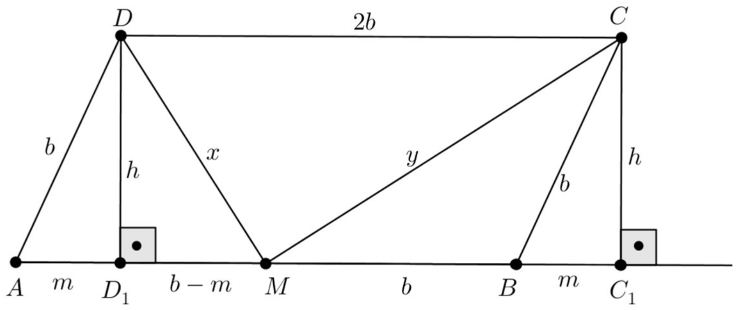
Александар Средојевиќ, Горњи Милановац
Драгољуб Милошевиќ, Горњи Милановац

ЕДНА ЗАДАЧА ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА РЕШАВАЊЕ

Наоѓањето на повеќе начини за решавање на една задача го збогатува знаењето на секоја математичар, па затоа во оваа работа ќе презентираме пет начини за решавање на една иста задача.

Задача. За паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AB}=2\overline{AC}$. Ако M е средината на страната AB, колку степени има $\angle CMD$?

Решение 1. Нека C_1 и D_1 се подножјата на нормалите од точките C и D на правата AB (види цртеж). Правоаголните триаголници ADD_1 и BCC_1 се складни ($\overline{AD}=\overline{BC}=b$, $\overline{DD_1}=\overline{CC_1}=h$), па затоа $\overline{AD_1}=\overline{BC_1}=m$. Са x и y да ги означиме должините на отсечките DM и CM. Од Питагоровата теорема применета на правоаголните триаголници MDD_1, MCC_1 и ADD_1, имаме:



$$x^2=h^2+(b-m)^2$$
$$y^2=h^2+(b+m)^2 \text{ и}$$
$$b^2=h^2+m^2, \text{т.е. } h^2=b^2-m^2.$$

Ако ги собереме првите две равенства добиваме

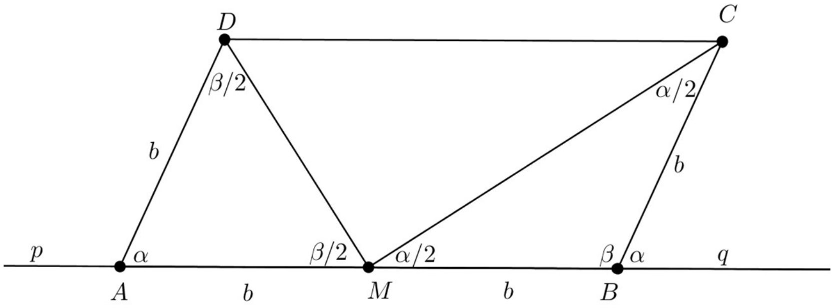
$$x^2+y^2=h^2+(b-m)^2+h^2+(b+m)^2=2(h^2+b^2+m^2),$$

а оттука, бидејќи $h^2=b^2-m^2$, следува

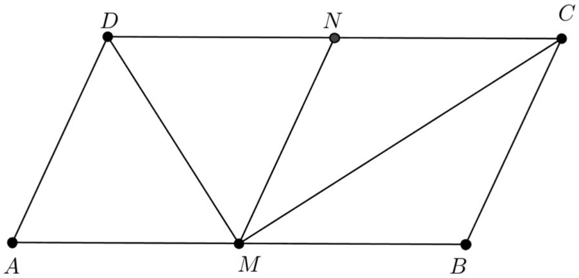
$$x^2+y^2=2(b^2-m^2+b^2+m^2)=4b^2, \text{ т.е. } x^2+y^2=(2b)^2.$$

Бидејќи последното равенство важи за страните $x, y, 2b$ на триаголникот CDM, од Питагоровата теорема следува дека овој триаголник е правоаголен, со прав агол спроти страната $\overline{CD}=2b$. Ова, пак, значи дека $\angle CMD=90^\circ$.

Решение 2. Триаголниците AMD и BCM се рамнокраки (види цртеж). Бидејќи $\angle pAD = \beta$ и $\angle CBq = \alpha$ се надворешни агли за триаголниците AMD и BCM, имаме $\angle AMD = \angle ADM = \frac{\beta}{2}$ и $\angle BMC = \angle BCM = \frac{\alpha}{2}$. Тогаш $\angle CMD = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$, а оттука, бидејќи $\alpha + \beta = 180^\circ$, добиваме дека $\angle CMD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.



Решение 3. Нека тачката N е средина на страната CD (цртеж десно). Тогаш дадениот паралелограм е поделен на два складни ромба $AMND$ и $BCNM$, па затоа $\overline{MN} = \overline{CN} = \overline{DN}$. Но, тоа значи дека кружницата со дијаметар CD ја содржи точката M, од што следува дека $\angle CMD = 90^\circ$.



Решение 4. Ќе го користиме претходниот цртеж. Бидејќи дијагоналите на ромбот се и симетрали на внатрешните агли, добиваме дека CM и DM се симетрали два напоредни агли $\angle BMN$ и $\angle AMN$. Затоа аголот меѓу нив е половина од рамен агол, т.е. $\angle CMD = 90^\circ$.

Решение 5. Нека N е средина на страната CD и O пресек дијагонала ромбот $CNMB$ (цртеж десно). Јасно е дека $\overline{BN} = \overline{DM}$ и $BN \| DM$. Затоа $\angle CMD = \angle CON$, како агли со паралелни краци. Но, дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол, т.е. $\angle CON = 90^\circ$, па заклучуваме дека $\angle CMD = 90^\circ$.