28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna varijanta, 22. oktobar 2006. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Na tabli su napisana u rastućem poretku dva prirodna broja x i y, ($x \leq y$). Peđa zapisuje u svesku x^2 (kvadrat prvog broja), a zatim na tabli zamenjuje mesta brojevima x i $y-x$, pišući ih u rastućem poretku. Sa novim brojevima na tabli Peđa ponavlja tu operaciju, itd. sve dotle dok jedan od brojeva na tabli ne postane nula. Čemu će u tom momentu biti jednak zbir brojeva u Peđinoj svesci?

2. Zna se da lažovi uvek lažu, istinoljubci uvek govore istinu, a prevrtljivci nekad lažu, a nekad govore istinu. Vi možete postavljati pitanja na koja se odgovara sa “da” ili “ne”. (Na primer:”Da li je istina da je ovaj čovek prevrtljivac?”)

(1 poen) **a)** Pred vama su trojica – lažov, istinoljubac i prevrtljivac, koji znaju ko je ko među njima. Kako vi to možete saznati?

(3 poena) **b)** Pred vama su četvorica – lažov, istinoljubac i dva prevrtljivca i sva četvorica znaju ko je ko među njima. Dokažite da se prevrtljivci mogu dogovoriti da odgovaraju tako da vi, postavljajući pitanja toj četvorici, ni za koga od njih ne možete sa sigurnošću utvrditi ko je ko.

3. (2 poena) **a)** Napisano je 2007 prirodnih brojeva većih od 1. Dokažite da se može precrtati jedan broj, tako da se proizvod ostalih brojeva može predstaviti u vidu razlike kvadrata dva prirodna broja.

(2 poena) **b)** Napisano je 2007 prirodnih brojeva većih od 1, među kojima je jedan jednak 2006. Pokazalo se da među napisanim brojevima postoji samo jedan broj, tako da se proizvod ostalih brojeva može predstaviti u vidu razlike kvadrata dva prirodna broja. Dokažite da je taj broj 2006.

4. (4 poena) Na produžetku stranice BC trougla ABC preko temena B označena je duž BB′ jednaka stranici AB. Simetrale spoljašnjih uglova kod temena B i C seku se u tački M. Dokažite da tačke A, B′, M i C pripadaju istoj kružnici.

5. (4 poena) Koji je najveći broj nekonveksnih podudarnih mnogouglova na koje se može razrezati kvadrat, tako da sve stranice mnogouglova budu paralelne stranicama kvadrata i da se ni koja dva od tih mnogouglova ne mogu dobiti jedan iz drugog paralelnim pomeranjem (translacijom)? /Paralelno pomeranje – pomak bez obrtanja/

28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna varijanta, 22. oktobar 2006. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Na tabli su napisana tri prirodna broja *x, y, z.* Peđa zapisuje u svesku proizvod bilo koja dva od njih, a na tabli umanjuje treći broj za 1. Sa nova tri broja na tabli Peđa ponavlja istu operaciju, itd. sve dotle dok jedan od brojeva na tabli ne postane nula. Čemu će u tom momentu biti jednak zbir brojeva u Peđinoj svesci?

2. (4 poena) Dat je tangentni četvorougao. Dodirne tačke četvorougla i kružnice oko koje je opisan spojene su redom dužima. U tako nastale trouglove upisane su kružnice. Dokažite da su dijagonale četvorougla čija su temena centri tih kružnica uzajamno normalne.

3. (4 poena) Tablica 2006×2006 popunjena je brojevima 1, 2, 3, … 2006^2. Dokažite da se u takvoj tablici mogu naći dva broja u poljima sa zajedničkom stranicom ili temenom, takva da je njihov zbir deljiv sa 4.

4. (4 poena) Date su dve beskonačne (na jednu stranu) progresije: aritmetička a_1, a_2, a_3, … i geometrijska b_1, b_2, b_3, …, pri čemu svi brojevi koji se nalaze među članovima geometrijske progresije takođe se nalaze i među članovima aritmetičke progresije. Dokažite da je količnik geometrijske progresije (*lj*) ceo broj.

5. (5 poena) Može li se upisati pravilni oktaedar u kocku tako da se temena oktaedra nalaze na ivicama kocke? (Pravilni oktaedar ima 6 temena, iz svakog njegovog temena polaze 4 ivice, a sve njegove strane su jednakostranični trouglovi.)

28. TURNIR GRADOVA
Jesenje kolo.
Osnovna varijanta, 29. oktobar 2006. god.
8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Oko pravilnog 7-ugla opisna je kružnica i u njega je upisana kružnica. Isto je urađeno i sa pravilnim 17 – uglom. Svaki od mnogouglova se posle toga našao u svom kružnom prstenu. Pokazalo se da su površine tih prstenova jednake. Dokažite da su stranice tih mnogouglova jednake.

2. (5 poena) Došavši u novu kompaniju Čičikov je želeo da sazna ko se s kim poznaje. Da bi sve zapamtio, on je crtao kružnicu i svakog člana prikazivao pomoću tetiva (duži), pri čemu se duži onih koji se poznaju seku, a onih koji se ne poznaju ne seku. Čičikov je uveren da takva kolekcija tetiva postoji za ma koju kompaniju. Da li je on u pravu? (Poklapanje krajeva tetiva smatra se njihovim presekom).

3. U kvadratu 3×3 raspoređeni su brojevi: *a, b, c* u prvoj vrsti; *d, e, f* u drugoj; *g, h, i* u trećoj (tim redom).

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Zna se da je kvadrat magičan: zbirovi brojeva u svakoj vrsti, svakoj koloni i na svakoj dijagonali su jednaki. Dokažite da je:

(3 poena) **a)** $2(a+c+g+i) = b+d+f+h+4e$

(3 poena) **b)** $2(a^3+c^3+g^3+i^3) = b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$

4. (6 poena) U oštrougli trougao upisana je kružnica poluprečnika R. Onda su povučene tri tangente te kružnice, koje dele trougao na tri pravougla trougla i šestougao. Obim šestougla iznosi LJ. Odredite zbir prečnika kružnica upisanih u nastale pravougle trouglove.

5. Omotnicom (omotom) ravne slike dimenzija 1×1 zvaćemo pravougaoni list papira površine 2, kojim možemo, ne razrezujući ga, sasvim uviti (zamotati) sliku sa obe strane. Jasno je da su omotnice pravougaonik 2×1 i kvadrat stranice $\sqrt{2}$.

(4 poena) **a)** Dokažite da postoje i druge omotnice.

(3 poena) **b)** Dokažite da ima beskonačno mnogo omotnica.

6. (8 poena) Neka je $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, gde je $\frac{a_n}{b_n}$ neskrativ razlomak. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva *n*, za koje je iapunjena nejednakost $b_{n+1} < b_n$.

7. (9 poena) Voditelj kviza ima špil od 52 karte. Gledaoci žele da saznaju u kom poretku su složene karte (ne precizirajući pri tome – da li odozgo nadole ili odozdo nagore). Dopušteno je voditelju postavljati pitanja oblika: “Koliko se karata nalazi između te i te karte?” Jedan od gledalaca je krišom video kojim redom su složene karte. Koliko najmanje pitanja on mora postaviti, da bi ostali gledaoci, prema odgovorima na ta pitanja, mogli saznati redosled karata u špilu” ?

28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Osnovna varijanta, 29. oktobar 2006. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (5 poena) Došavši u novu kompaniju Čičikov je želeo da sazna ko se s kim poznaje. Da bi sve zapamtio, on je crtao kružnice i svakog člana prikazivao pomoću tetiva (duži), pri čemu se duži onih koji se poznaju seku, a onih koji se ne poznaju ne seku. Čičikov je uveren da takva kolekcija tetiva postoji za ma koju kompaniju. Da li je on u pravu? (Poklapanje krajeva tetiva smatra se njihovim presekom).

2. (6 poena) Na stranicama BC, AC i AB oštrouglog trougla ABC uzete su redom tačke A_1, B_1 i C_1 tako da su poluprave A_1A, B_1B i C_1C bisektrise uglova trougla $A_1B_1C_1$. Dokažite da su duži AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla ABC.

3. (6 poena) U broju a = 0,12457… n-ta cifra posle zapete jednaka je cifri levo od zapete u broju $n\sqrt{2}$. Dokažite da je a iracionalan broj.

4. (6 poena) Može li se neka prizma razdeliti na piramide (koje nemaju zajedničkih delova) tako da osnova svake od piramida leži u jednoj od osnova (baza) prizme, a naspramno teme (vrh) pripada drugoj osnovi prizme?

5. (7 poena) Neka je $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, gde je $\frac{a_n}{b_n}$ neskrativ razlomak. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n, za koje je ispunjena nejednakost $b_{n+1}<b_n$.

6. Reći ćemo da je špil karata složen pravilno ako se ma koji par uzastopnih karata slaže po boji ili po vrednosti, što je takođe tačno za kartu na vrhu i kartu na dnu špila i na vrhu je “kec”(as) pik. Dokažite da je broj načina da se pravilnio složi špil karata:

(3 poena) **a)** deqiv sa 12! ,

(5 poena) **b)** deqiv sa 13! .

7. Pozitivni brojevi $x_1,\ldots,x_k$ zadovoqavaju nejednakosti

$$x_1^2+\ldots+x_k^2<\frac{x_1+\ldots+x_k}{2} \quad \text{i} \quad x_1+\ldots+x_k<\frac{x_1^3+\ldots+x_k^3}{2}$$

(3 poena) **a)** Dokažite da je $k>50$.

(3 poena) **b)** Nađite primer takvih brojeva za neko k.

(3 poena) **v)** Odredite najmanje k za koje je primer moguć.

28. TURNIR GRADOVA
Prolećno kolo.

Pripremna varijanta, 25. februar 2007. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Pet duži je nacrtano (ne podižući olovku sa papira) tako da je dobijena petokraka zvezda, podeljena povučenim dužima na pet trouglova i jedan petougao. Pokazalo se da su svih 5 trouglova podudarni. Da li je tada obavezno petougao pravilan (tj. ima jednake sve stranice i sve uglove jednake)?

2. (4 poena) Na tabli su napisana dva 2007-cifrena broja. Zna se da kod svakog možemo precrtati 7 cifara tako da ostanu jednaki brojevi. Dokažite da u polazne brojeve možemo ubaciti (upisati) po 7 cifara, tako da se takođe dobiju jednaki brojevi.

3. (4 poena) Koliko najmanje topova možemo postaviti na šahovsku tablu 8×8 tako da sva bela polja budu napadnuta (tučena) tim topovima? (Napadnutim poljima smatramo sva polja kolone i reda u kojima se nalazi top).

4. (4 poena) Data su tri realna broja različita od nule. Ako ih, u bilo kom poretku, uzmemo za koeficijente kvadratnog trinoma, onda će taj trinom imati realan koren (realnu nulu). Da li je tačno da će svaki od tih trinoma imati pozitivan koren?

5. **a)** (1 poen) Torta ima oblik trougla kod koga je jedan ugao tri puta veći od drugog. Kutija za tortu ima oblik istog takvog trougla, ali simetričnog s njim u odnosu na neku pravu. Kako razrezati tortu na dva dela koji se (bez obrtanja-prevrtanja) mogu smestiti u tu kutiju?

b) (4 poena) Uradite isti zadatak, ali za tortu koja ima oblik tupouglog trougla u kome je tup ugao dva puta veći od jednog od oštrih uglova.

(Tortu i kutiju smatrajte ravnim figurama.)

28. TURNIR GRADOVA
Prolećno kolo.

Pripremna varijanta, 25. februar 2007. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Polja table 9×9 obojena su crnom i belom bojom kao na šahovskoj tabli Ugaona polja su bela. Koji najmanji broj topova treba postaviti na tu tablu da bi ti topovi tukli sva bela polja. (Kaže se da top tuče neko polje ako se ono nalaze u vrsti i koloni u kojoj se taj top nalazi).

2. (4 poena) Polinom $x^3 + px^2 + qx + r$ ima tri korena u intervalu (0, 2) . Dokažite da važi nejednakost: −2 < *p*+*lj*+*r* < 0

3. (4 poena) Prava dodiruje kružnicu u tački A. Na pravoj je izabrana tačka B, pa je duž AB rotirana za neki ugao oko centra kružnice. Tako je dobijena duž A′B′. Dokažite da prava, koja prolazi kroz tačke dodira A i A′**,** polovi duž BB′.

4. (4 poena) Niz nula i jedinica nastao je na sledeći način: na *k*-tom mestu piše se nula ako je zbir cifara (rednog) broja *k* paran, a inače (ako je zbir cifara broja *k* neparan) piše se jedinica. Dokažite da je taj niz cifara neperiodičan. (Evo početka tog niza: 10101010110101010101001…..)

Niz nazivamo periodičnim, ako postoji prirodan broj *d*, takav da se uvek podudaraju dva člana niza, čiji se indeksi (redni brojevi) razlikuju za *d.*

5. a) (3 poena) Torta ima oblik tupouglog trougla kod kojeg je tup ugao dva puta veći od jednog od oštrih uglova. Kutija za tortu ima oblik istog takvog trougla, ali simetričnog s njim u odnosu na neku pravu. Kako razrezati tortu na dva dela koji se (bez obrtanja-prevrtanja) mogu smestiti u tu kutiju?

b) (3 poena) Uradite isti zadatak za tortu koja ima oblik trougla sa uglovima od 20^o, 30^o i 130^o.

(Tortu i kutiju smatrajte ravnim figurama.)

28. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Osnovna varijanta, 4. mart 2007. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Dat je prirodan broj *N*. Da bismo našli ceo broj, najbliži kvadratnom korenu iz *N*, iskoristićemo sledeći način: među kvadratima prirodnih brojeva nađimo broj a^2, najbliži broju *N*; tada će i *a* biti traženi broj. Da li uvek takav način daje pravilan odgovor?

2. (4 poena) Na stranicama jediničnog kvadrata označene su tačke *K, L, M* i N tako da je *KM* paralelno dvema stranicama kvadrata, a *LN* paralelno sa dve druge stranice kvadrata. Duž *KL* od kvadrata odseca trougao obima 1. Kolika je površina trougla koji od kvadrata odseca duž *MN*?

3. (5 poena) Pera je uzeo dvadeset uzastopnih prirodnih brojeva, zapisao ih je jedan za drugim nekim redom i tako dobio broj M. Vasa je uzeo dvadeset jedan uzastopni prirodan broj, zapisao ih jedan za drugim po nekom redu i tako je dobio broj *M*. Da li se moglo dogoditi da bude *M*=*N* ?

4. (poena) U konveksnom mnogouglu povučeno je nekoliko dijagonala (moguće i takvih da se seku) tako da se ni u kojoj tački unutar mnogougla ne seku tri ili više dijagonala. Pokazalo se da je na kraju mnogougao podeljen na trouglove. Koliki je najveći mogući broj tih trouglova?

5. (7 poena) Pronađite sve rastuće aritmetičke progresije, čiji su članovi prosti brojevi sa svojstvom da je broj članova progresije konačan i veći od razlike progresije.

6. (8 poena) Kod četvorougla *ABCD* stranice *AB, BC* i *CD* su jednake, tačka *M* je središte stranice *AD*. Poznato je da je ugao *BMC* jednak 90^0. Nađite koliki je ugao između dijagonala četvorougla *ABCD.*

7. Kapetan Vrungel u svojoj kabini je promešao špil od 52 karte i rasporedio ih po krugu, ostavivši jedno slobodno mesto. Mornar Fuks s palube, ne odvajajući se od svog kormila i ne znajući početni raspored, imenuje kartu. Ako je ta karta do slobodnog mesta, Vrungel je premešta na to slobodno mesto, ne govoreći Fuksu o tome ništa. U protivnom slučaju ništa se ne dešava. Fuks onda imenuje još jednu kartu, i tako koliko hoće puta, sve dok on ne kaže “stop”.

(5 poena) a) Može li Fuks postići to da se posle “stop” svaka karta nađe tamo gde nije bila na početku?

(5 poena) b) Može li Fuks postići to, da posle “stop” pored slobodnog mesta ne bude as (kec) pik?

28. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Osnovna varijanta, 4. mart 2007. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Na paraboli $y = x^2$ uzete su četiri tačke *A, B, C, D*, tako da se duži *AB* i *CD* seku na ordinatnoj osi. Nađite apscisu tačke *D,* ako su apscise tačaka *A, B* i *C* redom *a, b* i *c*.

2. (5 poena) Konveksna figura *F* ima sledeće svojstvo: ma koji jednakostranični trougao stranice 1 može se paraleln o premestiti tako da se sva njegova temena nađu na obodu (granici) figure *F*. Sledi li iz tog svojstva da je *F* krug?

3. (5 poena) Neka je *f(x)* neki polinom nenultog stepena. Može li se desiti da jednačina *f(x)=a* za ma koju vrednost *a* ima paran broj rešenja?

4. Kapetan Vrungel u svojoj kabini je promešao špil od 52 karte i rasporedio ih po krugu, ostavivši jedno slobodno mesto. Mornar Fuks s palube, ne odvajajući se od svog kormila i ne znajući početni raspored, imenuje kartu. Ako je ta karta do slobodnog mesta, Vrungel je premešta na to slobodno mesto, ne govoreći Fuksu o tome ništa. U protivnom slučaju ništa se ne dešava. Fuks onda imenuje još jednu kartu, i tako koliko hoće puta, sve dok on ne kaže “stop”.

(4 poena) a) Može li Fuks postići to da se posle “stop” svaka karta nađe tamo gde nije bila na početku?

(4 poena) b) Može li Fuks postići to, da posle “stop” pored slobodnog mesta ne bude as (kec) pik?

5. (8 poena) Od pravilnog oktaedra stranice 1 odrezano je 6 uglova - piramidica sa kvadratnom osnovom i bočnom ivicom $\frac{1}{3}$. Dobijen je poliedar čije su strane kvadrati i pravilni šestouglovi. Može li se kopijama takvog poliedra popuniti prostor?

6. (4 poena) Dat je iracionalan broj *a*, takav da je $0<a<\frac{1}{2}$. Prema njemu se određuje novi broj a_1 kao manji od dva broja $2a$ i $1-2a$. Prema ovom broju se onda određuje a_2, i tako dalje.

(4 poena) a) Dokažite da je za neko *n* ispunjena nejednakost $a_n < \frac{3}{16.}$.

(4 poena) b) Može li se dogoditi da bude $a_n > \frac{7}{40}$ za svaki prirodan broj *n*?

7. (8 poena) Stranice trougla *ABC* vide se iz tačke *T* pod uglovima od 120^o. Dokažite da se prave simetrične pravama *AT, BT* i *CT* u odnosu na prave *BC, CA* i *AB* (tim redom) seku u jednoj tački.

28-й Международный математический Турнир городов
Решения задач
(написаны Л.Медниковым и А.Шаповаловым)

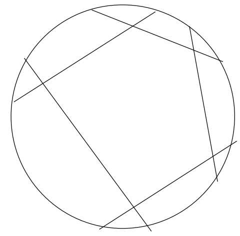
Основной вариант, 8-9 классы.

1. Вокруг правильного 7-угольника описали окружность и вписали в него окружность. То же проделали с правильным 17-угольником. В результате каждый из многоугольников оказался расположенным в своем круговом кольце. Оказалось, что площади этих колец одинаковы. Докажите, что стороны многоугольников одинаковы.

Решение. Пусть $2a$ – длина стороны правильного многоугольника, r и R – радиусы вписанной и описанной окружности соответственно. Вписанная окружность касается стороны в ее середине, поэтому проведенный туда радиус перпендикулярен стороне. По теореме Пифагора $a^2+r^2=R^2$. Поэтому площадь кольца между этими окружностями равна $\pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$, откуда и следует утверждение задачи.

2. Попав в новую компанию, Чичиков узнавал, кто с кем знаком. А чтобы запомнить это, он рисовал окружность и изображал каждого члена компании хордой, причем хорды знакомых между собой пересекались, а незнакомых – нет. Чичиков уверен, что такой набор хорд есть для любой компании. Прав ли он? (Совпадение концов хорд считается пересечением).

Решение. Чичиков не прав, вот контрпример. Пусть есть хозяин, три его сына и три гостя. Гости попарно незнакомы, хозяин с ними всеми знаком, а три сына знакомы с тремя разными парами гостей. Хорды гостей пересекают хорду хозяина в трех различных точках. Одна точка – средняя, две – крайние, соотвественно назовем средними и крайними и хорды гостей, и самих гостей. Ясно, что крайние хорды лежат по разные стороны от средней. Хорда сына, знакомого лишь с крайними гостями должна пересечь крайние хорды, но не пересечь среднюю. Противоречие.



Замечание. Есть контрпример и на 6 человек, но его несколько сложнее обосновать. Пусть граф знакомств – пятиугольная пирамида. Хорды, соответствующие вершинам основания пирамиды, должны образовать 5-угольник с “хвостиками” (см. рис.), а хорда, соответствующая вершине, не может пересечь все пять его “сторон”.

Идея неконструктивного решения для знатоков. “Легко” видеть, что все “схемы Чичикова” на n человек можно реализовать на сторонах и диагоналях правильного $2n$-угольника. Число таких схем Чичикова (с указанием номеров) равно $(2n)!\cdot 2^{-n}$. При этом разным схемам может соответствовать один и тот же граф знакомств. Но число всевозможных графов знакомств (с нумерацией вершин) равно $2^{n(n-1)/2}$. При $n = 14$ второе число больше:

$$20! = 2\cdot(3\cdot5)\cdot4\cdot(6\cdot10)\cdot(7\cdot9)\cdot8\cdot(11\cdot21)\cdot(12\cdot20)\cdot(13\cdot19)\cdot(14\cdot18)\cdot(15\cdot17)\cdot16\cdot22\cdot\ldots\cdot28 <$$
$$< 2\cdot4^3\cdot8^5\cdot16^{11}\cdot32^9 = 2\cdot2^6\cdot2^{15}\cdot2^{44}\cdot2^{35} = 2^{101} = 2^{91}\cdot2^{14}.$$

Следовательно, существует граф знакомств, который не может быть реализован схемой Чичикова.

3. В квадрате 3×3 расставлены числа (см. рис.). Известно, что квадрат магический: сумма чисел в каждом столбце, в каждой строке и на каждой диагонали одна и та же. Докажите, что

a	b	c
d	e	f
g	h	i

а) [3] $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.

б) [3] $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.

Первое решение. **а**) Прибавим к обеим частям $b + d + f + h$ получим очевидное равенство $(a + b + c) + (a + d + g) + (c + f + i) + (g + h + i) = 2(b + e + h) + 2(d + e + f)$.

б) 1) Пусть S – сумма чисел в каждой строке. Тогда $a + i = c + g = b + h = d + f = S - e$. Подставив в равенство из п. а), получим $4(S - e) = 2(S - e) + 4e$, откуда $2S = 6e$,
то есть $S = 3e$.

2) Докажем сначала равенство $2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2$.

Для этого запишем его в виде

$$(a + c)^2 + (c + i)^2 + (a + g)^2 + (g + i)^2 - 2(ac + ci + ag + gi) =$$
$$= (h + e)^2 + (d + e)^2 + (f + e)^2 + (b + e)^2 - 2e(b + d + f + h).$$

Суммы квадратов в левой и правой частях равны, поскольку $a + c = S - b = h + e$, и т.д.

Кроме того, $ac + ci + ag + gi = (a + i)(c + g) = (S - e)^2 = 2e(S - e) = e(b + d + f + h)$.

3) Заметим, что равенство п. б) остается верным при увеличении всех чисел таблицы на одно и то же число. Действительно,

$$2((a + t)^3 + (c + t)^3 + (g + t)^3 + (i + t)^3) =$$
$$= 2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) + 6t(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) + 6t^2(a + c + g + i) + 8t^3 =$$
$$= b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 + 3t(b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2) + 3t^2(b + d + f + h + 4e) + 8t^3 =$$
$$= (b + t)^2 + (d + t)^2 + (f + t)^2 + (h + t)^2 + 4(e + t)^2.$$

Поэтому достаточно доказать равенство для случая, когда $e = 0$. Но в этом случае равенство очевидно, поскольку $a + i = c + g = a + c = g + i = b + h = d + f = 2e = 0$, и обе части равенства равны нулю.

Второе решение. Сложив 4 суммы: по средней строке. среднему столбцу и диагоналям, мы получим сумму всех чисел таблицы плюс утроенное число в центральной клетке: $4S = 3S + 3e$, то есть $S = 3e$.

Поскольку $b + h = S - e = 2e$, обозначим $b = e - 2u$, $h = e + 2u$.

Поскольку $a + c = S - b = 2e + 2u$, обозначим $a = e + u + v$, $c = e + u - v$.

Последовательно находим

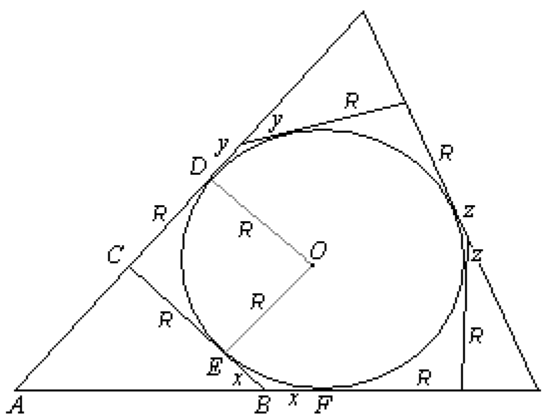
$$i = S - (a + e) = e - u - v,\ g = S - (c + e) = e - u + v,\ d = S - (a + g) = e - 2v,\ f = e + 2v.$$

Теперь равенство из п. а) очевидно. Для проверки равенства п. б) мы будем многократно использовать очевидное соотношение $(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2$. Имеем:

$$2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = 2((e + u + v)^3 + (e + u - v)^3 + (e - u + v)^3 + (e - u - v)^3) =$$
$$= 4((e + u)^3 + (e - u)^3) + 12((e + u) + (e - u))v^2 = 8e^3 + 24e(u^2 + v^2),$$
$$b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 = (e + 2u)^3 + (e - 2u)^3 + (e + 2v)^3 + (e - 2v)^3 + 4e^3 =$$
$$= 2e^3 + 6e(2u)^2 + 2e^3 + 6e(2v)^2 + 4e^3 = 8e^3 + 24e(u^2 + v^2)$$

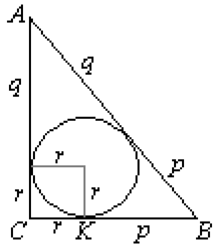
4. В остроугольный треугольник вписана окружность радиуса R. К окружности проведены три касательные, разбивающие треугольник на три прямоугольных треугольника и шестиугольник. Периметр шестиугольника равен Q. Найдите сумму диаметров окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники.

Решение. Точки касания вписанной окружности со сторонами шестиугольника и его вершины разбивают его периметр на 12 отрезков (см. например рис.). Отрезки, выходящие из вершин прямых углов шестиугольника (на каких бы сторонах треугольника эти вершины не лежали) равны R (например, проведя радиусы OD и OE в точки касания, получим квадрат $CDOE$, значит, $CD=CE=R$). Отрезки касательных, проведенных из трех остальных вершин шестиугольника обозначим x, y, z (см. рис.). Тогда периметр шестиугольника $Q = 6R + 2x + 2y + 2z$.



Как известно, диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен сумме катетов минус гипотенуза (см, например, рис. справа). Для треугольника ABC получаем

$AC + BC - AB = (AD - R) + (R + x) - (AF - x) = 2x + (AD - AF) = 2x$, поскольку касательные AD и AF равны. Аналогично, два других диаметра равны $2y$ и $2z$, откуда их сумма $2x+2y+2z = Q - 6R$.



Идея 2-го решения (для знатоков). Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке K. Как известно, $CK = BE = x$ (E – точка касания вневписанной окружности). С другой стороны, CK равен радиусу вписанной окружности. Поэтому диаметр ее равен $2x$.

5. Оберткой плоской картины размером 1×1 назовем прямоугольный лист бумаги площади 2, которым можно, не разрезая его, полностью обернуть картину с обеих сторон. Ясно, что прямоугольник 2×1 и квадрат со стороной $\sqrt{2}$ – обертки.

а) Докажите, что есть и другие обертки.

б) Докажите, что оберток бесконечно много.

Решение. Покажем, что прямоугольник $\sqrt{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ – обертка. Наложим его на квадрат так, чтобы две вершины квадрата оказались на длинных сторонах, а третья – в середине короткой (см. рис.1). Процесс обертывания изображен на рис. 2 и 3.

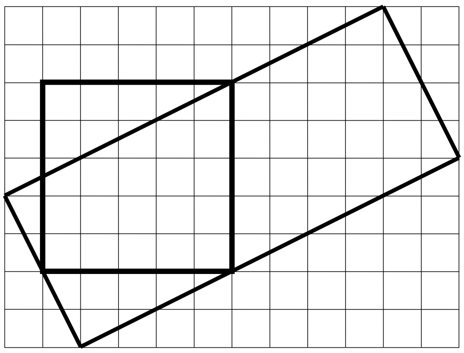


Рис. 1

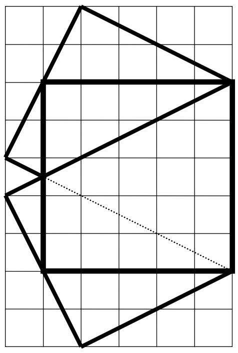


Рис. 2

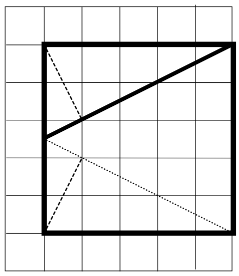


Рис. 3

б) Разделим вертикальные стороны квадрата на n частей. На рис 4 показана обертка квадрата параллелограммом, меньшая сторона которого равна $\dfrac{2}{n}$ (изображен случай $n = 5$). На рис. 5 показано как превратить параллелограмм в прямоугольник (при этом выступаюшие за горизонтальные стороны квадрата прямоугольные треугольники распадаются на 2 части). На рисунке 6 показано (для n=3) как их надо загибать.

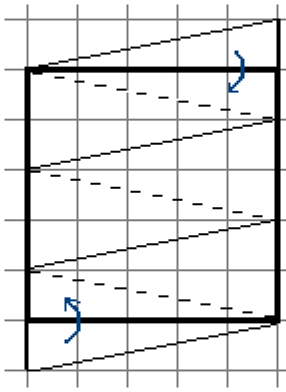


Рис. 4

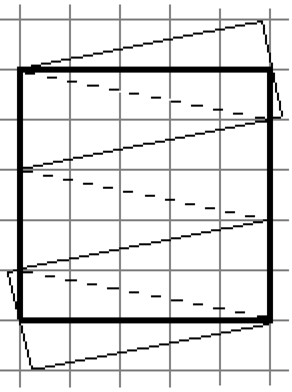


Рис. 5

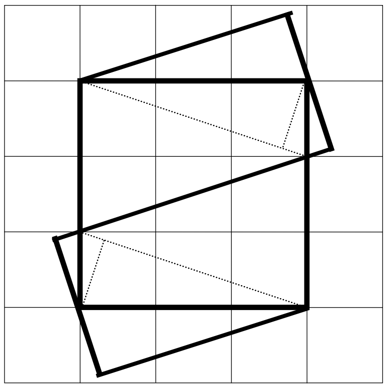


Рис. 6

Замечание. При $n = 1$ получается обертка квадратом $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$, при $n = 2$ – прямоугольником $\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}$ (рис 3), при $n = 3$ – прямоугольником $\sqrt{10}\times\frac{2}{\sqrt{10}}$ (рис. 6).

6. Пусть $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$, где $\frac{a_n}{b_n}$ – несократимая дробь. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, при которых выполнено неравенство $b_{n+1} < b_n$.

Решение 1. Пусть $n = p(p-1)-1$, где p – нечетное простое число.

Заметим, что b_{n+1} не делится на p. Действительно, в соответствующей сумме только знаменатели дробей $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{2p}$, …, $\frac{1}{(p-1)p}$ делятся на p, но их можно сгруппировать попарно так, чтобы знаменатель суммы на p не делился:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{(p-1)p} = \frac{1}{p-1},\quad \frac{1}{2p}+\frac{1}{(p-2)p} = \frac{1}{2(p-2)},\ \dots$$

В то же время $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{a_{n+1}(p-1)p-b_{n+1}}{b_{n+1}(p-1)p}$.

Пусть числитель и знаменатель последней дроби удалось сократить на d:

$$a_{n+1}(p-1)p \equiv b_{n+1} \pmod{d},\quad b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}.$$

Тогда $a_{n+1}(p-1)^2p^2 \equiv b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}$. Числа d и p взаимно просты (иначе b_{n+1} кратно p). Числа d и a_{n+1} тоже взаимно просты (иначе b_{n+1} делится на их общий делитель, то есть a_{n+1} и b_{n+1} не взаимно просты). Поэтому $(p-1)^2$ делится на d. Следовательно, $d \le (p-1)^2$.

Значит, $b_n \ge \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{p-1} > b_{n+1}$, и утверждение задачи следует из бесконечности множества простых чисел.

Решение 2. *(А.Трепалин)* Докажем, что подходят n вида $2\cdot3^k-1$.

Рассмотрим дроби со знаменателями $b_{2\cdot3^k-1}$ и $b_{2\cdot3^k}$.

Имеем $a_{2\cdot3^k-1}/b_{2\cdot3^k-1}=1+1/2+\ldots+1/3^k+\ldots+1/2\cdot3^k-1=p/(q\cdot3^u)+1/3^k=(3^{k-u}p+q)/3^kq$

(где числа p и q взаимно просты друг с другом и с числом 3; $u<k$),

$a_{2\cdot3^k}/b_{2\cdot3^k}=1+\ldots+1/3^k+\ldots+1/2\cdot3^k= p/(q\cdot3^u)+1/3^k+1/2\cdot3^k =(2\cdot3^{k-1-u}p+q)/2\cdot3^{k-1}q$

Имеем $b_{2\cdot3^k-1}>b_{2\cdot3^k}$ (первая дробь несократима, а вторая сократима не более чем на 2).

7. У ведущего есть колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (при этом не уточняя – сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида “Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?”. Один из зрителей подсмотрел, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопро-сов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

Ответ. За 34 вопроса.

Решение. Первый вопрос зритель задает про две крайние карты. Ответ 50 покажет всем, что они в самом деле крайние. Назовем любую из них 1-й (сверху или снизу – нам не важно), тогда другая – 52-я. Теперь уже надо дать возможность все остальные номера карт определить однозначно. Назовем 2-ю карту дыркой, и вторым вопросом спросим про две карты рядом с дыркой (то есть 1-ю и 3-ю). Ответ 1 задает положение 3-й карты однозначно. Далее будем продолжать задавать вопросы парами: в нечетных вопросах называем две самые крайние карты из еще не упомянутых (одна из них была дыркой, другая – недыркой), назначаем новой дыркой ранее неупомянутую карту рядом с недыркой, и следующим четным вопросом спрашиваем про две карты рядом с дыркой. Так, в первой паре вопросов он называет 1-ю, 52-ю и 3-ю карты, во второй – 2-ю, 51-ю и 49-ю карты, в третьей паре – 4-ю, 50-ю и 6-ю карты и т.д. Как видим, дырки по очереди возникают то ближе к началу, то ближе к концу. В отличие от первой тройки для каждой следующей тройки карт после ответов на очередную пару вопросов теоретически есть два возможных расположения: основное (то, что на самом деле) и побочное (крайние карты меняются местами, средняя передвигается соответственно). Так, из ответов на 3-й и 4-й вопросы следует, что вторая тройка карт – это 2, 51 и 49 либо 2, 51 и 4. Эта неопределенность исчезнет, однако, после ответа на следующий (в примере – на 5-й) вопрос. Суть в том, что максимальное число карт между ранее не упомянутыми крайними картами в побочном варианте меньше, чем в основном (см. рис, где карты одной тройки обозначены одинаковой буквой, неопределенная – тройка C):

Основной abaC_C……………………………………bCba

Побочный abaC……………………………….........CbCba

Так задаем 33 вопроса. Последний 34-й вопрос зададим про крайнюю и карту рядом с ней (25-ю и 26-ю) (см. рис, предпоследняя и последняя тройка обозначены буквами p и Q соответственно):

abacdcefeghgijiklkmnmopoQQ_pQpnonlmljkjhihfgfdedbcba

Тогда положение последней тройки и единственной оставшейся карты определится однозначно.

Покажем, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. Разобьем изначально все карты на 52 группы по одной карте. При вопросе про две карты из разных групп объединяем эти группы в одну. Каждый вопрос уменьшает число групп максимум на одну. Если задано не более 33 вопросов, то останется не менее 52–33=19 групп. Среди них групп из 3 карт – не более 17. Значит, либо найдутся две группы по одной карте, либо группа из ровно двух карт. В обоих случаях можно эту пару карт поменять местами, не трогая остальных: все ответы не изменятся. Тем самым, порядок не восстанавливается однозначно.

Основной вариант, 10-11 классы

1. См. задачу **2** для 8-9 классов.

2. На сторонах BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что лучи A_1A, B_1B и C_1C являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC.

Решение. Проведем биссектрисы внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть биссектрисы внешних углов B_1 и C_1 пересекаются в точке A_2, и т.д. Через точку A_2 проходит также биссектриса угла A_1 (поскольку точка A_2 равноудалена от прямых A_1B_1,

B_1C_1 и A_1C_1), т.е прямая A_1A. Значит, в треугольнике $A_2B_2C_2$ прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами. Докажем, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC совпадают.

Пусть это не так, например, точка A_2 находится вне треугольника ABC. Тогда луч A_2B_2 пере-секает сторону AB треугольника ABB_1 (в точке C_1) и не пересекает сторону AB_1 (их разделяет пря-мая A_2A_1). Следовательно, он пересекает сторону BB_1, то есть точка B_2 находится внутри отрезка BB_1, а значит, внутри треугольника ABC. Аналогично C_2 находится внутри треугольника ABC. Но отрезок B_2C_2 пересекает сторону BC в точке A_1. Противоречие.

Аналогично к противоречию ведет предположение о том, что A_2 находится внутри треугольника ABC.

3. В числе $a = 0{,}12457...$ n-я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что a – иррациональное число.

Решение. Пусть это не так: 0,12457... – периодическая десятичная дробь с длиной периода m (и неким предпериодом). Тогда цифры, соответствующим членам нашей последовательности с номерами m, $10m$, $100m$, …, $10^k m$,…, начиная с некоторого момента совпадают. В то же время – это последовательные цифры десятичного разложения иррационального числа $m\sqrt{2}$ (то есть непериодической дроби). Противоречие.

4. Можно ли разбить какую-нибудь призму на непересекающиеся пирамиды, у каждой из которых основание лежит на одном из оснований призмы, а противоположная вершина – на другом основании призмы?

Первое решение. Нельзя. Рассмотрим центральное сечение призмы. Каждая разрешенная пирамида пересекает его по многоугольнику, площадь которого в 4 раза меньше площади ее основания. Сумма площадей оснований таких пирамид должна быть равна двум основаниям призмы. Но тогда сумма площадей пересечений с центральным сечением равна половине основания призмы. Значит, даже центральное сечение не заполняется целиком.

Второе решение. Сумма объемов пирамид, вершины которых находятся на верхнем осно-вании призмы, не превосходит одной трети объема призмы. То же верно для пирамид с вершиной на нижнем основании. таким образом, сумма объемов пирамид меньше объема призмы.

5. См. задачу 6 для 8-9 классов.

6. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно

а) делится на 12!;

б) делится на 13!.

Решение. Очевидно, правильному расположению карт в колоде соответствует кольцевой обход ладьей (которая может прыгать через клетки!) доски 4×13 (горизонтали соответствуют мастям, а вертикали – достоинствам), начинающийся и кончающийся в клетке, соответствующей тузу пик (будем считать, что это левый нижний угол). Такой обход удобно закодировать, занумеровав клетки от 1 до 52, где 1 стоит в левом нижнем углу, а любая пара соседних номеров (включая 1 и 52) стоит в одной строке или в одном столбце.

а) Совершив любую из $(12! - 1)$ нетривиальных перестановок 12 правых вертикалей, мы из данного обхода получим новый (другая нумерация!). Таким образом, все обходы разбиваются на группы по 12! обходов.

б) Достаточно доказать, что это число делится на 13. Свернем доску в цилиндр, склеив вертикальные стороны. Любой из 12 возможных поворотов цилиндра переводит данный обход в другой, начинающийся уже не с “туза пик”. Но поскольку он проходит через эту клетку, то его можно рассматривать как “правильный обход” (соответствующую нумерацию можно получить, сдвинув все номера на одно и то же число по модулю 52 так, чтобы в левом нижнем углу оказалась 1). Ниже мы покажем, что этот обход отличается от первоначального. Таким образом, все обходы разбиваются на группы по 13 обходов.

Восстановим пропущенный момент. Пусть при повороте некоторый обход переходит в себя. Рассмотрим любой горизонтальный ход (он должен быть). Повторив поворот 13 раз, видим, что из каждой клетки этой горизонтали мы выходили по горизонтали, то есть сменить эту масть нельзя. Противоречие.

7. Положительные числа $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2+\ldots+x_k^2 < \frac{x_1+\ldots+x_k}{2}, \quad x_1+\ldots+x_k < \frac{x_1^3+\ldots+x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что $k > 50$.

б) Построить пример таких чисел для какого-нибудь k.

в) [Найти минимальное k, для которого пример возможен.

Решения пунктов а) и б)

а) По условию $4\left(x_1^2+\ldots+x_k^2\right) < 2(x_1 + \ldots + x_k) < x_1^3+\ldots+x_k^3$. Таким образом, хотя бы для одного числа (пусть для x_1) выполнено неравенство $4x_1^2 < x_1^3$, то есть $x_1 > 4$.

Отсюда $(2x_2^2-x_2)+\ldots+(2x_k^2-x_k) < 4 - 2\cdot 4^2 = -28$.

Поскольку минимум функции $2x^2-x$ равен $-\frac{1}{8}$, то $k-1 > 8\cdot 28 > 50$.

б) Возьмем $k = 2501$, $x_1 = 10$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2501} = 0{,}1$. Тогда $x_1^2+\ldots+x_{2501}^2 = 100 + 25 = 125$, $x_1 + \ldots + x_{2501} = 10 + 250 = 260$, $x_1^3+\ldots+x_k^3 > 1000$, и все неравенства выполнены.

Решение пункта в) Смотри в отдельном файле:
http://www.turgor.ru/28/tolpygo_sol28oos_7v.pdf

Задача. Положительные числа $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + \cdots + x_k}{2}, \quad x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

Найдите минимальное k, при котором это возможно.

Ответ. 516.

Решение. 1. Пусть для некоторого k такие числа $x_1, \ldots, x_k$ существуют. Докажем, что тогда существует и набор вида $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-1} = a < \frac{1}{4}$, $x_k = b > \sqrt{2}$, также удовлетворяющий условию.

Перепишем наши неравенства в виде

$$\sum_{i=1}^{k}(4x_i - 1)^2 < k, \quad \sum_{i=1}^{k}(2x_i - x_i^3) < 0.$$

Пусть $q_i = (4x_i - 1)^2$. Тогда $x_i = \frac{-\sqrt{q_i}+1}{4}$, если $x_i \le \frac{1}{4}$; в противном случае $x_i = \frac{\sqrt{q_i}+1}{4}$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1, \ldots, x_d \le \frac{1}{4}$, $x_{d+1}, \ldots, x_k > \frac{1}{4}$. Тогда $2x_i - x_i^3 = \frac{1}{64}(31 - 3q_i \mp (29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}))$, и наши неравенства запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{k} q_i < k, \quad \sum_{i=1}^{d}(31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) + \sum_{i=d+1}^{k}(31 - 3q_i + 29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}) < 0. \tag{1}$$

Функция $f_2(x) = 31 - 3x + 29x^{1/2} - 3x^{3/2}$, очевидно, выпукла вверх на области определения (каждое слагаемое выпукло вверх). Поэтому, если $d \le n - 2$ (то есть, во второй сумме в последнем неравенстве хотя бы два слагаемых), то q_{d+1} и q_{d+2} можно заменить на $q'_{d+1} = 0$, $q'_{d+2} = q_{d+1} + q_{d+2}$ (соответственно изменив x_i), тем самым уменьшив левую часть второго неравенства в (1) и не изменив сумму q_i. При этом $x'_d = \frac{1}{4}$, то есть для нового набора значение d увеличилось на 1. Так можно продолжать, пока мы не получим $d \ge k - 1$. Заметим, что случай $d = k$ невозможен, так как в этом случае $2x_i - x_i^3 > 0$ при всех i. Значит, в новом наборе $d = k - 1$, и он по-прежнему удовлетворяет неравенствам (1).

Теперь, положив $\overline{q} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} q_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{d}(31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) \ge d(31 - 3\overline{q} - 29\overline{q}^{1/2} + 3\overline{q}^{3/2})$$

согласно неравенству Йенсена, так как функция $f_1(x) = 31 - 3x - 29x^{1/2} + 3x^{3/2}$ выпукла вниз на области определения. Таким образом, если все числа $q_1, \ldots, q_d$ заменить на $\overline{q}$, то неравенства (1) будут выполнены (т. к. их сумма не изменится). Мы получили требуемый набор с $k-1$ одинаковым числом $a = x_1 = \cdots = x_{k-1}$ и одним числом $b = x_k$. При этом, очевидно, $a \le \frac{1}{4}$; поскольку $2b - b^3 < 0$, то получаем $b > \sqrt{2}$.

2. Таким образом, осталось выяснить, при каком минимальном k существуют такие $a \le \frac{1}{4}$, $b > \sqrt{2}$, что (здесь $d = k - 1$)

$$da^2 + b^2 < \frac{da + b}{2}, \quad da + b < \frac{da^3 + b^3}{2}.$$

Перепишем эти неравенства в виде

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} < d < \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3}. \tag{2}$$

Из (2) и вышесказанного следуют условия

$$\frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b} > \frac{2a - a^3}{a - 2a^2}, \quad a \in [0, \tfrac{1}{4}], \quad b > \sqrt{2}. \tag{3}$$

Оценим, какое минимальное значение может принимать выражение

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} \tag{4}$$

при условиях (3). Согласно (2), это и будет оценкой снизу для d.

Положим

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - x} = \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = \frac{1}{4}\left(2x + 1 - \frac{7}{2x - 1}\right).$$

Из последнего представления видно, что $g(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

Первое неравенство в (3) имеет вид $g(a) < g(b)$. Будем уменьшать b, пока не достигнем значения, при котором $g(b) = g(a)$. Так как $g(\sqrt{2}) = 0 < g(a)$, то новое значение будет больше $\sqrt{2}$. При этом, очевидно, (4) уменьшится. Таким образом, мы можем считать, что

$$\frac{b^2 - 2}{2b - 1} = \frac{2 - a^2}{1 - 2a} = t.$$

Теперь a и b — два различных корня квадратного уравнения $x^2 - 2 = t(2x - 1)$, поэтому

$$a + b = 2t \quad \Rightarrow \quad b = 2t - a = 2\frac{2 - a^2}{1 - 2a} - a = \frac{4 - a}{1 - 2a}.$$

Теперь выражение (4) принимает вид

$$h(a) = \frac{b(2b - 1)}{a(1 - 2a)} = \frac{7(4 - a)}{a(1 - 2a)^3}.$$

Чтобы найти его минимум на отрезке $a \in [0, \frac{1}{4}]$, найдем нули производной:

$$h'(a) = -\frac{7}{a(1 - 2a)^3} - \frac{7(4 - a)}{a^2(1 - 2a)^3} + \frac{42(4 - a)}{a(1 - 2a)^4} = \frac{14(-3a^2 + 16a - 2)}{a^2(1 - 2a)^4}.$$

На отрезке $[0, \frac{1}{4}]$ получаем $a_0 = \frac{8 - \sqrt{58}}{3}$, причем это — точка минимума. Подставив ее в наше выражение, получаем

$$d > h(a_0) = 514,\ldots.$$

Таким образом, $d \geq 515$, а $k \geq 516$.

3. Осталось построить пример для $d = 515$. Его легко получить из следующих соображений.

Положим $a = a_0$, $b = \frac{4 - a}{1 - 2a}$. Тогда

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} = \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = 514,\ldots. \tag{5}$$

Начнем увеличивать значение b, оставляя a неизменным. Тогда величина $g(b) = \frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b}$, как мы выяснили, увеличивается; поэтому правое выражение становится больше, чем левое. Значит, настанет момент, когда правая часть (5) будет больше 515, а левая — по-прежнему меньше 515. Эти a и b будут удовлетворять (3), а значит, являться искомыми.

Можно предъявить и более простой пример. Возьмем $a = \frac{1}{8}$ (это число, довольно близкое к a_0). Соответствующее значение $b = \frac{4 - a}{1 - 2a} = \frac{31}{6}$, при этом

$$\frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = \frac{b(2b - 1)}{a(1 - 2a)} = \frac{13888}{27} = 514\frac{10}{27}.$$

Увеличивая значение b, как и выше, получаем требуемый пример. Например, подходит значение $b = 5{,}169$.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур, тренировочный вариант, младшие

1. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x \le y$). Петя записывает на бумажке x^2 (квадрат меньшего числа), а затем заменяет числа на доске числами x и y-x, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на петиной бумажке? [4 балла]

Ответ. Сумма равна xy.

Решение 1. На каждом шаге Петя уменьшает произведение чисел на доске на число, которое он пишет на бумажке: $x(y–x)=xy–x^2$. Поскольку в конце произведение на доске будет равно 0, то сумма на бумажке равна исходному произведению xy.

Решение 2. Нарисуем на плоскости прямоугольник со сторонами x и y. На первом шаге отрежем от этого прямоугольника квадрат со стороной x и запишем его площадь на бумажку, затем отрежем квадрат от оставшегося прямоугольника и т.д. Когда этот процесс закончится, мы фактически разрежем исходный прямоугольник на квадраты, площади которых будут записаны на бумажку. Их сумма равна площади исходного многоугольника, то есть равна xy.

2. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ "да" или "нет" (например: "верно ли, что этот человек – хитрец?").

а) Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать? [1 балл]

b) Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он. [3 балла]

Решение. а) Спросим каждого «Верно ли, что оба твоих соседа – вруны?». Среди трех ответов есть «Да» вруна и «Нет» правдивого, поэтому один из ответов будет дан ровно один раз. По нему мы узнаем ответившего: это либо врун, либо правдивый. Задав ему вопрос про одного из двух других «Верно ли, что он хитрец», мы все узнаем.

Замечания. 1. В начале можно задавать любой вопрос, ответ на который вам известен (например, «Верно ли, что сегодня четверг»).

2. Можно обойтись и 3 вопросами, если они будут достаточно изощренными, что-то вроде: «Ответишь ли он “да”, если я спрошу...».

b) Обозначим участников: врун В, правдивый П, и хитрецы ХВ и ХП. Пусть хитрецы договорятся отвечать так, как будто ХВ врун, ХП – правдивый, В – хитрец, притворяющийся вруном, а П – хитрец, притворяющийся правдивым. Поставив их лицом друг против друга, так что ХП как бы служит отражением П, а ХВ служит отражением В, видим, что невозможно отличить, кто стоит «перед зеркалом», а кто «за зеркалом» – ответы полностью «зеркальны».

3. а) Написаны 2007 натуральных чисел, больших 1. Докажите, что удастся зачеркнуть одно число, так чтобы произведение оставшихся можно было представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел. [2 балла]

b) Написаны 2007 натуральных чисел, больших 1, одно из которых равно 2006. Оказалось, что есть только одно такое число среди написанных, что произведение оставшихся представляется в виде разности квадратов двух натуральных чисел. Докажите, что это число – 2006. [2 балла]

Решение.

Натуральные числа, представимые в виде разности квадратов натуральных чисел, назовем *хорошими*, а не представимые – *плохими*.

Лемма. Число n хорошее $\Leftrightarrow$ n – нечетное число, большее 1, или n кратно 4 и больше 4.

Доказательство леммы.. Пусть n – хорошее, то есть $n=(a^2–b^2)=(a–b)(a+b)$, где a и b – различные натуральные числа. Сомножители в правой части – одинаковой четности (их сумма четна). Они различны (иначе b=0). Если они нечетны, то и n – нечетно и больше 1·1. Если они четны, то n кратно 4 и больше 2·2.

Наоборот, для каждого из этих случаев мы можем разложить n в произведение двух подходящих множителей и найти a и b, решив систему уравнений:

n =2k+1 => $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2k+1 \end{cases} \Rightarrow a=k+1, b=k$

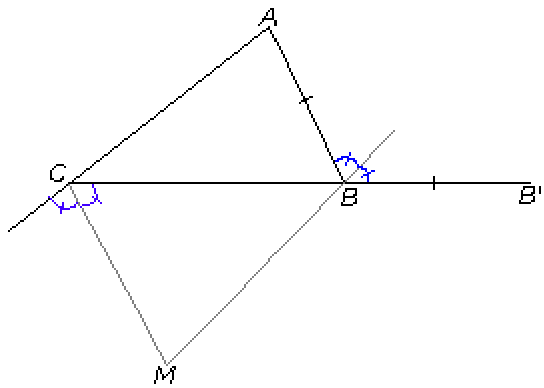
n =4m (m>1) => $\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=2m \end{cases} \Rightarrow a=m+1, b=m-1$. Лемма доказана.

а) Всегда можно вычеркнуть одно число так, чтобы четных чисел не осталось совсем (произведение будет нечетным) или осталось как минимум два четных числа (произведение будет кратно 4, но больше 4). Действительно, если среди чисел ровно одно четное, зачеркнем его. Если есть ровно два четных – зачеркнем любое кроме этих двух. В остальных случаях можно зачеркнуть любое.

b) Число 2006 – четное. Если есть еще четное число n, то, как показано в а), любое число кроме n и 2006 можно зачеркнуть. Это противоречит условию. Значит, других четных нет. Тогда число 2006 вычеркнуть можно (произведение оставшихся нечетно и больше 1), а никакое другое число вычеркнуть нельзя (поскольку 2006 четно, но не кратно 4 то таким же окажется и произведение оставшихся).

4. На продолжении стороны *BC* треугольника *ABC* за вершину *B* отложен отрезок *BB'*, равный стороне *AB*. Биссектрисы внешних углов при вершинах *B* и *C* пересекаются в точке *M*. Докажите, что точки *A, B', M* и *C* лежат на одной окружности. [4 балла]

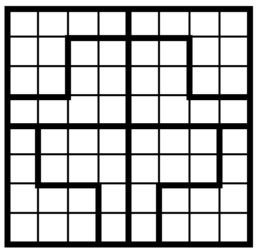
Решение. Точка *M* равноудалена от прямых *AC* и *BC* (как лежащая на биссектрисе угла *C*), и от прямых *AB* и *BC* (как лежащая на биссектрисе угла *B*). Поэтому *M* равноудалена от сторон угла *BAC*, и, значит, *AM* – биссектриса этого угла, то есть $\angle BAM=\angle CAM$. Так как *ABB'* – равнобедренный треугольник, то *MB* – серединный перпендикуляр к *AB'*, поэтому $\angle BAM=\angle BB'M$. Тем самым, $\angle CB'M=\angle BB'M=\angle BAM=\angle CAM$. Отрезок *CM* виден из точек *A* и *B'* под равными углами, значит, точки *A, B', M* и *C* лежат на одной окружности.



5. На какое наибольшее число равных невыпуклых многоугольников можно разрезать квадрат так, чтобы все стороны многоугольников были параллельны сторонам квадрата и никакие два из этих многоугольников не получались друг из друга параллельным переносом? (Параллельный перенос – это сдвиг без поворота). [4 балла]

Ответ. На 8 многоугольников.

Решение. Пример разрезания на с 8 многоугольников – см. рис. Покажем, что больше быть не может. Данный многоугольник можно не более, чем 8 способами разместить на плоскости (с точностью до параллельного переноса) с соблюдением условия. Действительно, рассмотрим три его последовательные вершины *A, B* и *C* (их положением многоугольник определяется однозначно). Можно считать, что точка *B* фиксирована. Сторону *BA* можно выпустить из нее 4 способами (в 4 направлениях, параллельным сторонам квадрата), после чего сторону *BC* – двумя способами.



Двадцать восьмой турнир городов

(осенний тур, 10–11 классы, тренировочный вариант)

Решения задач

1. Ответ: xyz.

Решение 1. Заметим, что произведение трех чисел, записанных на доске с каждой операцией уменьшается ровно на то число, которое Петя записывает на бумажку. Когда одно из чисел становится нулем, произведение всех чисел на доске тоже равно нулю, откуда сумма всех чисел, выписанных Петей, равна начальному произведению трех чисел на доске, то есть xyz.

Решение 2. Рассмотрим параллелепипед со сторонами x, y, z. На каждом шаге мы отрезаем от него параллелепипед толщины 1, записывая его объем на бумажку, и продолжаем действовать так с оставшимся параллелепипедом. Процесс закончится, когда отрежем все. Значит на бумажке будет записан объем исходного параллелепипеда, то есть xyz.

2. Лемма 1: центры четырех окружностей, вписанных в рассматриваемые треугольники, лежат на вписанной в четырехугольник окружности и являются серединами дуг, стягиваемых соответствующими хордами.

Доказательство: Пусть D — общая вершина сторон четырехугольника, касающихся вписанной окружности в точках K и L. Пусть M — середина дуги KL, лежащей внутри треугольника DKL. Углы MKL и MKD равны, так как опираются на равные дуги, откуда KM — биссектриса угла DKL. Аналогично LM — биссектриса угла DLK. Следовательно, M — точка пересечения биссектрис и центр вписанной в треугольник DKL окружности, ч. т. д.

Обозначим точки касания четырехугольника с вписанной окружностью как A_1, A_2, A_3, A_4 а середины дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 как B_1, B_2, B_3, B_4. Исходя из леммы 1 требуется доказать, что отрезки B_1B_3 и B_2B_4 перпендикулярны. Действительно, пусть они пересекаются в точке N. Тогда угол B_1NB_2 равен полусумме дуг B_1B_2 и B_3B_4, что равно одной четверти суммы дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1, то есть равно $360/4 = 90$ градусов, что и требовалось доказать.

3. Заметим, что среди чисел от 1 до 2006^2 все возможные остатки при делении на 4 (0, 1, 2 и 3) встречаются по 1003^2 раза. Допустим, искомые два числа не найдутся. Разобьем таблицу на 1003^2 квадрата 2×2. Любые два числа в одном квадрате имеют общую сторону или вершину. Поэтому в один квадрат не может попасть более одного числа, дающего при делении на 4 остаток 0, а также более одного числа дающего остаток 2. Но так как чисел каждого из этих видов ровно 1003^2, то в каждый квадрат попадет ровно одно число, дающее остаток 0 и ровно одно число, дающее остаток 2. В оставшихся двух клетках какого-либо квадрата не могут стоять числа, дающие остатки 1 и 3. Следовательно, количество чисел каждого из этих видов четно. Противоречие. Значит, искомые два числа найдутся, ч.т.д.

4. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии (то есть $b_{n+1} = q^n b_1$ при всех натуральных n). Если $q = 1$, то задача решена. Иначе $(b_{n+2} - b_{n+1})/(b_2 - b_1) = q^n$, откуда q — рациональное (ясно, если взять $n = 1$) и кроме того $(b_2 - b_1) \cdot q^n$ — целое число при любом натуральном n. Записывая q в виде несократимой дроби $q = s/t$, получаем, что $(b_2 - b_1)s^n/t^n$ — целое число, и значит $b_2 - b_1$ делится на t^n при любом n. Это возможно только если $t = 1$ или $t = -1$, то есть когда q — целое.

5. Ответ: да, можно.

Решение: Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб с длиной ребра 1. Отметим на ребрах AB, AD, AA_1, C_1C, C_1B_1, C_1D_1 точки M_1, M_2, ..., M_6 соответственно так, чтобы $AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1M_4 = C_1M_5 = C_1M_6 = 3/4$. Тогда длины отрезков M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_4 равны $\sqrt{(3/4)^2 + (3/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$, а длины отрезков M_1M_4, M_1M_5, M_2M_4, M_2M_6, M_3M_5, M_3M_6 равны $\sqrt{(1/4)^2 + 1^2 + (1/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$. Так как длины всех двенадцати отрезков равны, то все треугольники $M_1M_2M_3$, $M_4M_5M_6$, $M_1M_4M_5$, $M_2M_4M_6$, $M_3M_5M_6$, $M_4M_1M_2$, $M_5M_1M_3$, $M_6M_2M_3$ равносторонние и точки M_1, M_2,..., M_6 являются вершинами октаэдра.