. Теперь ясно, что сплетни B и B_1 могут быть известны только перечисленным в этом рассуждении персонажам. □

Из этих двух утверждений сразу следует, что при $n = 6$ схема NODUP невозможна: так как после первых звонков сплетни попарно объединились, то в любом последнем звонке участники могут знать лишь 2 и 4 сплетни, что запрещено вторым утверждением.

Разберем случай $n = 10$. В силу запрета из утверждения 2 в последнем разговоре могут участвовать лишь сплетники, один из которых знает две объединенные сплетни, а другой — три. Таким образом, перед тем как произошли k последних разговоров, было ровно 5 сплетников, знавших по 3 объединенные сплетни. Напарник каждого из этих пяти сплетников — один из этих же пяти сплетников (потому что человек, узнавший три сплетни, может после этого участвовать лишь в последнем разговоре). Таким образом, мы разбили 5 сплетников на пары. Это противоречие показывает, что единственный логически возможный случай не может быть реализован.

Разберем случай $n = 14$. В силу запрета из утверждения 2 в ни один из сплетников, участвующих в последнем разговоре, не должен знать ровно 6 сплетен. Так же, как в предыдущем параграфе, убеждаемся, что случай, в котором все сплетники в последнем разговоре знают по три или по четыре объединенные сплетни, невозможен (иначе мы найдем паросочетание на множестве из 7 сплетников, знающих 4 сплетни). Из тех же соображений должно быть четное число пар сплетников, знающих в последнем разговоре 2 или 5 сплетен. Тогда имеется нечетное количество пар сплетников, знающих в последнем разговоре 3 или 4 сплетни, и чтобы в очередной раз не возникло противоречия, напарник хотя бы одного из сплетников, знавших в последнем разговоре 4 сплетни, должен перед своим последним разговором «выучить» пятую сплетню.

Введем обозначения. Пусть A — сплетник, знавший в последнем разговоре объединенные сплетни номер 1, 2, 3, 4; B — его напарник, выучивший после разговора с A, сплетню номер 5 (в разговоре с C, знавшим только эту одну сплетню). Пусть B и C свои последние разговоры провели со сплетниками D и E, знавшими лишь 7-ю и 8-ю сплетни, ничто нам не мешает думать, что они узнали эти сплетни друг от друга. Пусть F, G, H — сплетники, узнавшие после своего первого разговора сплетни 5, 6, 7 (и не совпадающие с уже обозначенными сплетниками).

C	5	D	6,7
	↕		
B	1,2,3,4	E	6,7

A	1,2,3,4
F	5,6,7

H	5,6,7
G	6,7

Последний собеседник сплетника A должен был знать сплетни 5, 6, 7. В силу симметрии обозначений F, G, H, мы можем считать, что сначала F и G поговорили друг с другом, потом F поговорил с H и, наконец, F стал последним собеседником для A. Но теперь единственный способ для G узнать объединенную сплетню, известную изначально H (даже с учетом того, что мы рассматриваем сейчас не всех 14 сплетников), — это поговорить с ним. При этом G услышит повторно сплетню от F.

Случай $n = 18$ еще хуже.

4.4. Ответ: при $n = 1$, 2, 4, 8, 12, 16 и при всех четных $n \geqslant 20$.

Случаи $n = 1$, 2 тривиальны. Далее полагаем $n \geqslant 3$. Из решения задачи $4.3\frac{1}{2}$ сразу следует, что при нечетных n и при $n = 6$, 10, 14, 18 NODUP-схема не существует.

Утверждение [8, леммы 5, 6 и предложение 2]. При $n \equiv 0 \pmod 4$ возможно распространение слухов с ограничением NODUP.

Доказательство. По индукции.

Для n, являющихся степенью двойки, возможность распространения слухов следует из конструкции (1). Для $n = 12$, 20 примеры распространения слухов приведены в предыдущих задачах. Отнесем случаи $n = 4$, 8, 12, 16, 20 к базе индукции.

Докажем переход. Пусть $n \geqslant 24$ — очередное число, для которого мы хотим построить схему распространения слухов, а для меньших n существование такой схемы уже установлено. Заметим, что если n делится на 12, то можно разделить всех сплетников на 3 группы одинакового размера, в каждой из них число сплетников делится на 4 и меньше n, значит, внутри всех этих групп существует способ оповещения. Получим простой коллектив $(4a, 4a, 4a)$, $a = n/12$, который является суммой a сплоченных простых коллективов $(4, 4, 4)$. Если n не делится на 12, то $n = 12a + r$, где остаток $r = 4$ или 8. Если удастся разбить остаток на слагаемые $r = r_1 + r_2 + r_3$ таким образом, чтобы $4a + r_i$ сплетников по-прежнему образовывали группу, а (r_1, r_2, r_3) образовывали бы сплоченный коллектив, то все будет доказано. Действительно, тогда мы организуем три группы размера $4a + r_1$, $4a + r_2$, $4a + r_3$, а сумма будет содержать одно новое слагаемое — коллектив из r сплетников. Остаток $r = 4$ слишком мал, но всегда можно приписать к нему $12k$. Пусть $k = 1$, получаем коллектив $(4(a-1)+4, 4(a-1)+4, 4(a-1)+8)$, раскладывающийся в сумму из $a-1$ коллективов $(4, 4, 4)$ и коллектива $(4, 4, 8)$. При $r = 8$ можно положить $k = 2$ и все аналогично.

Утверждение [8, леммы 7, 8, 9 и предложение 3]. При $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \geqslant 22$ возможно распространение слухов с ограничением NODUP.

Доказательство. Мы наметим лишь план действий, подробности см. в [8].

Будем доказывать утверждение по индукции. База здесь представляет некоторую проблему: нужно проверить существование NODUP-схемы для всех четных маленьких n (а именно, при $20 \leqslant n \leqslant 62$).

Заметим, что если бы n делилось на 16, то можно было бы разделить сплетников на 4 группы одинакового размера, образующих простой сплоченный коллектив $(4a, 4a, 4a, 4a)$, $a = n/16$ (в каждой группе число сплетников делится на 4, а для таких чисел уже все доказано).

Но в рассматриваемом случае n не делится даже на 4, значит, $n = 16a + r$, где остаток r может быть равен 2, 6, 10, 14. Если в каждом из этих случаев удастся разбить остаток на слагаемые $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ таким образом, чтобы для $4a + r_i$ сплетников существовал способ оповещения и коллектив (r_1, r_2, r_3, r_4) был сплоченным, то мы получим доказательство утверждения для n сплетников все получится. Действительно, тогда можно было бы разбить n сплетников на группы $4a + r_1$, $4a + r_2$, $4a + r_3$, $4a + r_4$, а потом разбиваем коллектив на слагаемые: $(4a, 4a, 4a, 4a)$ и (r_1, r_2, r_3, r_4).

Однако остатки 2–14 слишком маленькие. Можно приписать ко всем остаткам $16k$. Полагая $k = 3$, получаем сплоченный коллектив $(4a, 4a, 4a, 4a)$, где $a \geqslant 3$, и остатки $r = 50$, 54, 58, 62. Например, в первом случае $r = 50 = 8 + 8 + 12 + 22$, $(8, 8, 12, 22)$ — сплоченный коллектив, и для $n = 4a + 8$, $4a + 12$, $4a + 22$ существует способ оповещения в силу базы индукции. В случае остатков $r = 54$, 58, 62 можно выполнить аналогичную конструкцию.

4.4$\frac{1}{2}$. Это лемма 2.5 [10]. Заметим, что в любой схеме оповещения с ограничением NODUP сплетники разбиваются первыми звонками на пары (как в задаче 1.6). Доказательство см. в начале решения задачи 4.3$\frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что утверждение задачи неверно, и некоторый сплетник A поговорил по телефону всего два раза. Пусть первый раз он беседовал со сплетником B, тогда после их беседы A-слух и B-слух циркулируют вместе. Если во второй раз A беседовал с C, то в этот момент C знал все слухи, кроме A-слуха и B-слуха. Если предыдущий разговор сплетника C был с D, то D тот момент тоже знал все слухи, кроме A-слуха и B-слуха. Единственный возможный способ для D завершить ознакомление со слухами — это поговорить с B, когда B знает только эти два слуха. Но тогда A-слух и B-слух не станут известны остальным $n - 4$ сплетникам.

4.5. Следующее утверждение доказано в заметках Д. Веста [13] и А. Сереша [10, § 3]

Утверждение Пусть $n = 4k$. Тогда достаточно $9k - 6$ звонков.

Доказательство. Разобьем сплетников на k групп по 4 человека, в каждой из которых организуем звонки таким образом, чтобы все узнали сплетни своей группы. Это можно сде-

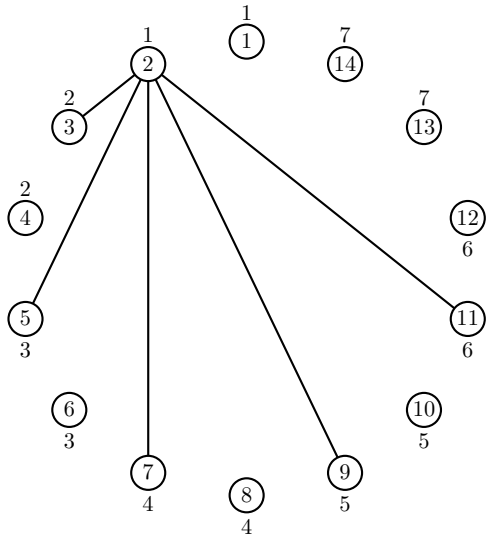


Рис. 3. В кружках номера сплетников первого множества. Линии означают звонки второго сплетника. Рядом с кружком записаны номера объединенных сплетен, известных этому сплетнику до показанных на рисунке звонков.

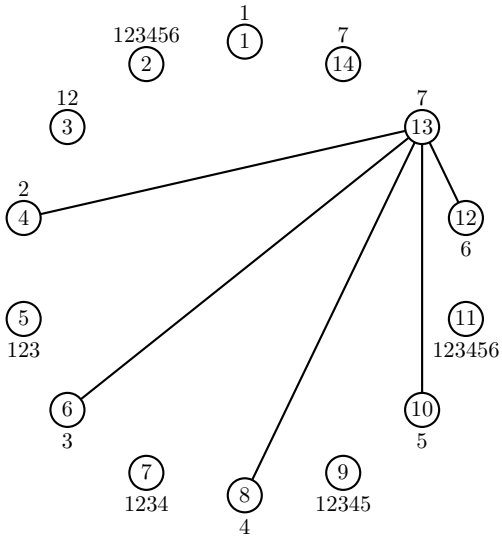


Рис. 4. Линии означают звонки $2k-1$-го сплетника

лать за $4k$ звонков. Теперь поделим сплетников на два одинаковых множества по $2k$ человек, в каждое попадет пара сплетников, знающая все сплетни i-той группы, $i = 1, \ldots, k$. Организуем звонки в первом множестве таким образом, чтобы все сплетники разбились на пары и каждая пара сплетников узнала все сплетни, кроме одной. Тогда каждой паре сплетников первого множества будет соответствовать пара сплетников из второго множества, с которой они могут поговорить, чтобы узнать все. Для этого потребуется $2k$ звонков. Осталось в первом множестве построить нужную конфигурацию из $3k-6$ звонков.

Нужная последовательность звонков показана на рисунках 3–5. Пронумеруем сплетников первого множества и расположим их на окружности. Сначала $k-2$ звонка делает второй сплетник: он звонит всем сплетникам, имеющим нечетные номера, кроме $(2k-1)$-го: 3, 5, 7, ... (именно в такой последовательности). Следующие $k-2$ звонка делает $(2k-1)$-й сплетник: он звонит всем сплетникам, имеющим четные номера, кроме второго: $2(k-1)$, $2(k-2)$, ... (тоже последовательно). После этих звонков 4 сплетника уже знают все сплетни, кроме одной, а именно: второй и $(2k-3)$-й сплетники знают все сплетни, кроме k-й, а четвертый и $(2k-1)$-й — все сплетни, кроме первой, см. рис. 5. Остальных сплетников разобьем на пары: для $i = 2, \ldots, k-1$ пусть сплетник, знающий сплетни $1, 2, \ldots, i-1$, позвонит сплетнику, знающему сплетни $i+1, i+2, \ldots, n$ (см. рис. 5), в результате чего образуется пара сплетников, знающая все сплетни, кроме i-й. На это потребуется еще $k-2$ звонков.

4.6. Это доказано в статье [10, теорема 4.1].

5.1. a) Ответ: $(n-1)(k+1)$ телеграмм.

Мы взяли это утверждение в [2, Теорема 4.1].

Пример. Пусть каждый рядовой пошлет $k+1$ телеграмму генералу.

Оценка. Каждый рядовой должен послать не менее $k+1$ телеграммы.

b) Ответ: $(k+2)n-2$ телеграммы.

Мы взяли это утверждение в [2, Теорема 4.2]

Пример. Приведем пример ориентированного графа, в котором от каждой вершины до любой другой существует $k+1$ реберно непересекающихся восходщих путей. Проведем $k+2$ ребра от вершины с номером i к вершине с номером $i+1$ с весами $i, n+i, 2n+i, \ldots, (k+1)n+i$ при $i = 1, 2, \ldots, n-2$; $k+1$ ребро от вершины с номером $n-1$ к вершине с номером n с весами $n-1, 2n-1, \ldots, (k+1)n-1$ и $k+1$ ребро от вершины с номером n к вершине

с номером 1 с весами n, $2n$, $\ldots$, $(k+1)n$. На рис. 6 показан пример такого графа при $n=6$, $k=2$.

О ц е н к а. Пусть дан граф звонков, в котором от каждой вершины до любой другой доходят телеграммы даже в случае удалении k ребер. Пусть H — подграф этого графа, содержащий только первые $n-2$ ребер. Граф H не является связным. Значит, для каждой вершины существует по крайней мере $k+1$ ребро, не лежащее в H. Следовательно, общее число ребер графа звонков не меньше $(n-2)+(k+1)n$.

5.2. Это утверждение мы взяли в статье [2, теорема 2.1].

Для построения примеров нам понадобится граф на n вершинах, обозначим его T_n, в котором у генерала степень 0 или 1, остальные вершины имеют степень k, где $k \leqslant n-2$. Строение T_n зависит от четности n и k. Пронумеруем вершины, пусть номер генерала равен n. При четном k между вершинами с номерами i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, есть ребро, если $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k/2\}$. Если k нечетно, а n четно, то проведем ребра при $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k-1)/2\}$, а также добавим любое паросочетание на n вершинах. Если n и k оба нечетные, то проведем ребра при $\big((i-j) \bmod (n-1)\big) \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k-1)/2, (n-1)/2\}$.

Вернемся к решению задачи. Напомним, что в графе звонков могут быть кратные ребра. Чтобы следить за порядком совершения звонков, поставим на ребрах метки (вещественные числа): чем позже был звонок, тем крупнее должна быть соответствующая метка. Допустимы одинаковые метки звонков, если звонки совершаются последовательно и при этом могут быть переставлены друг с другом. Назовем путь в графе звонков *восходящим*, если при движении вдоль пути веса ребер возрастают.

а) Поскольку после удаления k ребер граф должен остаться связным, степень каждой вершины не может быть меньше $k+1$. Так как сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер, получаем, что число звонков больше либо равно $\left\lceil \frac{k+1}{2} \cdot n \right\rceil$.

Осталось предъявить граф, который обеспечивает возможность передать все слухи генералу и у которого все вершины имеют степень $k+1$ (при неблагоприятной четности одна из вершин будет вынуждена иметь степень $k+2$). При $k \geqslant n-1$ такой граф действительно существует, а при меньших k имеются проблемы с расстановкой весов.

Поделим $k+1$ на $n-1$ с остатком: $k+1 = a(n-1)+b$, где $a > 0$, $0 \leqslant b < n-1$. Построим граф, состоящий из объединения a графов K_n (полных графов на n вершинах) и графа R, у которого все вершины имеют степень b, кроме вершины-генерала, степень которой равна b или $b+1$. Такой граф нетрудно построить, взяв граф T_{n+1} из начала решения

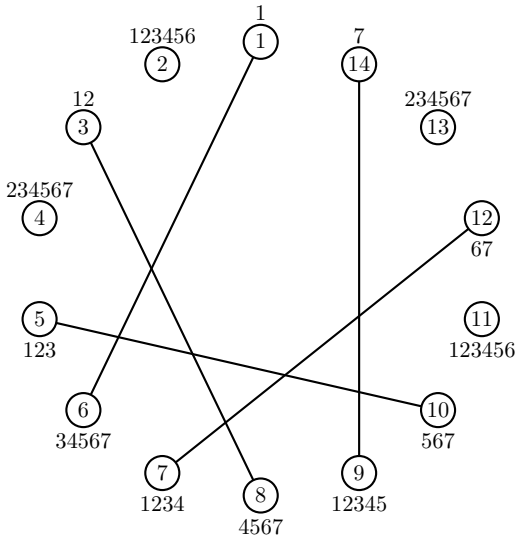


Рис. 5. c) Оставшиеся звонки в первом множестве.

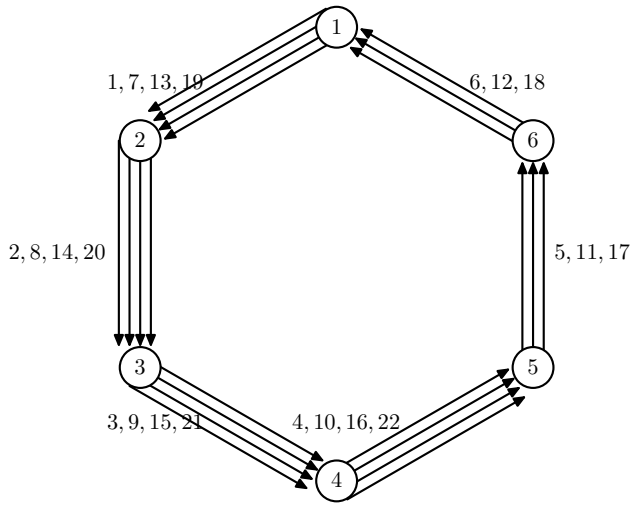


Рис. 6. Плохая почта

и объединив вершину-генерала с одной из «обычных» вершин. Теперь назначим веса ребер. Пусть самые маленькие веса имеют ребра графа R, не соединенные с генералом. Пусть ребра графов K_n, тоже не соединенные с генералом, имеют вес побольше. А ребра всех графов, соединенные с генералом, имеют самые большие веса. Внутри каждого из этих трех множеств ребер веса могут быть упорядочены произвольно. Тогда от каждой вершины до генерала идут $k+1$ непересекающихся по ребрам путей. Следовательно, даже после удаления из графа произвольных k ребер информация все равно дойдет до генерала. Все вершины построенного графа имеют степень $k+1$, кроме генерала, который может иметь степень $k+1$ или $k+2$.

b) При $k=0$ граф звонков должен быть связным, следовательно, в нем не менее $n-1$ ребер, а с другой стороны, дерево, корнем которого является генерал, а все пути к корню восходящие, является примером подходящего графа.

Рассмотрим теперь граф звонков при $1 \leqslant k < n-1$. Возьмем произвольную вершину v (отличную от генерала) и среди инцидентных ей ребер выберем ребро ℓ максимального веса. Пусть некоторый восходящий путь проходит через это ребро: он пришел в вершину v по ребру меньшего веса и вышел по ребру ℓ. Перенаправим ребро ℓ сразу в вершину-генерала. В результате число ребер графа осталось прежним и, как нетрудно видеть, после этого изменения генерал по-прежнему сможет получить все слухи в условиях плохой связи. Сделаем такую операцию для всех вершин, тогда каждая вершина окажется соединенной с генералом. Значит, степень генерала не меньше $n-1$. Суммируя степени вершин, получаем теперь, что число звонков больше либо равно $\left\lceil \frac{(k+1)\cdot(n-1)+(n-1)}{2} \right\rceil$.

Теперь построим граф, обеспечивающий генерала слухами, в котором степени всех рядовых равны $k+1$, а степень генерала равна $n-1$ или n (за счет кратного ребра, при неблагоприятной четности). Возьмем граф T_n, описанный в начале решения, произвольно назначим (небольшие) веса его ребер, после чего соединим все вершины T_n с генералом, назначив новым ребрам большие веса.

5.3. [2, Теорема 3.1]

a) Приведем пример подходящего графа звонков. Пусть n нечетно. Тогда от каждой вершины с нечетным номером, не равным 1, проведем k ребер к вершине с номером 1 с весами $3, 5, \ldots, 2k+1$, а от каждой вершины с четным номером проведем $k+1$ ребер к вершине с номером 1 с весами $2, 4, \ldots, 2k+2$. Теперь проведем два ребра между вершинами с номерами i и $i+1$ с весами 1 и $2k+3$. Получилось много ребер с одинаковыми весами. В данном случае веса ребер обозначают не номера звонков, а имеется в виду, что ребра разбиваются на классы (множества ребер с одинаковыми весами), в каждом классе ребра могут быть упорядочены произвольно, но ребро класса i всегда имеет меньший номер, чем ребро класса j при $i<j$. Пример такого графа при $n=7$ и $k=3$ показан на рис. 7. Можно проверить, что тогда от каждой вершины до каждой проходят $k+1$ реберно непересекающихся путей.

Если n четно, то к предыдущей конструкции присоединим еще одну вершину, соединив ее $k+1$ ребром с первой вершиной, веса ребер будут $2.5, 3.5, 5.5, 7.5, \ldots, 2k+1.5$.

b) Оценим $\tau(n,k)$ через $\mu(n,k)$. Пусть G — граф звонков, в котором даже после удаления k ребер информация от каждой вершины будет доходить до любой другой. Посмотрим на ситуацию после того, как мы сделали r первых звонков. Оставшиеся звонки образуют граф на тех же вершинах, который будем называть H. Рассмотрим произвольную вершину v графа H. Заметим, что этой вершине для получения полной информации (даже с учетом удаления k ребер) требуются только первые r звонков и звонки внутри ее компоненты связности в графе H. Значит, число ребер графа, содержащего ребра, которые ей могут пригодиться, больше либо равно $\mu(n,k)$. Будем считать, что $r=\mu(n,k)-\xi$, где ξ подберем таким образом, чтобы получить наилучшую оценку. Очевидно, $|E(G)| = r + |E(H)|$. Чтобы оценить число ребер H снизу, будем считать, что вершина v лежит в компоненте связности наименьшего размера, пусть l — число ребер этой компоненты, тогда количество компонент не меньше $\frac{n}{l}$, и $|E(H)| \geqslant n - \frac{n}{l}$ (правая часть — это количество ребер в графе в предположении, что все компоненты содержат по l вершин и являются деревьями). При этом $l \geqslant \xi$, так как в противном

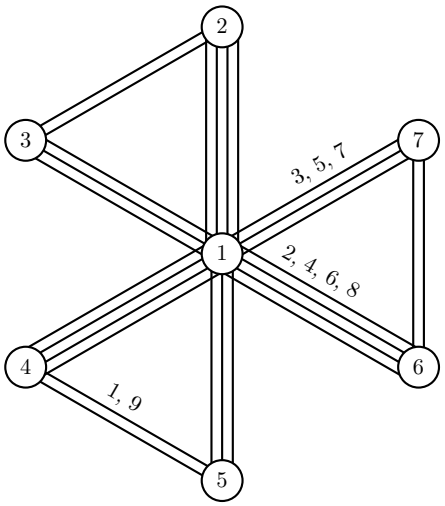


Рис. 7. Конструкция графа

случае рассматриваемая вершина v может не получить полной информации, следовательно, $|E(H)| \geqslant n - \frac{n}{\xi}$. Получим $|E(G)| \geqslant (\mu(n,k) - \xi) + E(H) \geqslant (\mu(n,k) - \xi) + (n - \frac{n}{\xi})$. Правая часть минимальна при $\xi = \sqrt{n}$ и мы получаем неравенство $E(G) \geqslant \mu(n,k) + n - 2\lceil\sqrt{n}\,\rceil$.

5.4. Мы взяли это утверждение в [3, Теорема 3.2].

а) Как обычно, оценка сверху получается предъявлением примера. Пусть R — регулярный (или почти регулярный) (мульти)граф на n вершинах, в котором каждая вершина имеет степень k (за исключением, возможно, одной вершины, имеющей степень $k+1$). Рассмотрим следующую схему оповещения. Сначала выполним $2n-4$ звонка в соответствии с любым наибыстрейшим способом оповещения. После этого произвольно выполним звонки, соответствующие ребрам графа R. Все слухи, полученные всеми сплетниками в этой схеме, очевидно, являются надежными. При этом схема содержит $\left\lceil \frac{(k+4)n}{2} \right\rceil - 4$ звонков.

б) Лемма 1 [3, лемма 3.1]. Пусть дано дерево T на n вершинах, в котором на каждом ребре задан вес, позволяющий «хронологически» упорядочивать ребра. Для каждой вершины u обозначим через r_u наибольшее количество вершин, в которые можно прийти из вершины u, двигаясь так, чтобы вес при движении возрастал. Минимальное по всем вершинам дерева значение r_u обозначим через $R(T)$. Обозначим через $r(n)$ максимум величины $R(T)$ по множеству всех ориентированных деревьев T с n вершинами. Тогда $r(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Доказательство. Рассмотрим дерево T, для которого $R(T) = r(n)$. Пусть xy — ребро максимального веса, T_x, T_y — компоненты связности, которые получаются после его удаления ($x \in T_x$, $y \in T_y$). Можно считать, что в T_x не больше вершин, чем в T_y, тогда $R(T_x) \leqslant r(\lfloor n/2 \rfloor)$. Выберем в T_x вершину u, реализующую значение $R(T_x)$. В дереве T путь из вершины u не может пройти в компоненту T_y дальше вершины y, поскольку xy — ребро максимального веса. Тогда $r(n) = R(T) \leqslant r_u + 1 = R(T_x) + 1 \leqslant r(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$. Вместе с начальным условием $r(1) = 0$ мы получаем неравенство $r(n) \leqslant \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Пример, реализующий равенство, строится по индукции. На очередном шаге берем две копии дерева, служащего примером для $n-1$, и, сохраняя относительный порядок ребер внутри каждой копии, соединяем их корни ребром максимального веса. □

Лемма 2 [3, следствие 2.1]. Пусть в (мульти)графе G на n вершинах на каждом ребре задан вес, с помощью которого можно хронологически упорядочить ребра. Пусть u — фиксированная вершина графа G. Пусть оказалось, что для каждой вершины $v \neq u$ существует не менее k возрастающих путей из u в v, которые отличаются друг от друга последними ребрами. Пусть, наконец, среди всех графов с такими свойствами граф G имеет наименьшее число ребер. Тогда в нем $\left\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \right\rceil$ ребер.

Доказательство. Граф G представляет собой объединение остовного дерева и k-

регулярного подграфа (или почти k-регулярного подграфа) на множестве всех вершин, за исключением u. В этом случае формула очевидна.

Построим это остовное дерево: для каждой вершины $v \neq u$ отметим ребро e_v с наименьшим весом, принадлежащее какому-нибудь восходящему пути из u в v. Мы отметили $n-1$ ребер, они задевают все вершины графа (минимальное ребро вершины u тоже окажется отмеченным), поэтому это остовное дерево. Далее, среди ребер вершины v ребро e_v — единственное ребро, принадлежащее хоть какому-то восходящему пути из u в v. Действительно, если ребро e_w инцидентно вершине v и лежит на пути из u в v, то этот путь проходит через w и тогда он должен входить в w по ребру, у которого вес меньше, чем вес e_w, что невозможно. Таким образом, граф G для каждой вершины u содержит, помимо e_u, еще не менее k ребер, инцидентных u. Ясно, что минимальное число ребер будет в k-регулярном случае. □

С помощью этих двух лемм решим задачу. Пусть имеется способ оповещения, обеспечивающий сплетников надежными слухами. Первые $n-1$ звонков этого способа оповещения задают подграф H в графе звонков. В силу малости количества звонков хотя бы одна из компонент подграфа H является деревом, обозначим его T. По лемме 1 в дереве T можно выбрать вершину u, из которой можно добраться по возрастающим путям лишь не более чем в $\lfloor \log_2 n \rfloor$ вершин. Уберем ребра всех этих путей из графа H, полученный граф назовем H', он содержит не менее $n-1-\lfloor \log_2 n \rfloor$ ребер.

Для графа $G - H'$ и вершины u выполнены условия леммы 2 (отброшенные нами ребра не могли быть использованы для построения путей из вершины u, так как они были хронологически «слишком ранними»), значит, в нем не менее $\left\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \right\rceil$ ребер. Тогда в G не менее $n-1-\lfloor \log_2 n \rfloor + \left\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \right\rceil$ ребер.

6.1. а) [5, Лемма 3] Индукция по k. База тривиальна. Для доказательства перехода отменим первый звонок. В результате дерево окажется разбитым на две компоненты, в каждой из которых перестанет быть известным один слух из противоположной компоненты. По индукционному предположению тогда каждая из компонент содержит не менее 2^{k-1} вершин.

Пункт б) решается аналогично.

6.2. Пример [5, Лемма 1]. Поделим n на 2^{k-1} с остатком: $n = 2^{k-1}n_1 + n_2$. Разобьем сплетников на n_1 групп по 2^{k-1} человек и последнюю группу из n_2 человек. В каждой группе из 2^{k-1} человек можно сделать 2^{k-1} звонок так, чтобы в результате все члены группы знали по k слухов (двое звонят друг другу — в результате двое знают по 2 слуха; потом каждый из них разговаривает новым членом группы, в результате четверо знают по 3 слуха; потом каждый из четырех разговаривает с новым членом группы, в результате восемь человек знают по 4 слуха и т.д.). Что касается последней группы, пусть каждый человек из нее позвонит кому-нибудь из первых групп, когда там уже закончатся звонки, чтобы узнать k слухов. Итого, $P(n,k) \leqslant (2^{k-1}-1)n_1 + n_2 = \left\lceil \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \cdot n \right\rceil$.

Оценка [5, Лемма 4]. Докажем оценку $P(n,k) \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} n$, не накладывая никаких условий на k.

Рассмотрим последовательность, дающую $P(n,k)$ звонков. Пусть для каждого $i \geqslant 1$ этот граф звонков G имеет n_i компонент связности, содержащих i вершин, тогда

$$\sum_i i n_i = n.$$

Заметим, что каждая компонента с i вершинами имеет не менее $i-1$ ребер. Более того, по утверждению задачи 6.1 малые компоненты (те, для которых $i < 2^{k-1}$) не могут быть деревьями, значит, в них не менее i ребер. Таким образом,

$$P(n,k) \geqslant \sum_{i<2^{k-1}} i n_i + \sum_{i \geqslant 2^{k-1}} (i-1) n_i.$$

Осталось заметить, что $i-1 \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} i$ при $i \geqslant 2^{k-1}$, и следовательно,

$$P(n,k) \geqslant \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \sum_i i n_i = \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} n.$$

6.3. [5, Лемма 2] Выделим из множества всех сплетников два непересекающихся набора: набор X, состоящий из i сплетников, и набор $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{2^{k-i-2}}\}$ из 2^{k-i-2} сплетников. Звонки организуем следующим образом. Сначала каждый человек из множества X сообщает сплетнику y_1 свой слух. В результате сделано i звонков, а сплетник y_1 знает теперь $i+1$ слух. Далее итерационным процессом мы начинаем удваивать число «осведомленных» сплетников в множестве Y. База: делаем звонки: y_1y_2, y_3y_4, y_1y_3, y_2y_4; в результате сделано 4 звонка и первые 4 человека из множества Y знают по $i+4$ слуха. Переход. Если на предыдущем шаге первые 2^r человек из множества Y знали $i+r+2$ слуха, то на очередном шаге мы делаем 2^r звонков

$$y_1y_{1+2^r}, \quad y_2y_{2+2^r}, \quad \ldots, \quad y_{2^r}y_{2^{r+1}}$$

и теперь первые 2^{r+1} сплетников из множества Y знают по $i+r+3$ слухов. Процесс завершится, когда будет «охвачено» все множество Y. К этому моменту будет всего сделано $i+2^{k-i-2}$ звонков и все сплетники из Y будут знать k слухов. После этого пусть y_1 позвонит всем сплетниками не из Y, сообщив им свои k слухов. Таким образом, $P(n,k) \leqslant i+2^{k-i-2}+(n-2^{k-i-2}) = n+i$.

В этом рассуждении мы использовали лишь неравенство $t_i \leqslant n$.

6.4. Пусть имеется последовательность c_i звонков сплетников ($1 \leqslant i \leqslant s$). Заметим, что если во время некоторого звонка c_i поговорили два человека, а следующий звонок c_{i+1} осуществляют два других человека, то мы можем переставить эти звонки друг с другом, что не повлияет на результат распространения сплетен с помощью данной последовательности звонков. Такое же *перестановочное правило* действует для наборов из нескольких звонков: если две группы из нескольких последовательных звонков $c_{j-p}, c_{j-p+1}, \ldots, c_{j-1}$ и $c_j, c_{j+1}, \ldots, c_{j+q-1}$ непосредственно следуют одна за другой и не пересекаются по множеству разговаривавших в них людей, эти две группы звонков можно поменять местами. Получится последовательность

$$c_1, \ldots, c_{j-p-1}, \quad c_j, c_{j+1}, \ldots, c_{j+q-1}, \quad c_{j-p}, c_{j-p+1}, \ldots, c_{j-1}, \quad c_{j+q}, \ldots, c_s,$$

которая дает то же финальное распределение сплетен, что и исходная. Последовательности звонков, полученные друг из друга с помощью таких перестановок, будем называть *эквивалентными*.

С учетом результата предыдущей задачи, для доказательства требуемого утверждения достаточно проверить, что при $t_i \leqslant n < t_{i-1}$, где $0 \leqslant i \leqslant k-4$, имеет место неравенство $P(n,k) \geqslant n+i$. Мы докажем более тонкий вариант этого неравенства [5, Лемма 5], из которого это утверждение сразу следует. Будем называть сплетника *осведомленным*, если в результате разговоров он узнает не менее k слухов.

Лемма. Предположим, что $n \leqslant t_{i-1}-1$, где $0 \leqslant i \leqslant k-4$. Пусть $c_1, \ldots, c_{i+j}$ — последовательность из $i+j$ звонков. Тогда

1) в результате этих звонков образовалось не более j осведомленных сплетников;

2) если в результате этих звонков образовалось ровно j осведомленных сплетников (запомним их), то существует эквивалентная последовательность $c'_1, \ldots, c'_{i+j}$, в которой последние j звонков $c'_{i+1}, c'_{i+2}, \ldots, c'_{i+j}$ были только строго между осведомленными сплетниками (т.е. только между теми людьми, которых мы запомнили).

Доказательство. Индукция по j.

База $1 \leqslant j \leqslant k-i-2$. Тогда $i+j \leqslant k-2$, т. е. любая компонента связности графа звонков содержит не более $k-1$ вершины, поэтому ни один из сплетников пока еще не стал осведомленным. Оба доказываемых утверждения оказались неинтересными.

Переход. Пусть $j \geqslant k-i-1$, и для $j' = j-1$ выполняется предположение индукции.

Докажем утверждение 1). Пусть в результате последовательности из j звонков имеется $j+1$ осведомленный сплетник. Поскольку в результате последнего звонка c_{i+j} могло появиться не более двух осведомленных сплетников, к моменту завершения звонка c_{i+j-1} было в точности $j-1$ осведомленных сплетников $x_1, \ldots, x_{j-1}$, а последний звонок состоялся между «новыми» осведомленными сплетниками x_j и x_{j+1}. В силу второго утверждения предположения индукции мы можем считать, что все звонки $c_{i+1}, \ldots, c_{i+j-1}$ были строго между сплетниками $x_1, \ldots, x_{j-1}$, и тогда эту группу звонков можно переставить с c_{i+j}. Но тогда в результате $i+1$ звонка $c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+j-1}$ появилось два осведомленных сплетника. Этого не может быть, поскольку при ограничениях $i \leqslant k-4$ на переменную i не может появиться вообще ни одного осведомленного сплетника (компонента связности, содержащая осведомленного сплетника – это как минимум дерево, содержащее k вершин, поэтому в ней не менее $k-1 > i+1$ ребер).

Докажем утверждение 2). Предположим что в результате $i+j$ звонков мы имеем ровно j осведомленных сплетников, но при этом последние j звонков затрагивали не только этих сплетников. Тогда выберем максимально возможное p, такое что последние звонки $c_{i+p+1}, \ldots, c_{i+j}$ были только между осведомленными сплетниками. Заметим, что тогда один из собеседников звонка c_{i+p} — тоже осведомленный, так как иначе мы могли бы перенести этот звонок в конец последовательности звонков и мы получили бы тех же j осведомленных сплетников уже после $i+j-1$ звонков, что противоречит предположению индукции.

Пусть G — граф звонков, G' — его подграф, образованный звонками $c_{i+p}, \ldots, c_{i+j}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $p = 1$ и при этом граф G' оказался связным. Тогда G' — дерево (в нем j ребер и $j+1$ вершина — все осведомленные сплетники и один неосведомленный участник звонка c_{i+p}). Рассмотрим компоненту C' графа G, которая содержит G'. Пусть эта компонента содержит i' вершин вне G', тогда она должна содержать еще по крайней мере i' ребер (кроме ребер, лежащих в G'). Эти ребра задают какие-то из звонков $c_1, \ldots, c_i$, поэтому $i' \leqslant i$. Удалим эти i' звонков из полной последовательности звонков, это приведет к тому, что по окончании звонков в дереве G' все сплетники, кроме одного, будут знать не менее $k-i'$ слухов. Тогда по утверждению задачи 6.1 б) выполнено неравенство $j+1 \geqslant 2^{k-i'-1}-1$. Тогда

$$t_{i-1} - 1 = i - 2 + 2^{k-i-1} \geqslant n \geqslant i' + j + 1 \geqslant i' + 2^{k-i'-1} - 1 \geqslant i + 2^{k-i-1} - 1 = t_{i-1}.$$

Противоречие. В последнем неравенстве мы воспользовались убыванием последовательности t_i.

Теперь рассмотрим остальные случаи: когда $p > 1$ или граф G' состоит из двух или более компонент. Обозначим через C компоненту графа G', содержащую звонок c_{i+j}. Переобозначим звонки: пусть $c'_1 = c_{i+j}$, $c'_2, \ldots, c'_r$ — это звонки в хронологическом порядке, совершенные в компоненте C, и пусть $c''_1, c''_2, \ldots, c''_s$ — остальные звонки в G'. В обоих рассматриваемых случаях $r < j$ (а вот параметр s может быть равен нулю, когда $p > 1$).

В силу перестановочного правила все звонки $c''_1, \ldots, c''_s$ можно осуществить до звонков $c'_1, \ldots, c'_r$, т. е. исходная последовательность звонков эквивалентна последовательности

$$c_1, c_2, \ldots, c_{i+p-1}, \quad c''_1, \ldots, c''_s, \quad c'_1, \ldots, c'_r.$$

Поскольку звонок c'_1 затрагивает только одного осведомленного сплетника, компонента C содержит не более r осведомленных сплетников (в ней r ребер и не более $r+1$ вершин). Значит, после $i+j-r$ звонков из выписанной последовательности образовалось не менее $j-r$ осведомленных сплетников. Тогда по индукционному предположению количество осведомленных сплетников должно быть в точности равно $j-r$ (и тогда компонента C содержит ровно r осведомленных сплетников), и можно реорганизовать эти $i+j-r$ звонков так, что последние $j-r$ звонков будут между осведомленными сплетниками (не лежащими в C):

$$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}, \quad c'_1, \ldots, c'_r.$$

Так как в этой последовательности звонки $\tilde{c}_{i+1}, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}$ совершаются между осведомленными сплетниками не из C, мы можем переставить их со звонками $c'_1, \ldots, c'_r$. Получится эквивалентная последовательность

$$\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_i, \quad c'_1, \ldots, c'_r, \quad \tilde{c}_{i+1}, \ldots, \tilde{c}_{i+j-r}.$$

Первые $i+r$ звонков этой последовательности приводят к появлению r осведомленных сплетников. Значит, по предположению индукции можно переупорядочить эти $i + r$ звонков так, чтобы последние r звонков из них осуществлялись между осведомленными сплетниками. Сделав это, мы получим требуемое: в образовавшейся последовательности последние j звонков происходят между осведомленными сплетниками. Лемма доказана. □

Список литературы

[1] *Шаповалов А.В.* Задача о сплетниках // Математическое просвещение. Сер. 3. 2015. Вып. 19. С. 249–253

[2] *Berman K., Hawrylycz M.* Telephone problems with failures // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1986. Vol. 7. P. 13–17.

[3] *Berman K., Paul J.* Verifiable broadcasting and gossiping in communication networks // Discr. Appl. Math. 2002. Vol. 118. P. 293–298.

[4] *Bumby R.* A problem with telephones // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1981. Vol. 2. P. 13–18.

[5] *Chumg G., Tsay Y.-J.* The partial gossiping problem // Discr. Math. 1996. Vol. 148. P. 9–14.

[6] *Harary F., Schwenk A.J.* The communication problem of graphs and digraphs // J. Franklin Inst. 1974. Vol. 297. P. 491-–495.

[7] *Kleitman D. J., Shearer J. B.* Further gossip problems // Discr. Math. 1980. Vol. 30. P. 151–156.

[8] *Seress A.* Gossiping old ladies // Discrete Math. 1983. Vol. 46. P. 75–81.

[9] *Seress A.* Gossips by conference calls // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1987. Vol. 22. P. 229-—238.

[10] *Seress A.* Quick Gossiping without Duplicate Transmissions // Graphs and Combinatorics. 1986. Vol. 2 P. 363–381.

[11] *Tijdeman R.* On a telephone problem // Nieuw Arch. Wisk. 1971. Vol. 19. P. 188–192.

[12] *West D.* A class of solutions to the gossip problem, I // Discrete Mathematics. 1982. Vol. 39. P. 307–326.

[13] *West D.* Gossiping without duplicate transmissions // SIAM J. Alg. Disc. Math. 1982. Vol. 3. P. 418–419.

[14] *West D.* Introduction to graph theory. 2nd edition. Univ. of Illinois, 2001.

13Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ФУНКЦИЙ [1]

А. Белов, [2] И. Митрофанов, А. Скопенков, [3] А. Чиликов, [4] С. Шапошников [5]

представляют А. Белов, А. Скопенков, С. Усов,[6] А. Чиликов

Задачи до промежуточного финиша

О чем этот цикл задач

Этот проект посвящен нескольким классическим результатам и методам чистой математики, интересным с точки зрения информатики (той ее части, которая относится к комбинаторной геометрии и теории кодирования).

Если имеется несколько функций, то одни из них можно подставлять в качестве аргументов других. Эта операция называется *суперпозицией*. Например,

• функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + y^2$, является суперпозицией функций $x + y$ и xy;

• функция $f : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$, $f(x, y) = x \oplus y = x\mathrm{XOR}y$, является суперпозицией функций $\overline{x}$, $x \vee y$ и $x \wedge y$;

• функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = g\Big(g\big(\sin x + y, g(y, x^2, z), x\big), x, x\Big)$, является суперпозицией функций $g(x, y, z), x + y, \sin x, x^2$.

Четкое определение дано в начале §1. Суперпозиции — важный объект исследования в анализе, топологии и computer science. Общая постановка задачи: когда данную функцию от нескольких переменных можно представить в виде *суперпозиции* функций от меньшего числа переменных? Ответ зависит от рассматриваемого класса функций (ср. [ZSS, п. 21.5 'Выразимость для функций алгебры логики'], [Ar58]).

Мы продемонстрируем некоторые важнейшие идеи решения этой общей задачи для непрерывных функций, т.е. доказательства теоремы А.Н. Колмогорова 1.11 (это решение 13-й проблемы Д. Гильберта). Они будут представлены на 'олимпиадных' примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму научного языка. За счет этого данный цикл задач доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты.

Для его решения не нужно специальных знаний, все новые определения будут даны. При этом потребуется (и будет далее развиваться) опыт сообразительности, т.е. математическая культура. В частности, хотя цикл задач аналитический, знаний математического анализа для решения многих задач не требуется — мы иллюстрируем основные идеи на дискретных версиях. Тем самым, решение этих задач поможет *развить* аналитические опыт и интуицию.

Будут предложены красивые задачи для исследования. Некоторые знаменитые примеры 'непрерывной' математики (пила Вейерштрасса, кривая Пеано) уже оказались полезными в физике и computer science. Надеемся, схожие, но менее известные, идеи теоремы Колмогорова также окажутся полезными.

Соглашения

Если текст задачи выглядит как утверждение, то в задаче требуется его доказать. Если номер задачи помечен кружком (например, 5°), то это базовая задача. Рекомендуем решить

[1]Благодарим С. Дориченко и Г. Челнокова за полезные замечания, И. Решетникова за подбор задач о кривой Пеано и Р. Садыкова за написание указаний к некоторым вводным задачам.

[2]Московский Физико-Технический Институт, Московский Институт Открытого Образования.

[3]Независимый Московский Университет, Московский Физико-Технический Институт; `www.mccme.ru/~skopenko`; поддержан грантом фонда Д. Зимина «Династия» and the Russian Foundation for Basic Research Grant No. 15-01-06302.

[4]Московский Государственный Технический Университет им. Баумана.

[5]Национальный Исследовательский Университет «Высшая школа экономики»

[6]Омский Государственный Университет им. Достоевского.

все базовые задачи из раздела до того, как вы приступите к остальным задачам раздела. Если номер задачи помечен звездочкой (например, 5*), эта задача посложнее соседних. Такие задачи можно отложить до тех пор, пока не будут решены остальные.

Участник (или группа участников) конференции, решающий задачи проекта, получает "боб" за каждое *записанное* решение, получившее '+' или '+.'. Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных проблем, или оформление некоторых решений в системе TEX. У жюри бесконечно много бобов. Решения можно сдавать и устно, но за каждые пять попыток (неважно, удачных или нет) один боб теряется.

Если вы застряли на какой-нибудь задаче, советуем перейти к следующим, они могут помочь. Приглашаем участников, работающим над проектом, *обсуждать* с жюри все возникающие вопросы.

Особо успешным решателям вы выдаем *дополнительные задачи* для исследования.

1 Примеры суперпозиций и их определение

1.1. Расстановку чисел в клетках шахматной доски назовем *базисной*, если существуют такие числа $\varphi_1, \dots, \varphi_8$, $\psi_1, \dots, \psi_8$, что число в каждой клетке (i, j) равно $\varphi_i + \psi_j$.

(a) Любая ли расстановка базисна?

(b) Если расстановка базисна, то для любых клеток A, B, C, D, являющихся (в этом порядке) вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски, сумма чисел в клетках A, C равна сумме чисел в клетках B, D.

(c) Если расстановка базисна, то для любого замкнутого пути ладьи по доске, последовательные повороты которого происходят в клетках $A_1, \dots, A_{2n}$, сумма чисел в клетках $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$ равна сумме чисел в клетках $A_2, A_4 \dots, A_{2n}$.

(d) Верно ли утверждение, обратное к (b)?

1.2. (a) Для любой ли расстановки чисел в клетках шахматной доски существует такая функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что число в каждой клетке (i, j) равно $h(i + \sqrt{2}j)$?

(b) Для любой ли расстановки чисел в клетках шахматной доски существуют целые числа $\varphi_1, \dots, \varphi_8, \psi_1, \dots, \psi_8$ и функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых число в каждой клетке (i, j) равно $h(\varphi_i + \psi_j)$?

(c) Существуют ли такие целые числа $\varphi_1, \dots, \varphi_8, \psi_1, \dots, \psi_8$, что для любой расстановки чисел в клетках шахматной доски существует функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой число в каждой клетке (i, j) равно $h(\varphi_i + \psi_j)$?

(d) Существуют ли такие целые числа φ_{ik}, ψ_{ik}, $i, k = 1, \dots, 8$, что для любой расстановки чисел в клетках куба $8 \times 8 \times 8$ существует такая функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что число в клетке (i, j, k) равно $h(\varphi_{ik} + \sqrt{2}\psi_{jk})$?

Многочленом с коэффициентами в множестве $A \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}_q\}$ называется бесконечная последовательность $(a_0, \dots, a_n, \dots)$ чисел из As, среди которых лишь конечное количество ненулевых. Для $M \subset A$ поставим в соответствие многочлену (т.е. последовательности) $P = (a_0, \dots, a_n, \dots)$ функцию $\overline{P}$: $M \to M$, заданную формулой $\overline{P}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ (эта сумма конечна). Многочлен $P = (a_0, \dots, a_n, \dots)$ обычно записывают в виде $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, т.е. так же, как $\overline{P}$.

Для множества X обозначим $X^n = \{(x_1, \dots, x_n) \ : \ x_1, \dots, x_n \in X\}$.

1.3. Какие из следующих функций являются многочленами (точнее, соответствует некоторому многочлену)?

(a) $\sin x$ на $\mathbb{R}$; (b)* $\sin x$ на $[0, 1]$; (c)° $\sin x$ на $\{0, 1\}$; (d) $\sin x$ на $\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{8}{9}, 1\}$.

1.4. (a) Дайте 'определение' функции (отображения) $f : X \to Y$.

(b) Любая функция $\mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q$ 'является' многочленом для простого q.

(c) Любая функция $\mathbb{Z}_q^n \to \mathbb{Z}_q$ 'является' многочленом для простого q.

1.5. *Линией уровня* и *графиком* функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называются множества

$$f^{-1}(c) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x, y) = c\} \quad \text{и} \quad \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Нарисуйте линии уровня и графики следующих функций:
(a) расстояние до точки; (b) расстояние до прямой; (c) сумма расстояний до двух точек;
(d)* произведение расстояний до двух точек; (e) отношение расстояний до двух точек;
(f) $f(x,y)=x+y$; (g) $f(x,y)=xy$; (h) $f(x,y)=x/y$.
(В п. (e,h) функция задана на *подмножестве* плоскости.)

Определение суперпозиции. Пусть дано некоторое множество функций $F=\{f_\alpha(x_1,\dots,x_{n_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ (не обязательно конечное). Определим множество $\overline{F}$ *суперпозиций* функций из F как множество всех функций, которые можно получить из функций множества F и всех отдельных переменных x_j последовательностью следующих операций *элементарной суперпозиции*:

если уже получены функции $f(x_1,\dots,x_n)$, $g_1(\dots)$, $g_2(\dots)$, $\dots$, $g_n(\dots)$, то получить $f(g_1(\dots),\dots,g_n(\dots))$.

Здесь в качестве аргументов функций g_i можно брать любые, в том числе совпадающие, переменные. Множество значений каждой подставляемой функции должно лежать в области определения соответствующей переменной.

См. примеры суперпозиций в начале текста. Утверждение 1.4.c означает, что любая функция $\mathbb{Z}_q^n\to\mathbb{Z}_q$ является суперпозицией константы 1, сложения по модулю q и умножения по модулю q. Если множество F состоит из констант (то есть просто чисел, или функций без переменных), а также функций двух переменных 'сложение' и 'умножение': $f_1(x_1,x_2)=x_1+x_2$, $f_2(x_1,x_2)=x_1x_2$, то $\overline{F}$ состоит из всех многочленов $\sum\limits_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_n}x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$.

1.6. Верно ли, что
(a) xy является суперпозицией функций одной переменной?
(b) $x^3y+xy^2\in\overline{\{xy,x+y\}}$? (c) $xy\in\overline{\{x+y\}}$? (d) $xy\in\overline{\{x+y,x/n,x^n\}_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}}$?
(e) xy как функция $(0,+\infty)^2\to(0,+\infty)$ лежит в $\overline{\{x+y,2^x,\log_2 x\}}$?
(f) любая функция одной переменной лежит в $\overline{\{x+y,2^x,\log_2 x\}}$?
(g) $\sin x\in\overline{\{x+y,xy\}}$? (h) $\sin x\in\overline{\{x+y,xy,2^x\}}$? (i)* $\sin x\in\overline{\{x+y,xy,2^x\}\cup\{c\}_{c\in\mathbb{R}}}$?
(j) функция $g(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\frac{x_2}{x_3}}$ при $x_1>1,x_2,x_3>0$ лежит в $\overline{\{x_1-x_2,2^x,\log_2 x\}}$?

1.7. $(a)^\circ$ Из функций одной переменной нельзя получить суперпозициями функции большего числа переменных.
(b) Верно ли, что если множество F конечно или счетно, то и $\overline{F}$ конечно или счетно?

Обозначим через F_n множество *всех* функций $[0,1]^n\to[0,1]$, т. е. функций от n переменных.

1.8. (a) Существует инъекция $\alpha:[0,1]^2\to[0,1]$ (т.е. такое отображение, что $\alpha(x)\neq\alpha(y)$ при $x\neq y$).
(b) $F_2\subset\overline{F_1\cup\{\alpha\}}$. (c) $F_3\subset\overline{F_2}$.
(d) $F_n\subset\overline{F_{n-1}}$ для любого $n\geq 3$. (e) $F_n\subset\overline{F_1\cup\{\alpha\}}$ для любого n.

1.9. (a) Существуют ли функции $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2:[0,1]\to[-1,1]$ и $h_1,h_2:[-2,2]\to\mathbb{R}$, для которых при любых $x,y\in[0,1]$ выполнено $xy=h_1(\varphi_1(x)+\psi_1(y))+h_2(\varphi_2(x)+\psi_2(y))$?
(b) Существуют ли функции $\varphi,\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ и $h:[0,2]\to\mathbb{R}$, для которых при любых $x,y\in[0,1]$ выполнено $(x+1)(y+1)=h(\varphi(x)+\psi(y))$?

1.10. (a) $F_2\subset\overline{F_1\cup\{x+y\}}$.
(b) Для любой функции $f:[0,1]^2\to[0,1]$ найдутся такие функции $\varphi,h:[0,1]\to[0,1]$, что при любых $x,y\in[0,1]$ выполнено $f(x,y)=h(\varphi(x)+0.1\varphi(y))$.
(c) $F_n\subset\overline{F_1\cup\{x+y\}}$ для любого n.
(d) Для любых n и функции $f:[0,1]^n\to[0,1]$ найдутся такие функции $\varphi,h:[0,1]\to[0,1]$, что при любых $x_1,\dots,x_n\in[0,1]$ выполнено

$$f(x_1,\dots,x_n)=h\left(\varphi(x_1)+10^{-1}\varphi(x_2)+\dots+10^{1-n}\varphi(x_n)\right).$$

Итак, с помощью функций одной переменной и сложения можно получить любую функцию. Однако интереснее рассматривать 'порождающее' множество, в котором все функции *непрерывны* (см. определение в §3) или *бесконечно дифференцируемы*.

1.11. * **Теорема Колмогорова.** (a) *Любая непрерывная функция $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ (от n переменных) представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одной переменной и сложения.*

(b) *Для любой непрерывной функции $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ найдутся такие непрерывные функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5 : [0,1] \to [0,1]$, $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, что при любых $x, y \in [0,1]$ выполнено*

$$f(x,y) = h\left(\varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_1(y)\right) + \ldots + h\left(\varphi_5(x) + \sqrt{2}\varphi_5(y)\right).$$

(c) *Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Для любых n и непрерывной функции $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ найдутся такие непрерывные функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n+1} : [0,1] \to [0,1]$, $h : [0, 2^n] \to \mathbb{R}$, что при любых $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ выполнено*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{2n+1} h\left(\sqrt{p_1}\varphi_k(x_1) + + \ldots + \sqrt{p_n}\varphi_k(x_n)\right).$$

Указания к (a) приведены после промежуточного финиша.

2 Грубые оценки

Первые задачи этого пункта интересны не только как простейший способ разобраться в понятии непрерывной функции. Похожие задачи о конкретных, хотя и грубых, оценках, часто возникают и на олимпиадах, и в прикладной математике, и в теоретической математике.

В решении этих задач нельзя пользоваться функциями $\sqrt[n]{x}$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$ etc. без определения этих функций. Поскольку для их определения — например, для доказательства существования такого x, что $x^2 = 2$ — фактически нужно эти задачи решить. Исключение: если функция используется в условии, то ее можно использовать и в решении.

В этом цикле задач не будет необходима строгая теория действительных чисел. Можно пользоваться без доказательства (только) алгебраическими свойствами действительных чисел — в частности, свойствами неравенств — и следующими

принципом Архимеда: для любого вещественного числа есть большее него целое.

принципом вложенных отрезков: пересечение любой последовательности вложенных отрезков непусто.

(Эти принципы можно 'доказать', используя десятичную запись.)

2.1. Найдите хотя бы одно такое N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $a_n > 10^9$, если $a_n =$

(a) $\sqrt{n}$; (b) $n^2 - 3n + 5$; (c) $1,02^n$.

2.2. Неравенство Бернулли. $(1+x)^k \geq 1 + kx$ для любых $x \geq -1$ и целого $k \geq 1$.

2.3. Найдите хотя бы одну пару таких a и N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $|a_n - a| < 10^{-8}$, если $a_n =$

(a) $\dfrac{n^2 - n + 28}{n - 2n^2}$; (b) $\sqrt{5 + \dfrac{2}{n}}$; (c) $0,99^n$; (d) $\sqrt[n]{2}$; (e)* $\dfrac{n^9}{2^n}$.

2.4. Найдите хотя бы одну пару таких a и $\delta > 0$, чтобы для любого $x \in (-\delta, \delta)$ было выполнено $|f(x) - a| < 3 \cdot 10^{-9}$, если $f(x) =$

(a) $(x-3)^3$; (b) 3^{x-3}; (c) $\sin x$; (d) $\dfrac{\sqrt{1+x^5}}{\cos x - 2}$;

(e) корень уравнения $t^3 - tx + 1$, лежащий на $[-2, 0]$.

3 Непрерывные функции

Пусть $K = [0,1]$ или $K = [0,1]^2$. Функция $f : K \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in K$ с условием $|x-y| < \delta$ выполнено $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Здесь $|x-y|$ обозначает обычное евклидово расстояние. (Осторожно, для других множеств K определение непрерывности может быть другим!)

3.1. (a)-(e) Какие из функций задачи 2.4 непрерывны на $[0,1]$?

Примечание. Аналогично задачам 2.4.a и 3.1.a доказывается непрерывность функции $f(x) = x^n$ для любого целого $n > 0$. Из этого и теоремы о промежуточном значении вытекает, что для любого $a > 0$ существует такое x, что $x^n = a$. Это утверждение позволяет определить функцию $\sqrt[n]{x}$. Аналогично определяются другие обратные функции.

3.2. Какие из следующих функций непрерывны на $[0,1]^2$?
(a) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; (b) $f(x_1, x_2) = \lfloor x_1 + x_2 \rfloor$.

3.3. (a) Любая непрерывная функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ограничена, т.е. найдется такая константа M, что $|f(x)| < M$ для всех $x \in [0,1]$.

(b) Любая непрерывная функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

3.4. Обязательно ли непрерывны
(a) сумма; (b) произведение; (c) композиция;
(d) суперпозиция $f(g(x,y),z)$; (e)* произвольная суперпозиция
непрерывных функций $[0,1] \to [0,1]$, $[0,1]^2 \to [0,1]$ (в п. (d)), $[0,1]^n \to [0,1]$ (в п. (e))?

3.5. Верно ли, что непрерывная по каждой переменной функция непрерывна? Иными словами, существует ли функция $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, не являющаяся непрерывной, у которой все сечения (т.е. функции $f_y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ и $f_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, определенные формулой $f_y(x) := f(x,y)$ и $f_x(y) := f(x,y)$) непрерывны?

Те из приведенных выше (и ниже) задач, решением которых являются контрпримеры, далее не используются. Однако они необходимы для понимания контекста доказательства — чтобы Вы имели представление о том, чем воспользоваться точно не получится.

4 Равномерные пределы

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что для любого $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

4.1. (a) Для каждого $x \in (0,1)$ найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

(b) Существует ли такое $N > 0$, что для любых $x \in (0,1)$ и $n > N$ выполнено $|\frac{1}{1-x} - \sum\limits_{k=0}^{n} x^k| < 0.01$?

4.2. Обязательно ли непрерывны
(a) *поточечный предел* последовательности $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывных функций? Это функция $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ определена, если все эти пределы существуют.

(b) **равномерный предел** последовательности $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывных функций? Это такая функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое целое N, что для любых $n > N$ и $x \in [0,1]$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

4.3. (a) Постройте непрерывную сюръективную функцию $f : [0,1] \to [0,1]$, постоянную вне некоторого интервала длины 0.01.

(b) Постройте такую бесконечную последовательность непрерывных сюръективных функций $f_n : [0,1] \to [0,1]$, что
- $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n}$ для любого $x \in [0,1]$;

• для каждого n найдется семейство интервалов $I_{n,1}, \ldots, I_{n,s_n}$ суммарной длины меньше 2^{-n} такое, что f_n постоянна на каждом отрезке из дополнения $[0,1] - (I_{n,1} \cup \ldots \cup I_{n,s_n})$ до объединения интервалов семейства.

(c) Постройте непрерывную сюръективную функцию $f : [0,1] \to [0,1]$ такую, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется семейство интервалов $I_1, \ldots, I_n$ суммарной длины меньше ε такое, что f постоянна на каждом отрезке из дополнения $[0,1] - (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$ до объединения интервалов семейства.

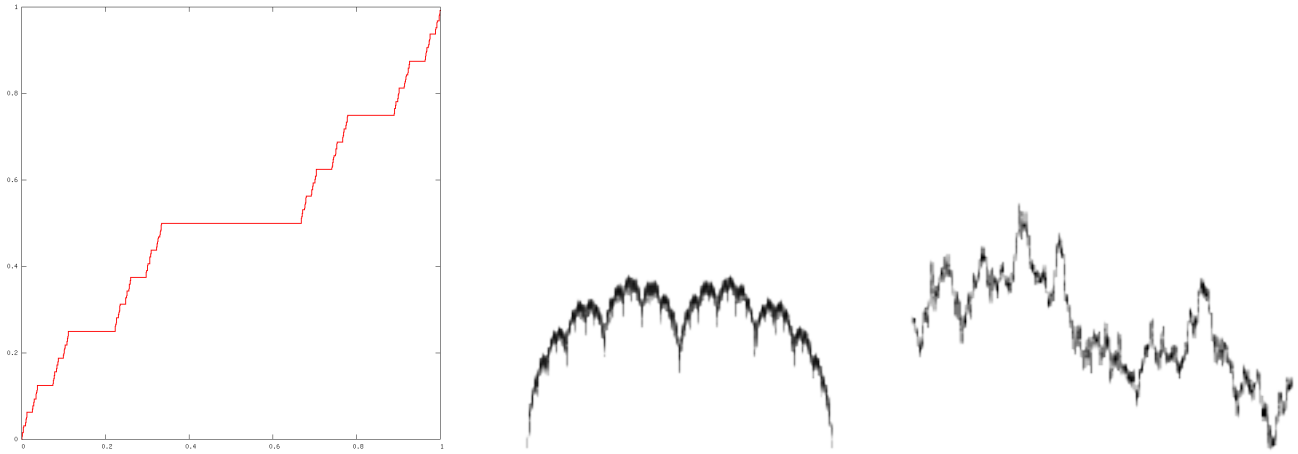


Рис. 1: Канторова лестница, пила Вейерштрасса и броуновское движение

4.4. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число $N > 0$, что для всех $m, n > N$ справедливо неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

(a) Является ли последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ фундаментальной? А последовательность $x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$?

(b) Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

(c) Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

(d) Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

(e) Всякая фундаментальная последовательность имеет конечный предел.

Если используемые в некоторой задаче термины не определены в этом тексте и вам незнакомы, то соответствующую задачу следует просто игнорировать.

4.5. * Существует непрерывная функция $f : [0,1] \to [0,1]$, не *дифференцируемая* ни в одной точке. (Такие примеры встречаются в физике при изучении *броуновского движения*.)

4.6. (a) Если функция $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ является равномерным пределом последовательности функций $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, каждая из которых не зависит от переменной y, то и функция f не зависит от переменной y.

(b)* Обозначим $K := [-1,1]^2 - [-1,0] \times 0$. Существует ли непрерывная функция $f : K \to \mathbb{R}$, *зависящая* от переменной y, но сужение которой на любой круг, лежащий в K, *не зависит* от переменной y?

5 Кривая Пеано

5.1. Предложение на русском языке в соответствии с некоторым правилом вписано в клетки таблицы. Найдите это правило и прочитайте предложение.

Т	С	Я	О	Л	О	К	Р
Е	А	В	Д	Ь	П	В	И
И	Т	К	Е	У	Д	О	И
Ч	Т	С	Т	М	И	Р	Ш
М	П	Е	О	А	О	Й	И
О	К	А	Н	Н	Н	А	Т
Т	И	Т	А	И	К	Л	Ь
А	М	Е	М	М	С	Н	К

5.2. Клетки квадрата $n \times n$ занумерованы натуральными числами от 1 до n^2 так, что соседние числа стоят в соседних клетках. Каждую клетку разбили на 4, получив новое разбиение исходного квадрата на $4n^2$ клеток. Докажите, что существует нумерация клеток нового разбиения такая, что соседние числа стоят в соседних клетках, а в квадрате 2×2, получившимся разбиением клетки исходного разбиения с номером k, стоят числа $4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k$.

5.3. Отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ называется *линейным*, если

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \text{для любых} \quad \lambda \in [0,1],\ x, y \in [a,b].$$

Отображение $f : [0,1] \to [0,1]^2$ называется *кусочно-линейным*, если существуют точки $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n = 1 \in [0,1]$ такие, что f линейно на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

(a) Существует такое кусочно-линейное отображение $F : [0,1] \to [0,1]^2$, что для любой точки $y \in [0,1]^2$, существует такая точка $x \in [0,1]$, что $|y - F(x)| < \frac{1}{100}$.

(b) Кусочно-линейное отображение $F : [0,1] \to [0,1]^2$ называется $d-$*плотным*, если для любой точки $y \in [0,1]^2$ существует такая точка $x \in [0,1]$, что $|y - F(x)| < d$. Докажите, что для любого $d-$плотного отображения F существует такое $d/2-$плотное отображение F^+, что $|F(x) - F^+(x)| < d$ для любого $x \in [0,1]$.

(c) Существует такое непрерывное отображение $F : [0,1] \to [0,1]^2$, что для любой точки $y \in [0,1]^2$ существует $x \in [0,1]$ такой, что $F(x) = y$.

5.4. (a) Пересечение любой последовательности вложенных прямоугольников на плоскости непусто.

(b)-(e) Решите задачи 4.4.(b)-(e) для последовательностей точек плоскости.

Указания, решения и ответы к задачам до промежуточного финиша

1.1. (a) Следует из (b).

(b) Пусть вершины квадрата имеют координаты $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_1), (i_2, j_2)$. Тогда сумма чисел в противоположных вершинах равна $\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \psi_{j_1} + \psi_{j_2}$.

(c) Аналогично (b).

(d) Утверждение верно.

1.2. (a) Докажите, что числа $i + \sqrt{2}j$ различны для разных клеток.

(b) (c) Аналогично (a).

(d) Да, $\varphi_{ik} = 9i + k$, $\psi_{jk} = 9j + k$.

1.3. (a) Докажите, что любой многочлен имеет лишь конечное число корней.

(b) Воспользуйтесь тождеством $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

(c) Рассмотрите многочлен $f(x) = x \sin 1$.

(d) Постройте многочлен, который равен нулю на всех точках из множества $\{0, \frac{1}{9}, \ldots, 1\}$, кроме данной.

1.4. (b,c) Получите функции, которые не равны нулю только при одном наборе переменных.

1.6. (a) Используйте задачу 1.7.a.

(c) $\overline{\{x + y\}} = \{ax + by \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a, b \geq 0\}$.

(d) $2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$.

(e) $xy = 2^{\log_2 x + \log_2 y}$.

(f) Используйте задачу 1.7.b.

(g) Используйте задачу 1.3.a.

1.7. (b) Докажите сначала, что множество элементарных суперпозиций над F не более, чем счетно.

1.8. Для каждого $x \in [0, 1]$ обозначим через $0.x_1x_2\ldots$ ту десятичную запись числа x для которой нет N такого, что $x_n = 0$ при любом $n > N$.

(a) Используйте десятичную запись. Конкретно, определим

$$\alpha : [0, 1]^2 \to [0, 1] \quad \text{by} \quad \alpha(x, y) := 0, x_1y_1x_2y_2x_3 \ldots.$$

Тогда α инъективно (но не биективно!).

(b,c,d) При данном $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$, достаточно найти $g \in F_n$ такую, что

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha(x_n, x_{n+1})).$$

Заметим, что $\alpha \in F_n$ при $n > 1$.

(e) Аналогично (a) постройте инъекцию $[0, 1]^n \to [0, 1]$.

Или (e) следует из (d) и (b) по индукции.

1.9. (a) $xy = (x + y)^2/4 - (x - y)^2/4$.

(b) $(x + 1)(y + 1) = 2^{\log_2(x+1) + \log_2(y+1)}$.

1.10. (a) следует из (b), (c) следует из (a) и 1.8.d.

(b) Конструкция функции α из решения задачи 1.8.a подходит: определим $\varphi(x) := 0.x_10x_20x_3\ldots$. Тогда $\alpha(x, y) = \varphi(x) + 0.1\varphi(y)$.

(d) Определим

$$\varphi(x) := 0.x_1 \underbrace{0000\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}} x_2 \underbrace{0000\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}} x_3 00\ldots$$

Определим $\alpha(x_1, \ldots, x_n) := \varphi(x_1) + 0.1\varphi(x_2) + \cdots + (0.1)^{n-1}\varphi(x_n)$. Тогда α инъективна. Следовательно, $h \in F_1$ существует для любой $f \in F_n$.

2.1. (b) $n^2 - 3n + 5 > n(n - 3) > n$ при любом $n > 4$.

(c) Воспользуйтесь задачей 2.2.

2.2. Воспользуйтесь индукцией по k.

2.3. (a) $a = -\frac{1}{2}$.

(b) $$\sqrt{5+\frac{2}{n}}-\sqrt{5} = \frac{\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}}+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5+\frac{2}{n}}+\sqrt{5}} = \frac{2}{n\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}}+\sqrt{5}\right)}$$

(c), (d) Положите $a = 0$, $a = 1$ и воспользуйтесь неравенством Бернулли.

(e) Положите $a = 0$ и найдите N такое, что $(n+1)^9/n^9 < 1,5$ при любом $n > N$.

2.4. (a) $|(x-3)^3 + 3^3| = |x((x-3)^2 - 3(x-3) + 3^2)| < 40|x|$ при $|x| < 1$, поскольку справедливы оценки $(x-3)^2 < 16$ и $|3(x-3)| < 12$.

(c) Воспользуйтесь неравенством $\sin x < x$.

(d) Если

$$|f(x)-a| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad x \in (-\delta_1, \delta_1) \quad \text{и} \quad |g(x)-b| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad x \in (-\delta_2, \delta_2),$$

$$\text{то} \quad |f(x)+g(x)-a-b| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in (-\min\{\delta_1,\delta_2\}, \min\{\delta_1,\delta_2\}).$$

То же справедливо с заменой суммы на разность. Аналогичные утверждения справедливы с заменой суммы на произведение или на частное.

3.2. (a) Функция $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ непрерывна.

Можно положить $\delta = \varepsilon$, тогда утверждение следует из неравенства треугольника $|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0|$.

(b) Функция f не является непрерывной.

Для $x = 1$, $y = 0$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ такого δ не существует, т.к. $|f(1,0) - f(1-\frac{\delta}{2}, 0)| = 1 > \frac{1}{2}$.

3.3. (a) По определению непрерывности (§3) существует такое N, что если $|x-y| < 1/N$, то $|f(x) - f(y)| < 1$. Тогда

$$|f(x)| < 1 + \max\left\{|f(0)|, \left|f\left(\frac{1}{N}\right)\right|, \ldots, \left|f\left(\frac{N-1}{N}\right)\right|, |f(1)|\right\}$$

для любого $x \in [0,1]$.

(b) Согласно (a) существует $\sup_{[0,1]} f$. Назовем подмножество $A \subset [0,1]$ *содержательным*, если $\sup_A f = \sup_{[0,1]} f$. Очевидно, что если отрезок $[a,b]$ содержательный, то хотя бы один из отрезков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ также содержательный. Теперь, начиная с отрезка $I_0 = [0,1]$ мы можем построить последовательность $\{I_n\}$ содержательных отрезков, для которой $I_{n+1} \subset I_n$ и $|I_n| = 2^{-n}$ при всех $n > 0$. Тогда f достигает своего максимального значения в точке пересечения $\bigcap_n I_n$ всех этих отрезков.

3.4. (a) Да. Возьмите $\delta = \varepsilon/2$.

(b) Да. По задаче 3.3.a существует такое $C > 0$, что $|f(x)|, |g(x)| < C$ для всех $x \in [0,1]$. Выберем $\delta > 0$ таким, что $\delta^2 + 2\delta C < \varepsilon$.

(c) Да. Покажем, что $f \circ g$ непрерывна. Для начала выберем δ_1 таким, что если $|x-y| < \delta_1$. то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Потом выберем δ таким, что если $|x-y| < \delta$, то $|g(x) - g(y)| < \delta_1$.

(d) Выберем такое $\delta_1 > 0$, что если $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и $|y_1 - y_2| < \delta_1$, то $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Выберем δ_2 таким, что если $|x_1 - x_2| < \delta_2$, то $|g(x_1) - g(x_2)| < \delta_1$. Возьмите $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

(e) Аналогично пункту (d).

3.5. Такая функция существует. Определим $f(x,y) = x/y$ для $x < y$, $f(x,y) = y/x$ для $y \leqslant x \neq 0$, and $f(0,0) = 0$. Эта функция не непрерывная, так как $f(\varepsilon, \varepsilon) - f(0,0) = 1$ для всех $\varepsilon > 0$.

4.1. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, потому что

$$\left|\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k\right| = \frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{(1-x)(1+(1/x-1))^n} < \frac{1}{(1-x)n(1/x-1)}$$

по неравенству Бернулли.

(b) Нет, потому что для любого n существует такое $x \in (0,1)$, что $\dfrac{x^n}{1-x} > 0.5$.

4.2. (a) Возьмем $f_n(x) = x^n$. Тогда $f(x) = 0$ для $x < 1$ и $f(1) = 1$.

(b) Да. Для каждого $\varepsilon > 0$ возьмем N такое, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для любого $n \geq N$. Выберем δ таким, что $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$. Тогда $|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$ при $|x - y| < \delta$.

4.3. (a) Положим $f(0) = f(0.99) = 0$, $f(1) = 1$. Доопределим f на $[0,1]$ кусочно-линейно.

(b) Постройте последовательность таких семейств отрезков I_k^i и кусочно-линейных функций $\{f_k\}$, что f_k — кусочно-линейная с 2^k+1 отрезками линейности I_k^i, постоянна на каждом нечетном отрезке I_k^{2i+1} и возрастает на каждом четном отрезке I_k^{2i}.

Возьмем f_1 линейной на отрезках $I_1^1 := [0, 0.499]$, $I_1^2 := [0.499, 0.501]$, $I_1^3 := [0.501, 1]$; $f(0) = f(0.499) = 0$, $f(0.501) = f(1) = 1$.

Определим I_{k+1}^i и f_{k+1} индуктивно. Если f_k постоянна на I_k^{2i+1}, то $I_{k+1}^{4i+1} := I_k^{2i+1}$ и $f_{k+1} := f_k$ на I_{k+1}^{4i+1}. Если f_k возрастает на $I_k^{2i} =: [t_1, t_2]$, то $f_{k+1}(x) := \dfrac{f(t_1) + f(t_2)}{2}$ для любого $x \in I_{k+1}^{4i-1} := [\dfrac{2t_1 + t_2}{3}, \dfrac{t_1 + 2t_2}{3}]$, и f_{k+1} линейна на отрезках $I_{k+1}^{4i-2} := [t_1, \dfrac{2t_1 + t_2}{3}]$ и $I_{k+1}^{4i} := [\dfrac{2t_1 + t_2}{3}, t_2]$.

(c) Для каждого $x \in [0,1]$ последовательность $\{f_k(x)\}$ ограничена. Из принципа вложенных отрезков следует, что у этой последовательности есть *предельная точка* — такое число $f(x)$, что для любых N и ε есть такой индекс $n > N$, что $f_n(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Эта функция $f(x)$ будет равномерным пределом последовательности $\{f_n\}$.

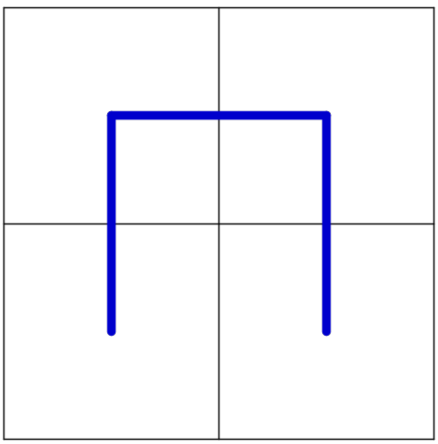
Другое доказательство — использование троичной записи.

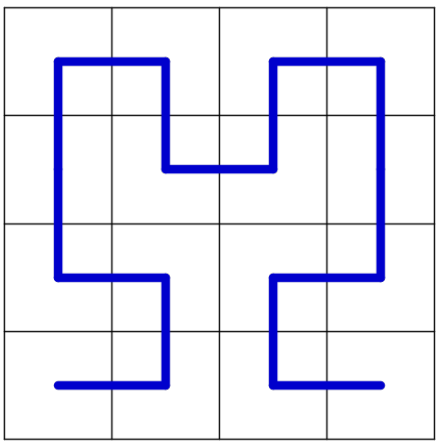
4.5. Например, *пила Вейерштрасса* $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(13^n \pi x)$, см. рис. 1.

Другое доказательство — использование теоремы Бэра.

5.1. Текст читается вдоль кривой, придуманной итальянским математиком Пеано.

5.2.





5.3. (a) Постройте требуемое отображение как ‘нумерацию’ клеток достаточно мелкого разбиения квадрата $[0,1]^2$ на n^2 клеток.

(b) Образ $F[0,1]$ отображения F – ломаная. Постройте F^+ так, чтобы его образ получался из $F[0,1]$ заменой каждого звена ломаной на ломаную, $d/2-$ плотную в d-окрестности этого звена.

(c) Постройте требуемое отображение как равномерный предел отображений, построенных в предыдущем пункте.

5.4. (a) Рассмотрите последовательность $a_i = (x_i, y_i)$ центров прямоугольников. Докажите, что любая ограниченная последовательность точек имеет *предельную точку*. Любая предельная точка последовательности a_i принадлежит каждому прямоугольнику.

6 Вывод теоремы Колмогорова из аппроксимативной версии

Наша цель — показать, что произвольная *непрерывная* функция от нескольких переменных представима в виде композиции *непрерывных* функций одного переменного и операции сложения. Займемся функциями двух переменных, заданными на единичном квадрате.

Хотя утверждение теоремы Колмогорова 1.11 формально не содержит предельного перехода, оно несложно сводится к аппроксимации произвольной непрерывной функции непрерывными функциями специального вида. Точнее, к аппроксимативной теореме Колмогорова 6.2.c. Благодаря последней произвольная непрерывная функция представляется в виде ряда, слагаемые которого имеют требуемый в теореме Колмогорова 1.11.b вид, а затем оказывается, что ряд можно сгруппировать.

Теперь мы переходим собственно к доказательству теоремы Колмогорова 1.11.b. Мы следуем доказательству, предложенному в работе [Ka] (см. также [He]) и основанному на сочетании оригинальных идей Колмогорова и теоремы Бэра.

Напомним, что $I := [0,1]$ и $I^2 := [0,1] \times [0,1]$.

Колмогоровским набором для функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$ называется набор непрерывных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_5 : I \to I$, $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, для которого при любых $x, y \in I$ выполнено

$$f(x,y) = h\left(\varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_1(y)\right) + \ldots + h\left(\varphi_5(x) + \sqrt{2}\varphi_5(y)\right).$$

6.1. Предъявите явно колмогоровский набор для функции $f(x,y) = x + \sqrt{2}y + 3$.

Мы не знаем явно заданного колмогоровского набора даже для таких простых функций, как сложение и умножение.

Пусть $f : I^2 \to \mathbb{R}$ — функция. Обозначим $|f| := \max_{z \in I^2} |f(z)|$. **Колмогоровским набором для f и числа** λ называется набор непрерывных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to I$, $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, для которого $|h| \le 2(1-\lambda)|f|$ и при любых $x, y \in I$ выполнено

$$\left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right) \right| \le \lambda |f|.$$

6.2. (a) Укажите колмогоровский набор для $f(x,y) = xy$ и $\lambda = 1/2$.

(b)* Для всякой непрерывной функции f и $\lambda = 5/6$ найдется колмогоровский набор.

(c)* **Аппроксимативная теорема Колмогорова.** *Существуют непрерывные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to \mathbb{R}$ такие, что для любой непрерывной функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$ и сколь угодно малого $\lambda > 0$ найдется функция $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, для которой набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h$ колмогоровский для f, λ.*

Доказать результаты (b,c) непросто, см. §7-§9. Сначала применим их.

Аппроксимативная теорема Колмогорова 6.2.c позволяет *приближать* всякую непрерывную функцию линейной комбинацией функций вида $h(\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y))$. Более того, 'внутренняя' функция φ не зависит от функции f. Именно это позволяет получить нужное представление (т.е. колмогоровский набор для f), сгруппировать слагаемые в некотором ряде, который естественно строится по колмогоровским наборам для f, λ.

6.3. Пусть набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h$ колмогоровский для f, λ, и

$$f_1(x,y) := f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right).$$

(a) Пусть набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h_1$ колмогоровский для f_1, λ. Тогда набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h + h_1$ колмогоровский для f, λ^2.

(b) Выведите аппроксимативную теорему Колмогорова из аналогичного ей утверждения, полученного заменой 'сколь угодно малого $\lambda > 0$' на '$\lambda = 5/6$'. Указание: $|f_1| \le \lambda |f|$.

(c) Выведите теорему Колмогорова 1.11.b из аппроксимативной теоремы Колмогорова.

7 Лемма об аппроксимации предколмогоровскими наборами

Предколмогоровским набором для функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$ называется упорядоченный набор непрерывных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to \mathbb{R}$, для которого существуют непрерывная функция $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, вместе с $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ образующая колмогоровский набор для f и $\lambda = 5/6$.

Аппроксимативная теорема Колмогорова 6.2.c 'для $\lambda = 5/6$' утверждает существование набора $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to \mathbb{R}$, являющегося предколмогоровским для любой непрерывной функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$. Такой набор будет построен также при помощи аппроксимации, или итерационного процесса (а формально — при помощи теоремы Бэра, см. §12).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — подмножество. Функции $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ называются **ε-близкими**, если $|\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ при любом $x \in M$. Упорядоченные наборы $(\varphi_1, \dots, \varphi_5)$ и $(\psi_1, \dots, \psi_5)$ функций $M \to \mathbb{R}$ называются **ε-близкими**, если φ_k, ψ_k являются ε-близкими при любом $k = 1, \dots, 5$.

7.1. * (a) **Лемма об устойчивости предколмогоровости.** Если $(\varphi_1, \dots, \varphi_5)$ предколмогоровский набор для функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ любой ε-близкий к $(\varphi_1, \dots, \varphi_5)$ набор также предколмогоровский для f.

(Иными словами, множество $PK(f)$ всех предколмогоровских наборов для f открыто в пространстве $C(I^2)^5$ упорядоченных пятерок непрерывных функций $I^2 \to \mathbb{R}$.)

(b) **Лемма об аппроксимации предколмогоровскими наборами.** Для любых $\varepsilon > 0$ и непрерывных функций $f : I^2 \to \mathbb{R}$, $\psi_1, \dots, \psi_5 : I \to \mathbb{R}$, существует ε-близкий к $(\psi_1, \dots, \psi_5)$ предколмогоровский набор для f.

(Иными словами, $PK(f)$ всюду плотно в $C(I^2)^5$.) Указания см. в §8.

8 Доказательство леммы об аппроксимации предколмогоровскими наборами

8.1. (a) Для любых чисел $\psi_1, \dots, \psi_8 \in I$ существуют такие числа $\varphi_1, \dots, \varphi_8 \in I$, что

• $|\psi_i - \varphi_i| < 0.01$ для любого $i = 1, \dots, 8$.

• для любой расстановки чисел в клетках шахматной доски существует такая непрерывная функция $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, что число в клетке (i,j) равно $h(\varphi_i + \sqrt{2}\varphi_j)$.

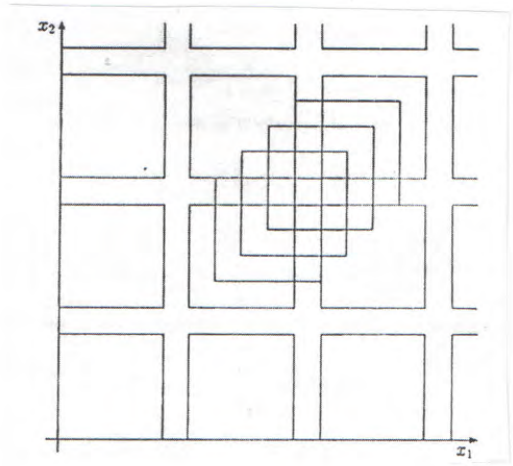
(b) Для любых чисел $\psi_{i,k} \in I$, $i,k = 1, \dots, 8$, существуют такие числа $\varphi_{i,k} \in I$, $i,k = 1, \dots, 8$, что

• $|\psi_{i,k} - \varphi_{i,k}| < 0.01$ для любых $i,k = 1, \dots, 8$.

• для любой расстановки чисел в клетках кубика $8 \times 8 \times 8$ существует такая непрерывная функция $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, что число в клетке (i,j,k) равно $h(\varphi_{i,k} + \sqrt{2}\varphi_{j,k})$.

8.2. (a) Для любой точки $x \in \mathbb{R}$ и для всех $k = 1, \dots 5$, кроме *не более, чем одного*, существует такое $j \in \mathbb{Z}$, что x лежит в отрезке $4I + 5j + k := [5j + k, 4 + 5j + k]$.

(b) Для любой точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ и для всех $k = 1, \dots 5$, кроме *не более, чем двух*, существуют такие $i,j \in \mathbb{Z}$, что (x,y) лежит в квадрате $(4I + 5i + k) \times (4I + 5j + k)$.



Приведем наглядную интерпретацию. Для каждого $k = 1, \dots, 5$ изобразим на плоскости указанные квадраты. Получим план k-го города с *кварталами* (квадратами) и *улицами* (промежутками между квадратами). Наложим друг на друга планы пяти городов. Всякая точка плоскости лежит внутри квартала хотя бы для трех таких карт.

(a',b') Сформулируйте и докажите аналог пунктов (a,b) с заменой 5 на произвольное целое положительное число.

Функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *рационально разделяет* данное семейство попарно непересекающихся отрезков на прямой, если она непрерывна, постоянна на каждом отрезке семейства, принимает на нем рациональное значение, причем на разных отрезках разные значения.

8.3. Если функция $\psi : I \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\varepsilon > 0$, то найдутся целое $N > 0$ и функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$, которая ε-близка к ψ и

(a) постоянна на каждом полуинтервале $\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right)$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

(b) непрерывна и линейна на каждом отрезке $\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

(c) рационально разделяет семейство отрезков $\frac{4I+5j}{N} := \left[\frac{5j}{N}, \frac{4+5j}{N}\right]$, $j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}$.

Функция $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}$ *разделяет* данное семейство попарно непересекающихся квадратов на плоскости, если она непрерывна, постоянна на каждом квадрате семейства, и на разных квадратах принимает разные значения.

8.4. Пусть функция $\varphi : [0, 1000] \to \mathbb{R}$ рационально разделяет семейство отрезков $4I + 5j := [5j, 4 + 5j]$, $j \in \{1, \dots, 100\}$. (Определение аналогично случаю $\varphi : I \to \mathbb{R}$.)

(a) Функция $\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y)$ разделяет семейство квадратов $(4I + 5i) \times (4I + 5j)$, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$. (Определение аналогично случаю $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}$.)

(b) Для любого набора $v_{i,j}$ чисел, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$, существует непрерывная функция $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$, для которой

- $|h(x)| \le \max_{i,j} |v_{ij}|$ при любом $x \in [0, 3]$.
- $h(\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y)) = v_{i,j}$ при любых $i, j \in \{1, \dots, 100\}$, $x \in 4I + 5i$, $y \in 4I + 5j$.

8.5. Пусть для каждого $k \in \{1, \dots, 5\}$ функция $\varphi_k : [0, 1000] \to I$ рационально разделяет семейство отрезков $4I + 5j + k := [5j + k, 4 + 5j + k]$, $j \in \{1, \dots, 100\}$, причем числа $\varphi_k(5j + k)$ различны для различных пар (j, k). Тогда для любого набора $v_{k,i,j}$ чисел, $k \in \{1, \dots, 5\}$, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$, существует непрерывная функция $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$, для которой $h(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)) = v_{k,i,j}$ при любых

$$k \in \{1, \dots, 5\}, \quad i, j \in \{1, \dots, 100\}, \quad x \in 4I + 5i, \quad y \in 4I + 5j.$$

8.6. Пусть $f : I^2 \to \mathbb{R}$ — функция. Выберем целое $N > 0$, $N \equiv 4 \mod 5$, для которого

$$|f(z) - f(z')| < \frac{|f|}{6} \quad \text{для любых} \quad i, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}, \quad z, z' \in \frac{4I+5i}{N} \times \frac{4I+5j}{N}.$$

Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to I$ разделяют семейство отрезков $\frac{4I+5j}{N}$, $j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}$.

(a) Если $h : [0, 3] \to \left[-\frac{|f|}{3}, \frac{|f|}{3}\right]$ непрерывная функция и

$$h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right) = \frac{1}{3} f\left(\frac{5i+k}{N}, \frac{5j+k}{N}\right) \quad \text{для любых}$$

$$k = 1, \dots, 5, \quad i, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}, \quad x \in \frac{4I+5i}{N}, \quad y \in \frac{4I+5j}{N},$$

то набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h$ является 5/6-колмогоровским для f.

(b) Набор $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ является предколмогоровским для f.

13Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ФУНКЦИЙ

Указания, решения и ответы к задачам после промежуточного финиша

Для функции $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ обозначим

$$\widetilde{\varphi}(x,y) := \varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y) \quad \text{и} \quad z = (x,y).$$

6.1. Возьмем $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \varphi_3(x) = \varphi_4(x) = \varphi_5(x) = 0$, $h(x) = x + \frac{3}{5}$.

6.2. (b,c) Следует из утверждений 9.1.b и 9.2.ac.

6.3. (b) Имеем $|h + h_1| < 2|f|(1 - \lambda + \lambda(1-\lambda)) = 2|f|(1-\lambda^2)$ и

$$\Big|f(z) - \sum_{k=1}^{5}(h+h_1)(\widetilde{\varphi}_k(z))\Big| = \Big|f_1(z) - \sum_{k=1}^{5} h_1(\widetilde{\varphi}_k(z))\Big| \le \lambda|f_1| \le \lambda^2|f|.$$

(c) Продолжая процедуру из (b), получаем аппроксимационную теорему Колмогорова для $\lambda = (5/6)^{2^n}$.

(d) Продолжая процедуру из (b), строим последовательность функций $h_n : [0,3] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\Big|f - \sum_{k=1}^{5}(h_0 + h_1 + \ldots + h_n)(\widetilde{\varphi}_k(z))\Big| \le \Big(\frac{5}{6}\Big)^{n+1}|f| \quad \text{и} \quad |h_n| \le \frac{1}{3}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{n}|f|$$

для любого n. Ввиду второго неравенства ряд $\sum_n h_n$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции h. Устремляя $n \to \infty$ в первом неравенстве, получаем $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{5} h(\widetilde{\varphi}_k(z))$.

7.1. (b) Используя утверждение 8.3.c, найдем достаточно большое $N \equiv 4 \mod 5$ и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ такие, что для каждого k функция φ_k мало отличается от ψ_k и разделяет семейства отрезков

$$\frac{4I + 5j + k}{N}, \quad j = 1, \ldots, \frac{N-4}{5}.$$

Аналогично утверждению 8.5 найдем непрерывную функцию $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ так, что

$$h(\widetilde{\varphi}_k(x,y)) = \frac{1}{3} f\left(\frac{5i+k}{N}, \frac{5j+k}{N}\right)$$

при любых

$$k = 1, \ldots, 5, \quad i,j = 1, \ldots, \frac{N-4}{5}, \quad x \in \frac{4I+5i+k}{N}, \quad y \in \frac{4I+5j+k}{N}.$$

Увеличивая N (т. е. уменьшая квадраты) можно добиться выполнения условия задачи 8.6. Теперь лемма вытекает из утверждения 8.6.b.

8.1. (a) Положим $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ попарно различными рациональными числами, 0.01-близкими к $\psi_1, \ldots, \psi_8$ (т.е. $|\psi_i - \varphi_i| < 0.01$ для всех i). Если для рациональных p, q, s, t выполнено $p + \sqrt{2}q = s + \sqrt{2}t$, то $p = s$ и $q = t$. Тогда $\varphi_i + \sqrt{2}\varphi_j$ — различные числа при разных (i,j). Определим $h(\varphi_i + \sqrt{2}\varphi_j)$ как число в клетке (i,j), и продолжим h кусочно-линейно на $\mathbb{R}$.

(b) Пусть $\varphi_{i,k}$ таковы, что $|\psi_{i,k} - \varphi_{i,k}| < \varepsilon$. Тогда из равенства $\varphi_{i,k} + \sqrt{2}\varphi_{j,k} = \varphi_{s,m} + \sqrt{2}\varphi_{t,m}$ следует, что $(i,k) = (s,m)$ и $(j,k) = (t,m)$, а значит $(i,j,k) = (s,t,m)$.

8.2. (a) Положим $m = [x/5]$ и $r = [x] \mod 5$. Тогда $x \in [5m + r, 5m + r + 1)$. Значит, $x \in [5m + (r-s), 5m + (r-s+4)]$ для любого $s \in \{0,1,2,3\}$.

(b) Следует из (a).

8.3. (c) Выберем N таким, что для всех $x, y \in I$ неравенство $|x-y| < 5/N$ влечет $|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon/4$. Пусть q_j, $j \in \mathbb{Z}$ — попарно различные рациональные числа такие, что $|q_j - \psi(x)| < \varepsilon/3$ для всех $j \in \left\{0, 1, \ldots, \dfrac{N-4}{5}\right\}$ и $x \in \dfrac{4I+5j}{N}$. Определим $\varphi(x) = q_j$ при $x \in \dfrac{4I+5j}{N}$, и продолжим φ кусочно-линейно на I. Тогда $|\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in I$.

8.4. (b) Обозначим через $\alpha_{i,j} := \varphi_i(x) + \sqrt{2}\varphi_j(y)$ для некоторых $x \in 4I+5i$ и $y \in 4I+5j$. Если $\alpha_{i,j} = \alpha_{k,l}$, то $(i,j) = (k,l)$. Определим $h(\alpha_{i,j}) = v_{i,j}$, и продолжим h кусочно-линейно на $\mathbb{R}$.

8.5. Аналогично 8.4.b.

8.6. (b) Следует из (a).

9 Вывод аппроксимативной версии из леммы об аппроксимации

Для $M \in \{I, I^2\}$ обозначим через $C(M)$ множество непрерывных функций $M \to \mathbb{R}$.

9.1. (a) В $C(I)$ имеется счетное всюду плотное множество функций

(b) В $C(I^2)$ имеется счетное всюду плотное множество функций.

9.2. Пусть $f_l : I^2 \to \mathbb{R}$ — всюду плотный в $C(I^2)$ набор функций.

(a) Каждый набор из $\bigcap_{l=1}^{\infty} PK(f_l)$ является предколмогоровским для любой непрерывной функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Для пространства $C(I^2)^5$ справедлив принцип вложенных шаров — и, как следствие, теорема Бэра (§12). (Т.е. $C(I^2)^5$ — *полное метрическое пространство.*)

(c) $\bigcap_{l=1}^{\infty} PK(f_l) \neq \emptyset$. (Указание: примените теорему Бэра.)

Список литературы

[Ar57] *В.И. Арнольд,* О представимости функций двух переменных в виде $\chi(\varphi(x)+\psi(y))$. УМН, 1957, т.12, в. 2(74), с. 119–121.

[Ar58] *В. И. Арнольд,* О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных, Мат. Просвещение, Сер. 2, вып. 3, (1958), 41–61. http://ilib.mccme.ru/djvu/mp2/mp2-3.htm

[BB] *W. Blaschke und L. Bol,* Geometrie der Gewebe. Berlin, 1938.

[Bu] A.R. Butz, Space filling curves and mathematical programming, Information and Control, 12:4 (1968) 314-330, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019995868903677

[FG] *Z. Feng, P. Gartside,* On Hilbert's 13th Problem, http://arxiv.org/abs/0909.4561

[He] *T.Hedberg,* The Kolmogorov superposition theorem, Appendix II to H.S. Shapiro, Topics in Approximation Theory. Lecture Notes in Math., 1971, V. 187, P. 267–275.

[Ka] *J.-P. Kahane,* Sur le theoreme de superposition de Kolmogorov, J. Approximation Theory 13 (1975), 229-234.

[KF] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[Ox] *J. Oxtoby,* Measure and category, Springer, 1971. Рус. перевод: *Дж. Окстоби.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.

[Re] *I. Reshetnikov,* Decomposition of number arrangements in the cube, in Russian. https://arxiv.org/abs/1412.8078

[Sk10] *А. Скопенков*, Базисные вложения и 13-я проблема Гильберта, Мат. Просвещение, 14 (2010), 143–174. http://arxiv.org/abs/1001.4011 Abridged English translation: http://arxiv.org/abs/1003.1586

[Sk12] *А. Скопенков,* Объемлемая однородность, МЦНМО, Москва, 2012, http://arxiv.org/abs/1003.5278

[Th] *G. Thomsen,* Un theoreme topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica sulle superficie isotermo-asintotiche. Bull. Un. Mat. Ital. Bologna, 1927, V. 6, P. 80–85.

[VK] *И.А. Вайнштейн и М.А. Крейнес,* О последовательностях функций вида $f(X(x)+Y(y))$. УМН, 1960, т.15, в. 4(94), с. 123–128.

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. Изд-во МЦНМО, 2016. http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf

ЗАДАЧИ ЗАОЧНОГО КОНКУРСА

К заочному конкурсу относятся также те из вышеприведенных задачи, к которым не приведено полных решений (даже если приведены указания).

Для решения следующих задач полезно прорешать §§1-§3, но не требуется прорешивать другие параграфы.

10 Суперпозиции и кривая Пеано

10.1. (c) Множество $\overline{F}$ — минимальное по включению множество, содержащее F и переменные, 'замкнутое' относительно операции элементарной суперпозиции.

(d)* Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — бесконечная последовательность функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажите, что существует конечный набор функций F такой, что что все функции $g_1, g_2, \ldots$ являются суперпозициями функций из F. (Московская математическая олимпиада.)

10.2. (c) Обозначим через $f[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ образ отрезка $[0,1]$ при непрерывном отображении $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Докажите, что любая непрерывная функция $g : f[0,1] \to \mathbb{R}$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений.

(d) **Теорема о промежуточном значении.** Для непрерывной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и чисел $0 \le a < b \le 1$, если $f(a) > 0 > f(b)$, то существует такое $c \in (a,b)$, что $f(c) = 0$.

(e) Обязательно ли непрерывна функция $f : [0,1] \to [0,1]$, обратная к строго монотонной непрерывной?

(b) Существуют ли функции $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 : [0,1] \to [0,1]$ и $h : [0,2] \to [0,1]$, для которых при любых $x, y \in [0,1]$ выполнено $xy = h\left(\varphi_1(x) + \psi_1(y)\right) + h\left(\varphi_2(x) + \psi_2(y)\right)$?

(b) No. Suppose that such functions exist. Since h is a nonnegative function, $h(\varphi_1(x) + \psi_1(y)) = 0$ if $xy = 0$. Hence $h = 0$ on some neighborhood (or semi-neighborhood) of $\varphi_1(0)+\psi_1(0)$. Then for some $\varepsilon > 0$ we have $h(\varphi_1(x) + \psi_1(y)) = 0$ whenever $0 < x, y < \varepsilon$. И шо???

10.3. Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле по одному разу и сделать

(а) наименьшее число поворотов? (б) наибольшее число поворотов?

10.4. Клетки квадрата $n \times n$ занумеровали числами от 1 до n^2 так, что соседние числа находятся в соседних по сторонам клетках. Докажите, что найдутся два числа в соседних клетках, отличающиеся больше, чем на $n/2$.

11 Представимость простейшими суперпозициями

Здесь мы обсудим приближение непрерывной на квадрате функции функциями вида $\varphi(x)+\psi(y)$ и $h(\varphi(x) + \psi(y))$. Формально, этот пункт не используется в дальнейшем.

11.1. Функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ называется **базисной**, если существуют непрерывные функции $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, для которых при любых $x, y \in [0,1]$ выполнено

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

(a) Является ли базисной функция $f(x,y) = xy$?

(b) Если функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ базисна, то для любых точек A, B, C, D, являющихся (в этом порядке) вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, $f(A) + f(C) = f(B) + f(D)$.

(c) Опишите все базисные функции.

(d) Линия уровня любой базисной функции не содержится в множестве $u^{-1}(1, 5/4)$, где

$$u(x,y) := (x+y)^2 + \frac{(x-y)^2}{4}.$$

(e)* Равномерный предел последовательности базисных функций базисный.

11.2. * (a) Расстановку чисел в клетках куба $8\times8\times8$ назовем *базисной*, если существуют такие числа $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$, $i = 1, \dots, 8$, что число в каждой клетке (i, j, k) равно $\varphi_i + \psi_j + \theta_k$.

Опишите все базисные расстановки. (Здесь «описать» означает найти «красивый» критерий базисности, или «быстрый» алгоритм проверки базисности.)

(b) Функцию $f : I^3 \to \mathbb{R}$ назовем *базисной*, если существуют такие непрерывные функции $\varphi, \psi, \theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$, что при любых $x, y \in [0, 1]$ выполнено $f(x, y, z) = \varphi(x) + \psi(y) + \theta(z)$.

Опишите все базисные функции.

Функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ (двух переменных) называется **пробазисной**, если существуют непрерывные функции $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ и $h : [0, 2] \to \mathbb{R}$, для которых при любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(x, y) = h(\varphi(x) + \psi(y)).$$

11.3. (a) Является ли пробазисной функция $f(x, y) = (x + 1)(y + 1)$?

(b)* Является ли пробазисной функция $f(x, y) = xy$?

(c) Функция $f : I^2 \to [0, 1]$, $f(x, y) = xy$, является равномерным пределом последовательности пробазисных функций.

11.4. (a) Если три вершины квадрата со сторонами, параллельными осям координат, лежат на одной линии уровня пробазисной функции, то и четвертая вершина лежит на этой линии уровня.

(b) Любая пробазисная функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ *молниеносна*, т.е. $f(A) = f(F)$ для любого шестиугольника $ABCDEF$, у которого

- вершины A и B, C и F, D и E имеют одинаковые абсциссы,
- вершины A и D, B и C, F и E имеют одинаковые ординаты,
- $f(B) = f(E)$ и $f(C) = f(D)$.

(c)* **Теорема Г.Томсена.** [Th], [BB], [VK] *Непрерывная и монотонная по каждому аргументу функция $f : I^2 \to \mathbb{R}$ является пробазисной (т.е. представима в виде $h(\varphi(x) + \psi(y))$, где h, ψ, φ – непрерывные функции), тогда и только тогда, когда она молниеносна (см. задачу 11.1.b).*

(d)* Если функция $f : [-2, 2]^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна и $f^{-1}(0) = u^{-1}(1) \cap [-2, 2]^2$, то найдется число $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что для всякой пробазисной функции $g : [-2, 2]^2 \to \mathbb{R}$ и некоторых $x, y \in [-2, 2]$ выполнено неравенство $|f(x, y) - g(x, y)| > \delta$.

(e) Существует непрерывная функция $f : [-2, 2]^2 \to \mathbb{R}$ такая, что $f^{-1}(0) = u^{-1}(1) \cap [-2, 2]^2$.

Существуют непрерывные функции $f(x, y)$, которые нельзя приблизить функциями вида $h(\varphi(x) + \psi(y))$ (т.е. пробазисными), см. задачу 11.4.de. Если же допустить *конечные линейные комбинации* функций $h(\varphi(x) + \psi(y))$, то возможно и приблизить, и даже представить, произвольную непрерывную функцию, см. теорему Колмогорова 1.11.b.

12 Принцип вложенных отрезков, или примени теорему Бэра о категории

Этот цикл задач посвящен теореме Бэра о категории — мощному средству доказательства теорем существования в анализе и топологии. С помощью нее удобно доказывать, например, теорему Колмогорова о суперпозициях. См. подробнее [KF, Ox], [Sk12, §2].

Здесь можно пользоваться без доказательства принципом вложенных отрезков.

12.1. (a) Пусть объединение открытых интервалов $U \subset \mathbb{R}$ неограничено. Докажите, что существует такое x, что $nx \in U$ для бесконечно большого количества целых n. (Задача предлагалась на летних сборы команды СССР на международную олимпиаду в 1989.)

(b)* Дана бесконечно дифференцируемая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем для любого x существует такое целое N_x, что $f^{(n)}(x) = 0$ для любого $n > N_x$. Докажите, что f — многочлен.

Напомним, что подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется

- *открытым*, если для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$;
- *всюду плотным*, если для любых $a, b \in \mathbb{R}$ пересечение $(a, b) \cap U$ непусто.

12.2. (a) На прямой имеется счетное всюду плотное множество точек.

(b) На плоскости имеется счетное всюду плотное множество точек U (т.е. для любого круга $K \subset \mathbb{R}^2$ пересечение $K \cap U$ непусто).

12.3. (a) **Теорема Бэра о категории**. *Пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств прямой является всюду плотным (и, в частности, непустым).*

(b) Если прямая $\mathbb{R}$ является объединением не более чем счетного набора замкнутых множеств, то хотя бы одно из них имеет внутреннюю точку.

(c) Прямая $\mathbb{R}$ не является счетным множеством.

(d) Множество иррациональных чисел не являются объединением счетного набора замкнутых множеств.

12.4. Если функция $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ двух переменных непрерывна по каждой переменной, то она имеет точку непрерывности. (Ср. с задачей 3.5.)

12.5. (a) Не существует функции, множество точек разрыва которой совпадает с множеством иррациональных чисел.

(b) Поточечный предел последовательности $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывных функций (т. е. функция $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$) имеет точку непрерывности.

(c) Производная любой дифференцируемой функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет точку непрерывности.

12.6. Прямая не представима в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых отрезков, каждый из которых отличен от точки.

12.7. (a) Существует непрерывное инъективное отображение *ожерелья Антуана* (см. википедию) в прямую $\mathbb{R}$.

(b)* Дано замкнутое ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{R}^2$. Известно, что для любых двух точек $x, y \in A$ существует разбиение $A = X \sqcup Y$ на замкнутые множества, для которого $x \in X$ и $y \in Y$ (такие множества A называются *нульмерными*). Докажите, что существует непрерывное инъективное отображение (т. е. *вложение* или реализация) $a\colon A \to \mathbb{R}$.

13TH HILBERT PROBLEM ABOUT SUPERPOSITIONS OF FUNCTIONS [1]

Problems before the Semifinal

A. Belov, [2] I. Mitrofanov, A. Skopenkov, [3] A. Chilikov, [4] S. Shaposhnikov [5]

presented by A. Belov, A. Skopenkov, S. Usov,[6] A. Chilikov

What is this collection of problems about

This project is devoted to several classical results and methods in pure mathematics. They are also interesting from the point of view of computer science (related to combinatorial geometry and coding theory).

Suppose there are several functions. Then some of them may be used as arguments of others. This operation is called *superposition*. For example,

- function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2y+y^2$ is a superposition of $x+y$ and xy;
- function $f:\mathbb{Z}_2^2\to\mathbb{Z}_2$, $f(x,y)=x\oplus y=x$ XOR y is a superposition of $\overline{x}$, $x\vee y$ and $x\wedge y$;
- function $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=g\Big(g\big(\sin x+y,g(y,x^2,z),x\big),x,x\Big)$ is a superposition of $g(x,y,z),x+y,\sin x,x^2$.

The explicit definition is provided at the beginning of §1. Superpositions are important objects in analysis, topology, and computer science. General problem is the following: when given function of several variables may be represented as a superposition of functions of less number of variables? The answer depends on considered class of functions (see [ZSS, п. 21.5 'Superpositions of Boolean functions'], [Ar58]).

We are going to demonstrate most important ideas of solution of the general problem for continuous functions, i.e. the proof of A. N. Kolmogorov's Theorem 1.11 (this is a solution of 13th D. Hilbert's Problem). These ideas will be demonstrated on the «olympiade» examples. These examples are simplest particular cases which are free from technical details. As a result this collection of problems is accessible for beginners although it contains beautiful and complicate results.

No specific knowledge is required to solve these problems. All necessary definitions are presented here. But you would need some cleverness and mathematical culture (which will be imporoved as a result of solving these problems). In particular, this collection of problems is analytic. However only minimal knowledge of mathematical analysis is required for many problems. Main ideas for solution are demonstrated on discrete versions of problem. As a result the solving of these problems assists to develop analytical experience and intuition.

We are going to propose several beautiful problems for further research. Some well-known exapmles from «continuous» mathematics (Weierstrass function, Peano curve) are useful in physics and computer science. We believe that similar but less known ideas of Kolmogorov's Theorem will also be useful.

Conventions

If a problem is a statement then a proof of this statement is required in this problem. Basic problems are marked with a circle (like 5°). We do not recommend to try other problems of the same section before you solve basic problems. If the problem is marked with a star (like 5*) then it is more complicated. You can postpone its solution until solving of other problems.

[1] We thank S. Dorichenko and G. Chelnokov for their useful remarks, I. Reshetnikov for choosing a set of problems about Peano curve, and R. Sadykov for writing hints for some basic problems.

[2] Moscow Physical Technical Institute, Moscow Institute of Open Education.

[3] A. Skopenkov: Independent University of Moscow, Moscow Physical Technical Institute; www.mccme.ru/~skopenko; supported by the Grant of the «Dynasty» foundation by D. Zimin and the Russian Foundation for Basic Research Grant No. 15-01-06302.

[4] Bauman Moscow State Technical University

[5] National Research University Higher School of Economics

[6] Dostoevsky Omsk State University

for every solution which has been written down and marked with either '+' or '+.'.

For every solution which has been written down and marked with either '+' or '+.' a student (or a group of students) get a "bean". The jury may also award extra bean for beautiful solutions, solutions of hard problems, or (some) solutions typeset in TEX. The jury has infinitely many bean. One may submit a solution in the oral form, but one loses a bean with each 5 attempts (successful or not).

If you are stuck on a certain problem we suggest to try looking at the next ones. They may turn out to be helpful. We suggest to all the students working on the project to *consult* the jury on any questions on the project. Students who brilliantly work on the project will get several *extra problems*.

1 Definition and examples of superposition

1.1. An arrangement of numbers on the chessboard is called *basic* if there are numbers $\varphi_1, \dots, \varphi_8$, $\psi_1, \dots, \psi_8$ such that number at the square (i, j) is equal to $\varphi_i + \psi_j$ for each square on the chessboard.

(a) Is any arrangement basic?

(b) Suppose the arrangement is basic. Then, for any squares A, B, C, D such that $ABCD$ is a rectangle and whose sides are parallel to board sides, the sum of numbers in A and in C is equal to the sum of numbers in B and in D.

(c) Suppose the arrangement is basic. Then, for any closed route of a rook on board with sequential turns at squares $A_1, \dots, A_{2n}$, the sum of numbers at squares $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$ is equal to the sum of numbers at squares $A_2, A_4 \dots, A_{2n}$.

(d) Is the converse of the statement (b) true?

1.2. (a) Is it true that for any arrangement of numbers on the chessboard there exists a function $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the number at the square (i, j) is equal to $h(i + \sqrt{2}j)$ for each square on the chessboard?

(b) Is it true that for any arrangement of numbers on the chessboard there are integers $\varphi_1, \dots, \varphi_8, \psi_1, \dots, \psi_8$ and a function $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the number at the square (i, j) is equal to $h(\varphi_i + \psi_j)$ for each square on the chessboard?

(c) Are there integers $\varphi_1, \dots, \varphi_8, \psi_1, \dots, \psi_8$ such that for any arrangement of numbers on the chessboard there exists a function $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the number at the square (i, j) is equal to $h(\varphi_i + \psi_j)$ for each square on the chessboard?

(d) Are there integers φ_{ik}, ψ_{ik}, $i, k = 1, \dots, 8$ such that for any arrangement of numbers in the cube $8 \times 8 \times 8$ there is a function $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the number in the cell (i, j, k) is equal to $h(\varphi_{ik} + \sqrt{2}\psi_{jk})$ for each cell in the cube?

Let A be $\mathbb{R}$ or $\mathbb{Z}_q$ and $M \subset A$. *A polynomial with coefficients in the set* A is an infinite sequence $(a_0, \dots, a_n, \dots)$ of numbers from A such that only finitely many of a_n are nonzero. For any polynomial (i.e. the sequence) there is corresponding function $\overline{P}\colon M \to M$ which is defined as $\overline{P}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ (this sum is finite). The polynomial $P = (a_0, \dots, a_n, \dots)$ is denoted by $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

For any set X we denote $X^n = \{(x_1, \dots, x_n) \ : \ x_1, \dots, x_n \in X\}$.

1.3. Which functions are polynomials (more precising, correspond to some polynomial)?

(a) $\sin x$ on $\mathbb{R}$; (b)* $\sin x$ on $[0, 1]$; (c)° $\sin x$ on $\{0, 1\}$; (d) $\sin x$ on $\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{8}{9}, 1\}$.

1.4. (a) Give the 'definition' of function (mapping) $f : X \to Y$.

(b) Any function $\mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q$ is a polynomial for a prime q.

(c) Any function $\mathbb{Z}_q^n \to \mathbb{Z}_q$ is a polynomial for a prime q.

1.5. A *level line* and a *graph* of function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are sets

$$f^{-1}(c) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x, y) = c\} \quad \text{и} \quad \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

correspondingly. Draw level lines and graphs for following functions:
(a) the distance to the point; (b) distance to the line; (c) the sum of distances to two points;
(d)* the product of distances to two points; (e) the quotient of distances to two points;
(f) $f(x,y)=x+y$; (g) $f(x,y)=xy$; (h) $f(x,y)=x/y$.
(In (e,h) function is defined in the *subset* of plain.)

Definition of superposition. Suppose $F=\{f_\alpha(x_1,\dots,x_{n_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ is the set of functions (not necessarily finite). Then the set $\overline{F}$ of *superpositions* of functions from F is the set of all functions which may be constructed from elements of F and all variables x_j by the sequence of *elementary superpositions*. The operation of *elementary superpositions* is the following:

if we already have a functions $f(x_1,\dots,x_n)$, $g_1(\dots)$, $g_2(\dots)$, $\dots$, $g_n(\dots)$ we can take $f(g_1(\dots),\dots,g_n(\dots))$.

Any variables can be used as arguments of g_i. Variables may be coinciding. The range of the internal function g_i which is used as argument must be subset of the domain of external function f.

Examples of superpositions are provided at the beginning of the text. The statement 1.4.c means that any function $\mathbb{Z}_q^n\to\mathbb{Z}_q$ is a superposition of the constant 1, the addition modulo q, and the multiplication modulo q. If the set F contains constants (i.e. numbers, or functions without arguments) and the addition and multiplication of two variables then $\overline{F}$ contains all polynomials $\sum\limits_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_n}x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$.

1.6. Is it true that
(a) xy is a superposition of functions of one variable?
(b) $x^3y+xy^2\in\overline{\{xy,x+y\}}$? (c) $xy\in\overline{\{x+y\}}$? (d) $xy\in\overline{\{x+y,x/n,x^n\}_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}}$?
(e) xy as a function $(0,+\infty)^2\to(0,+\infty)$ lies in $\overline{\{x+y,2^x,\log_2 x\}}$?
(f) any function of one variable lies in $\overline{\{x+y,2^x,\log_2 x\}}$?
(g) $\sin x\in\overline{\{x+y,xy\}}$? (h) $\sin x\in\overline{\{x+y,xy,2^x\}}$? (i)* $\sin x\in\overline{\{x+y,xy,2^x\}}\cup\{c\}_{c\in\mathbb{R}}$?
(j) function $g(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\frac{x_2}{x_3}}$ with $x_1>1,x_2,x_3>0$ lies in $\overline{\{x_1-x_2,2^x,\log_2 x\}}$?

1.7. $(a)^\circ$ The function of two or more variables is not a superposition of functions of one variable.
(b) If the set F is finite or countable then $\overline{F}$ is no more than countable.

Denote by F_n the set of *all* functions $[0,1]^n\to[0,1]$, i. e. functions of n variables.

1.8. (a) There exists an injection $\alpha:[0,1]^2\to[0,1]$ (i.e. mapping such that $\alpha(x)\neq\alpha(y)$ for any $x\neq y$).
(b) $F_2\subset\overline{F_1\cup\{\alpha\}}$. (c) $F_3\subset\overline{F_2}$.
(d) $F_n\subset\overline{F_{n-1}}$ for any $n\geqslant 3$. (e) $F_n\subset\overline{F_1\cup\{\alpha\}}$ for any integer n.

1.9. (a) Are there continuous functions $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2:[0,1]\to[-1,1]$ and $h_1,h_2:[-2,2]\to\mathbb{R}$ such that for every $x,y\in[0,1]$ we have $xy=h_1(\varphi_1(x)+\psi_1(y))+h_2(\varphi_2(x)+\psi_2(y))$?
(b) Are there continuous functions $\varphi,\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ and $h:[0,2]\to\mathbb{R}$ such that for every $x,y\in[0,1]$ we have $(x+1)(y+1)=h(\varphi(x)+\psi(y))$?

1.10. (a) $F_2\subset\overline{F_1\cup\{x+y\}}$.
(b) Let $f:[0,1]^2\to[0,1]$ be an arbitrary function of two variables. Then there are functions $\varphi,h:[0,1]\to[0,1]$ such that for every $x,y\in[0,1]$ we have $f(x,y)=h(\varphi(x)+0.1\varphi(y))$.
(c) $F_n\subset\overline{F_1\cup\{x+y\}}$ for any integer n.
(d) Let n be any natural and let $f:[0,1]^n\to[0,1]$ be an arbitrary function of n variables. Then there are functions $\varphi,h:[0,1]\to[0,1]$ such that for any $x_1,\dots,x_n\in[0,1]$ we have

$$f(x_1,\dots,x_n)=h\left(\varphi(x_1)+10^{-1}\varphi(x_2)+\dots+10^{1-n}\varphi(x_n)\right).$$

So, any function is a superposition of some functions of one variable and the addition. However it is more interesting to consider the set of generators which contains only *continuous* (see definition in §3) or *infinitely differentiable* functions.

1.11. Kolmogorov's Theorem. (a) *Any continuous function* $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ *may be represented as a superposition of continuous functions of one variable and the addition.*

(b) *Let* $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *be an arbitrary continuous function. Then there are continuous functions* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *such that for every* $x, y \in [0,1]$ *we have*

$$f(x,y) = h\left(\varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_1(y)\right) + \ldots + h\left(\varphi_5(x) + \sqrt{2}\varphi_5(y)\right).$$

(c) *Let* $p_1, \ldots, p_n$ *be different prime numbers. Then for any* n *and continuous function* $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ *there are continuous functions* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n+1} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *such that for any* $x, y \in [0,1]$ *we have*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{2n+1} h\left(\sqrt{p_1}\varphi_k(x_1) + \ldots + \sqrt{p_n}\varphi_k(x_n)\right).$$

Hints for (a) are presented after the Semifinal.

2 Rough estimations

First problems in this section are the simplest way to understand the concept of continuous function. But they are interesting not only because of this. Similar problems about specific (but may be rough) estimations are occuring very often in olympiads and in the applied and theoretical mathematics.

In the solution of these problems you may not use functions $\sqrt[n]{x}$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$ etc. before rigorous definitions of these functions. It because to define these functions rigorously (e.g. to prove that there is x such that $x^2 = 2$), in fact, you should solve the corresponding problem. However there is one exception from this rule. If some function is used in the condition of the problem then you may use it in the solution.

In this collection of problems the rigorous theory of real numbers is not necessary. You may use algebraic properties of real numbers without proof. In particular, you may use properties of inequalities. You may also use:

Archimede's principle: for any real number x there is an integer number n such that n greater than x.

Principle of nested intervals: Let I_n be a system of nested intervals on the line and a length of I_n tends to 0. Then $\bigcap I_n \neq \varnothing$.

All these principles can be «proven» by decimal notation.

2.1. Find N such that for every $n > N$ the inequality $a_n > 10^9$ is satisfied for $a_n =$
(a) $\sqrt{n}$; (b) $n^2 - 3n + 5$; (c) $1,02^n$.

2.2. Bernoulli's Inequality. $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$ for every $x \geqslant -1$ and every integer $k \geqslant 1$.

2.3. Find a pair of a and N such that for every $n > N$ the inequality $|a_n - a| < 10^{-8}$ is satisfied if $a_n =$
(a) $\dfrac{n^2 - n + 28}{n - 2n^2}$; (b) $\sqrt{5 + \dfrac{2}{n}}$; (c) $0,99^n$; (d) $\sqrt[n]{2}$; (e)* $\dfrac{n^9}{2^n}$.

2.4. Find a pair of a and $\delta > 0$ such that for every $x \in (-\delta, \delta)$ the inequality $|f(x) - a| < 3 \cdot 10^{-9}$ is satisfied if $f(x) =$
(a) $(x-3)^3$; (b) 3^{x-3}; (c) $\sin x$; (d) $\dfrac{\sqrt{1+x^5}}{\cos x - 2}$;
(e) the root of equation $t^3 - tx + 1$ which lies in $[-2, 0]$.

3 Continuous functions

Let $K = [0,1]$ or $K = [0,1]^2$. A function $f : K \to \mathbb{R}$ is called **continuous** if for every $\varepsilon > 0$ there exists a number $\delta > 0$ such that for every $x, y \in K$ with condition $|x - y| < \delta$ we have $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Here $|x - y|$ is the euclidean distance. (Be careful because for other K the definition may be different!)

3.1. (a)-(e) Which functions from the problem 2.4 are continuous on $[0,1]$?

Note. The continuity of the function $f(x) = x^n$ for any integer $n > 0$ can be proven similarly to problems 2.4.a and 3.1.a. This fact and the intermediate value theorem imply that for any $a > 0$ there exists a number x such that $x^n = a$. This statement allows to define the function $\sqrt[n]{x}$. Inverses of other functions can be defined similarly.

3.2. Which functions are continuous in $[0,1]^2$?
(a) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; (b) $f(x_1, x_2) = \lfloor x_1 + x_2 \rfloor$.

3.3. (a) Any continuous function $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ is bounded (i.e. there exists a constant M such that $|f(x)| < M$ for every $x \in [0,1]$).
(b) Any continuous function $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ reach its maximal and minimal values.

3.4. Let f and g be continuous functions. Is it true that
(a) its sum; (b) its product; (c) its superposition;
(d) the superposition $f(g(x,y),z)$; (e)* arbitrary superposition
are continuous?
We consider funstions $[0,1] \to [0,1]$ (for (a)-(c)), $[0,1]^2 \to [0,1]$ (for (d)), $[0,1]^n \to [0,1]$ (for (e)).

3.5. Is it true that the function which is continuous by any its variable is continuous? In other words, is there a discontinuous function $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ such that each of its section (i.e. functions $f_y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ and $f_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ which defined as $f_y(x) := f(x,y)$ и $f_x(y) := f(x,y)$) is continuous?

If a counterexample is a solution of some problem then it does not used further. But contreaxmples are necessary for understanding the context of proof. These counterexamples show you what properties can not be used.

4 Uniform limits

Let us recall that $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ if for every number $\varepsilon > 0$ there exists an integer $N > 0$ such that for all $n > N$ we have $|a_n - a| < \varepsilon$.

4.1. (a) Find $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ for each $x \in (0,1)$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

(b) Is there $N > 0$ such that for every $x \in (0,1)$ and $n > N$ we have $|\frac{1}{1-x} - \sum\limits_{k=0}^{n} x^k| < 0.01$?

4.2. Let $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a sequence of continuous functions. Is it true that following functions are continuous:

(a) The *pointwise limit* of f_n? This is a function $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ which is defined if all these limits are exist.

(b) The **uniform limit** of f_n? This is a function $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ such that for every number $\varepsilon > 0$ there exists an integer $N > 0$ such that for all $n > N$ and $x \in [0,1]$ we have $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

4.3. (a) Construct a continuous surjective function $f : [0,1] \to [0,1]$ which is a constant outside of an interval of length 0.01.

(b) Construct an infinite sequence of continuous surjective functions $f_n : [0,1] \to [0,1]$ such that

• $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n}$ for every $x \in [0,1]$;

• for every n there exists a family of intervals $I_{n,1}, \ldots, I_{n,s_n}$ with total length less than 2^{-n} such that f_n is a constant on every interval from the set $[0,1] - (I_{n,1} \cup \ldots \cup I_{n,s_n})$.

(c) Construct a continuous surjective function $f : [0,1] \to [0,1]$ such that for every $\varepsilon > 0$ there exists a family of intervals $I_1, \ldots, I_n$ with total length less than ε such that f is a constant on every interval from the set $[0,1] - (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$.

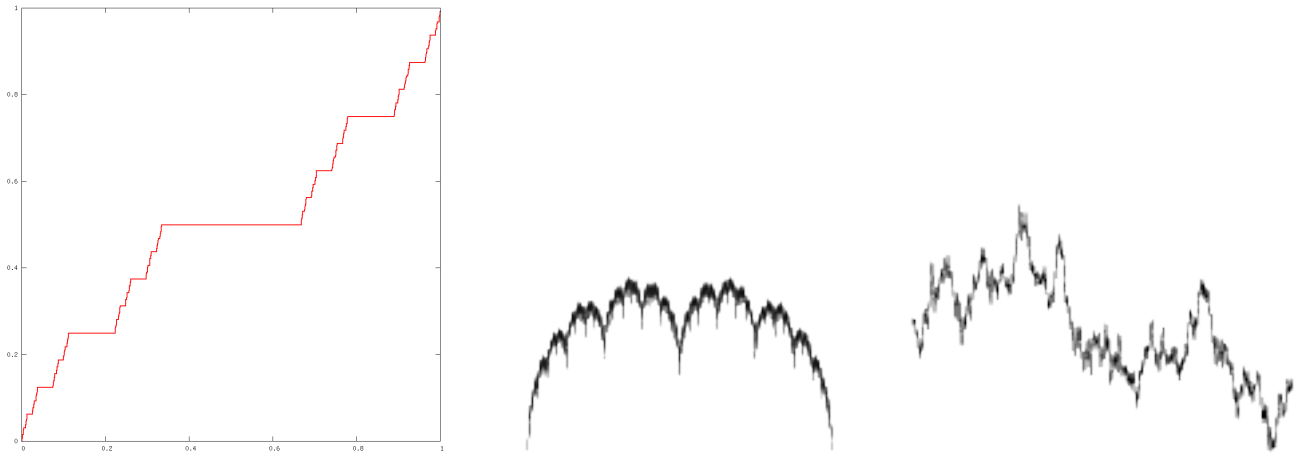


Рис. 1: Cantor function, Weiestrass function and Brownian motion

4.4. A sequence of real numbers $\{x_n\}$ is called *fundamental* if for every $\varepsilon > 0$ there exists a natural number N such that for every $m, n > N$ we have $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

(a) Is the sequence $x_n = \frac{1}{n}$ fundamental? Is the sequence $x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ fundamental?

(b) Every covergent sequence is fundamental.

(c) Every fundamental sequence is bounded.

(d) Every bounded sequence contains covergent subsequence.

(e) Every fundamental sequence has a finite limit.

If terms which used in the some problem are not defined here and are unknown for you, then you should ignore this problem.

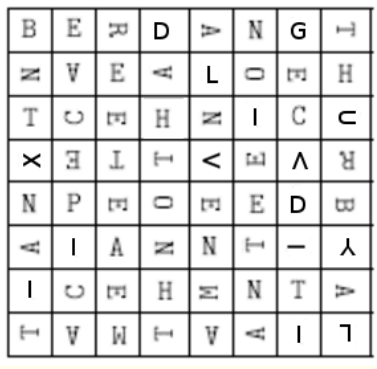
4.5. * There exists a function $f : [0,1] \to [0,1]$ such that continuous everywhere but differentiable nowhere. (Such examples are occured in physics when studying the *Brownian motion*).

4.6. (a) Suppose that $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ is a sequence of functions and every f_n does not depend on the variable y. Let $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ be the uniform limit of f_n. Then the function f does not depend on the variable y.

(b)* Let $K := [-1,1]^2 - [-1,0] \times 0$. Is there a function $f : K \to \mathbb{R}$ which *depends* on y such that its restriction on every square which lies in K *does not depend* on y?

5 Peano curve

5.1. A sentence is written in cells of the table following by the unknown rule. Find this rule and read the sentence.



5.2. Cells of the square $n \times n$ are indexed by numbers from 1 to n^2. Every cell is divided by 4 parts. Prove that an indexing of new splitting $2n \times 2n$ may be chosen such that for the large cell with index k four its subcells have indexes $4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k$.

5.3. A mapping $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ is called *linear* if we have

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \text{for every} \quad \lambda \in [0,1],\ x, y \in [a, b].$$

A mapping $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ is called *piecewise linear* if there are points $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n = 1 \in [0, 1]$ such that f is linear for every interval $[x_i, x_{i+1}]$.

(a) There exists a piecewise linear mapping $F : [0, 1] \to [0, 1]^2$ such that for every point $y \in [0, 1]^2$ there exists a point $x \in [0, 1]$ such that $|y - F(x)| < \frac{1}{100}$.

(b) A piecewise linear mapping $F : [0, 1] \to [0, 1]^2$ is called $d-$*dense* if for every point $y \in [0, 1]^2$ there exist a point $x \in [0, 1]$ such that $|y - F(x)| < d$. Prove that for every $d-$dense mapping F there exists $d/2-$dense mapping F^+ with condition $|F(x) - F^+(x)| < \frac{1}{100}$ for every $x \in [0, 1]$.

(c) There exists a continuous mapping $F : [0, 1] \to [0, 1]^2$ such that for every point $y \in [0, 1]^2$ there exists $x \in [0, 1]$ such that $F(x) = y$.

5.4. (a) The intersection of any sequence of nested rectangles on the plain is not empty.

(b) — (e) Solve problems 4.4 (b) — (e) for sequences of points on the plain.

13TH HILBERT PROBLEM ABOUT SUPERPOSITIONS OF FUNCTIONS

Hints, solutions, and answers for problems before the Semifinal

Hints, solutions, and answers

1.1. (a) Follows from (b).

(b) Let the vertices of the rectangle have coordinates $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_1), (i_2, j_2)$. Then the sum of numbers in opposite vertices is $\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \psi_{j_1} + \psi_{j_2}$.

(c) Similar to (b).

(d) The statement is true.

1.2. (a) Prove that numbers $i + \sqrt{2}j$ are different for different cells.

(b) (c) Similar to (a).

(d) Yes. Put $\varphi_{ik} = 9i + k$, $\psi_{jk} = 9j + k$.

1.3. (a) Prove that each polynomial has only a finite number of roots.

(b) Use the identity $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

(c) $f(x) = x \sin 1$.

(d) Construct a polynomial that is nonzero only on one value of x.

1.4. (b) Construct a polynomial that is nonzero only on one set of variables.

1.6.(a) Use 1.7.a.

(c) $\overline{\{x + y\}} = \{ax + by \mid a, b \in \mathbb{Z}, a, b \geqslant 0\}$.

(d) $2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$.

(e) $xy = 2^{\log_2 x + \log_2 y}$.

(f) Use the problem 1.7 (b).

(g) Use the problem 1.3 (a).

1.7. (b) Prove that the set of elementary superpositions on F is at most countable.

1.8. For each $x \in [0, 1]$ by $0.x_1x_2\ldots$ denote the decimal expansion of x such that there is no N such that $x_n = 0$ for each $n > N$.

(a) Use the decimal expansion of x.

By definition, put

$$\alpha : [0, 1]^2 \to [0, 1] \quad \text{by} \quad \alpha(x, y) := 0, x_1y_1x_2y_2x_3 \ldots .$$

Then α is injective (but not bijective!).

(b,c,d) For given $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$ find $g \in F_n$ such that

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha(x_n, x_{n+1})).$$

Notice that $\alpha \in F_n$ for any $n > 1$.

(e) Similarly to (a) construct an injection $[0, 1]^n \to [0, 1]$.

Then (e) follows from (d) and (b) by induction.

1.9. (a) $xy = (x + y)^2/4 - (x - y)^2/4$.

(b) $(x + 1)(y + 1) = 2^{\log_2(x+1) + \log_2(y+1)}$

1.10. (a) follows from (b), (c) follows from (a) and 1.8.d.

(b) Use the construction from 1.8.b. Take

$$\varphi(x) := 0.x_10x_20x_3 \ldots .$$

Then $\alpha(x, y) = \varphi(x) + 0.1\varphi(y)$. Here α is the function which is defined in 1.8.a.

(d) By definition, put

$$\varphi(x) := 0.x_1 \underbrace{0000\ldots0}_{n-1 \text{ zeros}} x_2 \underbrace{0000\ldots0}_{n-1 \text{ zeros}} x_300\ldots$$

and $\alpha(x_1,\dots,x_n) := \varphi(x_1) + 0.1\varphi(x_2) + \dots + (0.1)^{n-1}\varphi(x_n)$. Then α is injective. Hence, $h \in F_1$ exists for every $f \in F_n$.

2.1. (b) Prove that $n^2 - 3n + 5 > n$ for all $n > 4$.

(c) Use 2.2.

2.2. Use the induction by k.

2.3.. (a) take $a = -\frac{1}{2}$

(b) $$\sqrt{5+\frac{2}{n}} - \sqrt{5} = \frac{\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}} + \sqrt{5}\right)}{\sqrt{5+\frac{2}{n}} + \sqrt{5}} = \frac{2}{n\left(\sqrt{5+\frac{2}{n}} + \sqrt{5}\right)}$$

(c) take $a = 0$ and use Bernoulli's inequality.

(d) take $a = 1$ and use Bernoulli's inequality.

(e) take $a = 0$ and find k such that $(n+1)^9/n^9 < 1.5$ for $n > k$.

2.4. (a) Clearly, if $|x| < 1$ then $(x-3)^2 < 16$ and $|3(x-3)| < 12$. Then

$$|(x-3)^3 + 3^3| = |x((x-3)^2 - 3(x-3) + 3^2)| \leqslant |x| \cdot |16 + 12 + 9| < 40|x|$$

(c) Use the inequality $\sin x < x$.

(d) If

$$|f(x) - a| < \varepsilon/2 \quad \text{for} \quad x \in (-\delta_1, \delta_1) \quad \text{and}$$
$$|g(x) - b| < \varepsilon/2 \quad \text{for} \quad x \in (-\delta_2, \delta_2),$$
$$\text{then} \quad |f(x) + g(x) - a - b| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in (-\min\{\delta_1,\delta_2\}, \min\{\delta_1,\delta_2\})\,.$$

The same inequality is true for $f - g$. Statements for fg and f/g can be proven in a similar way.

3.2. (a) The function $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ is continuous. Take $\delta = \varepsilon$ and use the triangle inequality $|f(z) - f(z_0)| \leqslant |z - z_0|$.

(b) Let us prove that f is not continuous. Take $x = 1$, $y = 0$, and $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Then $|f(1,0) - f(1 - \frac{\delta}{2}, 0)| = 1 > \frac{1}{2}$ for every $\delta > 0$.

3.3. (a) By definition of continuity there exists N such that if $|x - y| < 1/N$ then $|f(x) - f(y)| < 1$. Then

$$|f(x)| < 1 + \max\left\{|f(0)|, \left|f\left(\frac{1}{N}\right)\right|, \dots, \left|f\left(\frac{N-1}{N}\right)\right|, |f(1)|\right\}$$

for every $x \in [0,1]$.

(b) By (a) there exists a supremum of f on $[0,1]$, say u. We call a subset $A \subseteq [0,1]$ *good* if u is supremum of f on A. Clearly, if interval $[a,b]$ is good, then at least one of the intervals $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ and $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ is good. Now starting from $I_0 = [0,1]$ we construct a sequence of good intervals $\{I_n\}$ such that $I_{n+1} \subset I_n$ and $|I_n| = 2^{-n}$ for each $n > 0$. Then f reaches its maximal value at the intersection point $\bigcap\limits_n I_n$.

3.4. (a) Yes. Choose $\delta = \varepsilon/2$.

(b) Yes. There exists C such that $|f(x)|, |g(x)| < C$ for each $x \in [0,1]$. This follows from 3.3.a. Take δ such that $\delta^2 + 2\delta C < \varepsilon$.

(c) Yes. Let us show that $f \circ g$ is continuous. Take δ_1 such that if $|x - y| < \delta_1$ then $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Further, take δ such that if $|x - y| < \delta$ then $|g(x) - g(y)| < \delta_1$.

(d) Take $\delta_1 > 0$ such that if $|x_1 - x_2| < \delta_1$ and $|y_1 - y_2| < \delta_1$ then $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Take δ_2 such that if $|x_1 - x_2| < \delta_2$ then $|g(x_1) - g(x_2)| < \delta_1$. Further, take $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

(e) Similar to (d).

3.5. There exists such function. Define $f(x,y) = x/y$ for $x < y$, $f(x,y) = y/x$ for $y \leqslant x$, and $f(0,0) = 0$. This function is not continuous because for each $\varepsilon > 0$ we have $f(\varepsilon, \varepsilon) - f(0,0) = 1$.

4.1. (a) To show that $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$, estimate

$$\left|\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k\right| = \frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{(1-x)(1+(1/x-1))^n} < \frac{1}{(1-x)n(1/x-1)}$$

by Bernoulli's inequality.

(b) No, because for each n there exists $x \in (0,1)$ such that $\frac{x^n}{1-x} > 0.5$.

4.2. (a) Suppose $f_n(x) = x^n$. Then $f(x) = 0$ for $x < 1$ and $f(1) = 1$.

(b) Yes. Suppose $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ if $n > N$. Choose δ such that $|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(y)| < \varepsilon$ for $|x-y| < \delta$. Then $|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$ for $|x-y| < \delta$.

4.3. (a) Take f linear on intervals $[0, 0.99]$ and $[0.99, 1]$; $f(0) = f(0.99) = 0$, $f(1) = 1$.

(b) Construct a sequence of families of intervals I_k^i and piecewise linear functions $\{f_k\}$ with following conditions:

1) f_k is linear on each interval I_k^i;

2) number of intervals in the family I_k^i is $2^k + 1$;

3) f_k is constant on each odd interval;

4) f_k is increasing on each even interval.

Let f_1 be the function from (a). Then other f_k are defined by induction in a following way. If f_k is constant on I_k^i, then $f_{k+1} \equiv f_k$ on I_k^i. If f_k increases on $I_k^i = [t_1, t_2]$, $f(t_1) = a$, $f(t_2) = b$, then

$$f_{k+1}(t_1) = a, f_{k+1}(t_2) = b, f_{k+1} \equiv (a+b)/2 \text{ on } [\frac{2t_1+t_2}{3}, \frac{t_1+2t_2}{3}],$$

and f_{k+1} is linear on intervals $[t_1, \frac{2t_1+t_2}{3}]$ and $[\frac{2t_1+t_2}{3}, t_2]$.

(c) For $x \in [0,1]$ the sequence $\{f_k(x)\}$ is bounded. From the pronciple of nested intervals it follows that this sequence has a *limit point*, say $f(x)$. Let us recall that a limit point of sequence $\{y_n\}$ is a real number y such that for each N and ε there exists $n > N$ such that $y_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. The function $f(x)$ is the uniform limit of $\{f_k\}$. One can easily ti see that all properties discussed above hold.

Remark. Another proof is based on ternary expansion.

4.5. The classical example is *Weierstrass function*

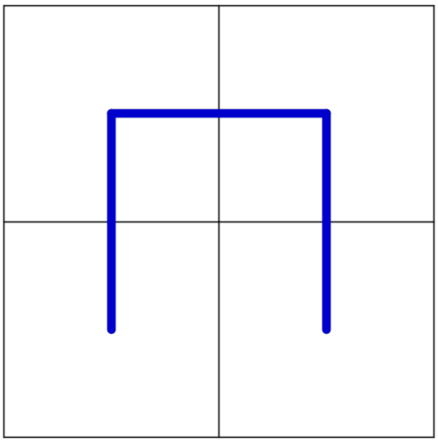
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(13^n \pi x),$$

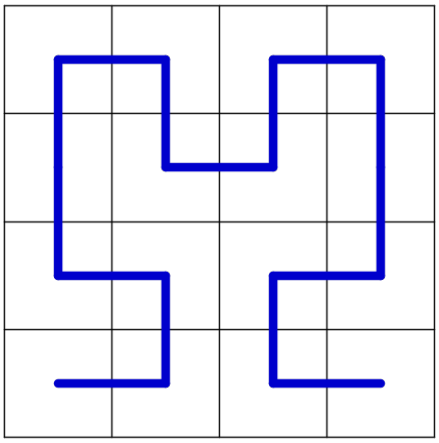
see fig. 1.

Remark. Another solution is based on Baire's theorem.

5.1. The text can be read along the curve invented by italian mathematician Peano.

5.2.





5.3. (a) Construct required map as «indexing» of cells of decomposition of square $[0,1]^2$ into n^2 cells.

(b) The image $F[0,1]$ of F is a polygonal line. Construct F^+ such that the following conditions hold:

this image is a result of substitution of links $F[0,1]$ to a polygonal lines;

polygonal line which substitute link is $d/2-$dense in the d-neighbourhood of this link.

(c) Construct required map as a uniform limit of functions which are constructed in (b).

5.4. (a) Consider the sequence $a_i = (x_i, y_i)$ of centers of recatngles. Prove that any bounded sequence of points have a *limit point*. Any limit point of the sequence a_i lies in each rectangle.

6 Deduction of the Kolmogorov theorem from approximative version

The aim is to show that any *continuous* multivariable function can be represented as a superposition of several *continuous* functions of one variable and *the addition*. We consider functions of two variables on the unit square.

In fact, Kolmogorov's theorem 1.11 is a statement about approximation of given continuous function by continuous functions of a special type. Main ingredient of proof is approximative Kolmogorov's theorem 6.2.b. This theorem allows us to represent any continuous function as a sum of series. All summands in this series have a required type. Moreover, these summands can be arranged in a special way.

Let us recall that $I := [0,1]$ and $I^2 := [0,1] \times [0,1]$.

Now let us prove Kolmogorov's theorem. We use the approach [Ka] (see also [He]) and combine Kolmogorov's ideas and Baire theorem.

Let $f : I^2 \to \mathbb{R}$ be an arbitrary function. **Kolmogorov set** for f is a set of continuous functions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_5 : I \to I$, $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x,y) = h\left(\varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_1(y)\right) + \ldots + h\left(\varphi_5(x) + \sqrt{2}\varphi_5(y)\right).$$

for any $x, y \in I$.

6.1. Construct a Kolmogorov set for the function $f(x,y) = x + \sqrt{2}y + 3$.

We do not know explicit Kolmogorov set even for the addition and the multiplication.

For any $f : I^2 \to \mathbb{R}$ let us denote

$$|f| := \max_{z \in I^2} |f(z)|.$$

Let $f : I^2 \to \mathbb{R}$ be an arbitrary function and λ be a number. **Kolmogorov set** for (f, λ) is a set of continuous functions $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to I$, $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ such that $|h| \leqslant 2(1-\lambda)|f|$ and

$$\left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right) \right| \leqslant \lambda |f|$$

for any $x, y \in I$.

6.2. (a) Construct a Kolmogorov set for $f(x,y) = xy$ and $\lambda = 1/2$.

(b)* Let f be an arbitrary continuous function. Then there exists a Kolmogorov set for f and $\lambda = 5/6$.

(c)* **Approximative Kolmogorov's theorem.** *There exists a set of continuous functions $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to \mathbb{R}$ with the following property: for an arbitrary continuous function $f : I^2 \to \mathbb{R}$ and arbitrary small $\lambda > 0$ there exists a continuous function $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ such that $\{\varphi_1, \dots, \varphi_5, h\}$ is a Kolmogorov set for (f, λ).*

We stress again that (b), (c) are not easy (see §7-§9).

First of all, let us explain how these results can be applied.

Approximative Kolmogorov's theorem allows us to *approximate* any continuous function f by linear combination of functions of type $h(\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y))$. Moreover, «inner» function φ does not depend on f. Hence, we get required representation (i.e. Kolmogorov set for f) and arrange summands in some series naturally constructed by Kolmogorov sets for (f, λ).

6.3. Let a set $\{\varphi_1, \dots, \varphi_5, h\}$ be a Kolmogorov set for f, λ and

$$f_1(x,y) := f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right).$$

(a) Suppose a set $\{\varphi_1,\dots,\varphi_5,h_1\}$ is a Kolmogorov set for (f_1,λ). Then the set $\{\varphi_1,\dots,\varphi_5,h+h_1\}$ is a Kolmogorov set for (f,λ^2).

(b) Get approximative Kolmogorov's theorem from similar statement «for $\lambda=5/6$».

(c) Get the Kolmogorov's theorem from the approximative Kolmogorov's theorem.

7 Lemma of approximation by prekolmogorov sets

Suppose f is a function $I^2\to\mathbb{R}$. An ordered set of continuous functions $\varphi_1,\dots,\varphi_5:I\to\mathbb{R}$ is called a **prekolmogorov set** for f if there exists a continuous function $h:[0,3]\to\mathbb{R}$ such that the set $\varphi_1,\dots,\varphi_5,h$ is a Kolmogorov set for f with $\lambda=5/6$.

Approximative Kolmogorov's theorem «for $\lambda=5/6$» claims that there exists an ordered set $\varphi_1,\dots,\varphi_5:I\to\mathbb{R}$ such that it is prekolmogorov set for any continuous function $f:I^2\to\mathbb{R}$. Another way to construct such a set is an iteration approximation process or, in more formal words, the Baire category theorem.

Let $M\subset\mathbb{R}^2$ be an arbitrary set. Two functions $\varphi,\psi:M\to\mathbb{R}$ are called **ε-close**, if $|\psi(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ for any $x\in M$. Two ordered sets of functions $(\varphi_1,\dots,\varphi_5:M\to\mathbb{R})$ and $(\psi_1,\dots,\psi_5:M\to\mathbb{R})$ are called **ε-close**, if φ_k,ψ_k are ε-close for each $k=1,\dots,5$.

7.1. * (a) **Prekolmogorov stability lemma.** Suppose a set $(\varphi_1,\dots,\varphi_5)$ is a prekolmogorov set for $f:I^2\to\mathbb{R}$. Then there exists $\varepsilon>0$ such that any ε-close to $(\varphi_1,\dots,\varphi_5)$ set is a prekolmogorov set for f.

(In other words, the set $PK(f)$ of all prekolmogorov sets for f is open in the space $C(I^2)^5$. Here $C(I^2)$ is the space of all continuous functions $I^2\to\mathbb{R}$.)

(b) **Lemma of approximation by prekolmogorov sets.** For any $\varepsilon>0$ and continuous functions $f:I^2\to\mathbb{R}$, $\psi_1,\dots,\psi_5:I\to\mathbb{R}$ there exists a prekolmogorov set for f such that it is ε-close to $(\psi_1,\dots,\psi_5)$.

(This means that $PK(f)$ is dense in $C(I^2)^5$.) Hints are provided in §8.

8 Proof of the approximation lemma

8.1. (a) For any numbers $\psi_1,\dots,\psi_8\in I$ there are $\varphi_1,\dots,\varphi_8\in I$ such that

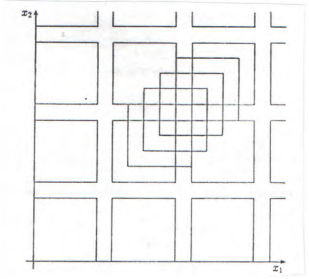
- $|\psi_i-\varphi_i|<0.01$ for every $i=1,\dots,8$.
- for any arrangement of numbers on the chessboard there exists a continuous function $h:[0,3]\to\mathbb{R}$ such that a number at square (i,j) is equal to $h(\varphi_i+\sqrt{2}\varphi_j)$.

(b) For any numbers $\psi_{i,k}\in I$, $i,k=1,\dots,8$ there are numbers $\varphi_{i,k}\in I$, $i,k=1,\dots,8$ such that

- $|\psi_{i,k}-\varphi_{i,k}|<0.01$ for every $i,k=1,\dots,8$.
- for any arrangement of numbers in cells of the cube $8\times8\times8$ there exists a continuous function $h:[0,3]\to\mathbb{R}$ such that the number in the cell (i,j,k) is equal to $h(\varphi_{i,k}+\sqrt{2}\varphi_{j,k})$.

8.2. (a) Let $x\in\mathbb{R}$ be an arbitrary point. Then for every $k=1,\dots,5$ *except at most one* there exists $j\in\mathbb{Z}$ such that x lies in the interval $4I+5j+k:=[5j+k,4+5j+k]$.

(b) Let $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ be an arbitrary point. Then for every $k=1,\dots,5$ *except at most two* there are $i,j\in\mathbb{Z}$ such that (x,y) lies in the square $(4I+5i+k)\times(4I+5j+k)$.



Visual interpretation of this statement is following. For each $k=1,\dots,5$ draw these squares on the plain. We have a «city map» of k-th city with *blocks* (squares) and *streets* (intervals

between squares). Let us impose city maps for five cities one on another. Then every point lies inside of block at least for three of city maps.

(a',b') Formulate and prove analogues of (a,b) with change 5 to an arbirtary positive integer.

We say that a function $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *rationally separates* the family of pairwise not crossed intervals on the line if the following conditions hold:

- φ is continuous;
- φ is a constant on every interval from this family;
- φ has only rational values which are different for different intervals.

8.3. Let $\psi : I \to \mathbb{R}$ be a continuous function and $\varepsilon > 0$. Then there exists an integer $N > 0$ and function $\varphi : I \to \mathbb{R}$ such that φ is ε-close to ψ and the following condition holds:

(a) φ is a constant on every interval $\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right)$ for each $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

(b) φ is continuous and linear on every interval $\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]$ for each $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

(c) φ rationally separates the family of intervals $\frac{4I+5j}{N} := \left[\frac{5j}{N}, \frac{4+5j}{N}\right]$ for each $\frac{4I+5j}{N}, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}$.

We say that a function $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}$ *separates* the family of pairwise not crossed squares on the plain if the folloing conditions hold:

- φ is continuous;
- φ is a constant on every square from this family;
- φ has different values for different squares.

8.4. Suppose $\varphi : [0, 1000] \to \mathbb{R}$ rationally separates the family of intervals $4I + 5j := [5j, 4 + 5j]$, $j \in \{1, \dots, 100\}$ (the definition is similar to the case when $\varphi : I \to \mathbb{R}$.) Then

(a) Function $\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y)$ separates the family of squares $(4I + 5i) \times (4I + 5j)$, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$. (the definition is similar to the case when $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}$).

(b) For any set $v_{i,j}$ of numbers, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$ there exists a continuous function $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$ such that

- $|h(x)| \leqslant \max_{i,j} |v_{ij}|$ for every $x \in [0, 3]$.
- $h(\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y)) = v_{i,j}$ for every $i, j \in \{1, \dots, 100\}$, $x \in 4I + 5i$, $y \in 4I + 5j$.

8.5. Suppose for every $k \in \{1, \dots, 5\}$ function $\varphi_k : [0, 1000] \to I$ rationally separates the family of intervals $4I + 5j + k := [5j + k, 4 + 5j + k]$, $j \in \{1, \dots, 100\}$ and numbers $\varphi_k(5j + k)$ are different for different pairs (j, k). Then for any set $v_{k,i,j}$ of numbers $k \in \{1, \dots, 5\}$, $i, j \in \{1, \dots, 100\}$ there exists a continuous function $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$ such that $h(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)) = v_{k,i,j}$ for every

$$k \in \{1, \dots, 5\}, \quad i, j \in \{1, \dots, 100\}, \quad x \in 4I + 5i, \quad y \in 4I + 5j.$$

8.6. Let $f : I^2 \to \mathbb{R}$ be a function. Choose an integer $N > 0$, $N \equiv 4 \mod 5$ such that

$$|f(z) - f(z')| < \frac{|f|}{6} \quad \text{for every} \quad i, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}, \quad z, z' \in \frac{4I+5i}{N} \times \frac{4I+5j}{N}.$$

If functions $\varphi_1, \dots, \varphi_5 : I \to I$ separate the family of intervals

$$\frac{4I+5j}{N}, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}$$

then

(a) If $h : [0, 3] \to \left[-\frac{|f|}{3}, \frac{|f|}{3}\right]$ is a continuous function and

$$h\left(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)\right) = \frac{1}{3} f\left(\frac{5i+k}{N}, \frac{5j+k}{N}\right) \quad \text{for every}$$

$$k = 1, \dots, 5, \quad i, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}, \quad x \in \frac{4I + 5i}{N}, \quad y \in \frac{4I + 5j}{N},$$

then the set $\varphi_1, \dots, \varphi_5, h$ is 5/6-kolmogorov set for f.

(b) The set $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ is a prekolmogorov set for f.

(c) (Riddle) Formulate the analogue of (a) with change 5 to 4. Is it true?

13TH HILBERT PROBLEM ABOUT SUPERPOSITIONS OF FUNCTIONS

Hints, solutions, and answers for problems after the Semifinal

For $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ denote

$$\widetilde{\varphi}(x,y) := \varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y) \quad \text{и} \quad z = (x,y).$$

6.1. Put $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \varphi_3(x) = \varphi_4(x) = \varphi_5(x) = 0$, $h(x) = x + \frac{3}{5}$

6.2. (b,c) Follows from 9.1.b and 9.2.ac.

6.3. (b) We have $|h + h_1| < 2|f|(1 - \lambda + \lambda(1-\lambda)) = 2|f|(1-\lambda^2)$ and

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{5} (h + h_1)(\widetilde{\varphi}_k(z)) \right| = \left| f_1(z) - \sum_{k=1}^{5} h_1(\widetilde{\varphi}_k(z)) \right| < \lambda |f_1| < \lambda^2 |f|.$$

(c) Repeat the process from (b). We get appoximative Kolmogorov's theorem for $\lambda = (5/6)^{2^n}$ by induction.

(d) Repeat the process from (b). Construct a sequence of functionf $h_n : [0,3] \to \mathbb{R}$ such that

$$\left| f - \sum_{k=1}^{5} (h_0 + h_1 + \ldots + h_n)(\widetilde{\varphi}_k(z)) \right| \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} |f| \quad \text{and} \quad |h_n| < \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n} |f|$$

for each n. $\sum\limits_{n} h_n$ is uniformly converge to h. This follows from second inequality. Take $n \to \infty$ in first inequality. We have $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{5} h(\widetilde{\varphi}_k(z))$.

7.1. (b) Use 8.3.c. Find $N \equiv 4 \mod 5$ and functions $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ such that for each k function φ_k is close to ψ_k and separates families of intervals

$$\frac{4I + 5j + k}{N}, j = 1, \ldots, \frac{N-4}{5}.$$

Similarly to 8.5 find continuous function $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ such that

$$h(\widetilde{\varphi}_k(x,y)) = \frac{1}{3} f\left(\frac{5i+k}{N}, \frac{5j+k}{N}\right)$$

for any

$$k = 1, \ldots, 5, i, j = 1, \ldots, \frac{N-4}{5}, x \in \frac{4I + 5i + k}{N}, y \in \frac{4I + 5j + k}{N}.$$

After that let us increase N (i.e. decrease squares). We can take N sufficiently large such that condotions of 8.6 are satisfied. Then the Lemma follows from 8.6.b.

8.1. (a) Take pairwise different rational numbers $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ that are 0.01-close to $\psi_1, \ldots, \psi_8$ (i.e. $|\psi_i - \varphi_i| < 0.01$ for each i). If $p + \sqrt{2}q = s + \sqrt{2}t$ for rational p, q, s, t, then $p = s$ and $q = t$. Then $\varphi_i + \sqrt{2}\varphi_j$ are different numbers for different pairs (i,j). Define $h(\varphi_i + \sqrt{2}\varphi_j)$ to be the number in cell (i,j), and extend h piecewise linearly to $\mathbb{R}$.

(b) Take pairwise different rational numbers $\varphi_{i,k}$ such that $|\psi_{i,k} - \varphi_{i,k}| < \varepsilon$. Then the equality $\varphi_{i,k} + \sqrt{2}\varphi_{j,k} = \varphi_{s,m} + \sqrt{2}\varphi_{t,m}$ implies that $(i,k) = (s,m)$ and $(j,k) = (t,m)$, that is $(i,j,k) = (s,t,m)$.

8.2. (a) Let $m = [x/5]$ and $r = [x] \bmod 5$. Then $x \in [5m + r, 5m + r + 1)$. Clearly, $x \in [5m + (r-s), 5m + (r-s+4)]$ for each $s \in \{0,1,2,3\}$.

(b) This follows from (a).

8.3. (c) Take a number N such that for each $x, y \in I$ the inequality $|x-y| < 5/N$ implies $|\psi(x)-\psi(y)| < \varepsilon/4$. Take pairwise distinct rational numbers q_j, $j \in \mathbb{Z}$, such that $|q_j - \psi(x)| < \varepsilon/3$ for each $j \in \left\{0, 1, \dots, \dfrac{N-4}{5}\right\}$ and $x \in \dfrac{4I+5j}{N}$. Define $\varphi(x) = q_j$ if $x \in \dfrac{4I+5j}{N}$, and extend φ piecewise linearly to I. Then $|\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ for each $x \in I$.

8.4. (b) Denote $\alpha_{i,j} := \varphi_i(x) + \sqrt{2}\varphi_j(y)$ for some $x \in 4I + 5i$ and $y \in 4I + 5j$. If $\alpha_{i,j} = \alpha_{k,l}$, then $(i,j) = (k,l)$. Define $h(\alpha_{i,j}) = v_{i,j}$, and extend h piecewise linearly to $\mathbb{R}$.

8.5. Similarly to 8.4.b.

8.6. (a) Take any point $z \in I^2$. Similarly to 8.2.b for any $k = 1, \dots 5$, except at most two, there exist

$$i, j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N-4}{5}\right\}$$

such that

$$z \in \frac{4I + 5i + k}{N} \times \frac{4I + 5j + k}{N}.$$

Without loss of generality it is true for $k = 1, 2, 3$. Then

$$\left|f(z) - \sum_{k=1}^{5} h(\widetilde{\varphi}_k(z))\right| \leqslant \sum_{k=1}^{3} \left|\frac{1}{3}f(z) - h(\widetilde{\varphi}_k(z))\right| + \sum_{k=4}^{5} |h(\widetilde{\varphi}_k(z))| < 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{|f|}{6} + 2 \cdot \frac{|f|}{3} = \frac{5|f|}{6}.$$

(b) Follows from (a).

9 Deduction of approximative Kolmogorov's theorem from lemma of approximation

For $M \in \{I, I^2\}$ let us denote by $C(M)$ the set of continuous functions $M \to \mathbb{R}$.

9.1. (a) There exists countable dense subset in $C(I)$.

(b) There exists countable dense subset in $C(I^2)$.

9.2. Let $f_l : I^2 \to \mathbb{R}$ be a dense subset in $C(I^2)$. Then

(a) Any set from $\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} PK(f_l)$ is prekolmogorov set for any continuous function $f : I^2 \to \mathbb{R}$.

(b) For $C(I^2)^5$ the «principle of nested balls» is satisfied and Baire's theorem holds. (This means that $C(I^2)^5$ is *complete metric space*.)

(c) $\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} PK(f_l) \neq \emptyset$.

Список литературы

[Ar57] *Arnold, V. I.*, On the representability of a function of two variables in the form $\chi[\phi(x)+\psi(y)]$. (Russian) Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 12 (1957), no. 2(74), 119Ц-121.

[Ar58] *Arnold, V. I.*, On the representability of a function of many variables as a superposition of functions of less number of variables (in Russian). 2 (1958), no. 3, 41Ц-61. `http://ilib.mccme.ru/djvu/mp2/mp2-3.htm`

[BB] W. Blaschke and L. Bol, Geometrie der Gewebe. Berlin, 1938.

[Bu] A.R. Butz, Space filling curves and mathematical programming, Information and Control 12:4 (1968) 314-330,
`http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019995868903677`

[FG] *Z. Feng, P. Gartside,* On Hilbert's 13th Problem, `http://arxiv.org/abs/0909.4561`

[He] T.Hedberg The Kolmogorov superposition theorem, Appendix II to H.S.Shapiro, Topics in Approximation Theory. Lecture Notes in Math., 1971, V. 187, P. 267–275.

[Ka] J.-P. Kahane, Sur le theoreme de superposition de Kolmogorov, J. Approximation Theory 13 (1975), 229-234.

[KF] *A. N. Kolmogorov*, *S. V. Fomin.* Elements of function theory and functional analysis (in Russian). M. Nauka, 1989

[Ox] J. Oxtoby, Measure and category, Springer, 1971.

[Re] I. Reshetnikov, Decomposition of number arrangements in the cube, in Russian.
`https://arxiv.org/abs/1412.8078`

[Sk10] *A. Skopenkov*, Basic embeddings and Hilbert's 13th problem Abridged English translation:
`http://arxiv.org/abs/1003.1586`

[Sk12] *A. Skopenkov*, Ambient homogeneity (in Russian) `http://arxiv.org/abs/1003.5278`

[Th] G. Thomsen Un theoreme topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica sulle superficie isotermo-asintotiche. Bull. Un. Mat. Ital. Bologna, 1927, V. 6, P. 80–85.

[VK] Vainstein, I. A.; Kreines, M. A. Sequences of functions of the form $f(X(x)+Y(y))$. (Russian) Uspehi Mat. Nauk 15 1960 no. 4 (94), 123Ц128.

[ZSS] Elements of mathematics in problems: through olympiads and circles to profession (in Russian). Editors: A. Zaslavsky, A. Skopenkov, M. Skopenkov, MCCME, 2016. `http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf`