Алекса Малчески, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

МЕТОД НА ФЕРМА ЗА РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

При решавањето на Диофантовите равенки често пати се користиме со слениов *метод на Ферма*. Ако претпоставиме дека равенката има решение во множеството $\mathbb{N}$, тогаш докажуваме дека истата има "помало" решение во множеството $\mathbb{N}$. На тој начин конструираме строго монотоно опаѓачка бесконечна низа природни броеви кои се решенија на дадената равенка, што противречи на фактот дека во $\mathbb{N}$ не постои строга монотона опаѓачка бесконечна низа. Последна противречност значи дека разгледуваната равенка нема решение.

Пред да преминеме на разгледување на методот на Ферма ќе се потсетиме за Питагоровите тројки.

Дефиниција 1. Решенијата на равенката $x^2+y^2=z^2$, $x,y,z\in\mathbb{N}$, ги нарекуваме *Питагорови тројки*. За Питагоровата тројка (x,y,z) ќе велиме дека е *примитивна* ако $\mathrm{NZD}(x,y,z)=1$.

Ако за Питагоровата тројка (x,y,z) важи $d=\mathrm{NZD}(x,y,z)>1$, тогаш $(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d})$ е примитивна Питагорова тројка. Според тоа, за да ги определиме решенијата на равенката $x^2+y^2=z^2$, доволно е да ги определиме само примитивните тројки (x,y,z), а останатите решенија се од облик $(kx,ky,kz), k\in\mathbb{N}$.

Точна е следнава теорема.

Теорема 1. Во множеството природни броеви равенката $x^2+y^2=z^2$ има бесконечно многу решенија (x,y,z) такви, што $\mathrm{NZD}(x,y,z)=1$ и истите се дадени со

$$x=u^2-v^2,\ y=2uv,\ z=u^2+v^2, \qquad (2)$$

каде што $u,v\in\mathbb{N}$, $\mathrm{NZD}(u,v)=1$, $u>v$ и u и v се со различна парност. ■

Следната теорема ќе ја докажеме користејќи го методот на Ферма.

Теорема 2. Равенката

$$x^4+y^4=z^2 \qquad (1)$$

во множеството $\mathbb{Z}$ нема решение (x,y,z) такво, што $x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0$.

Доказ. Ако $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ е решение на (1), тогаш и $x=|x_0|, y=|y_0|$, $z=|z_0|$ е решение на (1). Затоа доволно е тврдењето да го докажеме за природните броеви. Исто така, можеме да претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(x,y)=1$. Имено, ако $\mathrm{NZD}(x,y)=d$, тогаш $x=dx_1, y=dy_1$, т.е. $x_1^4+y_1^4=(\frac{z}{d^2})^2$, што значи дека $z_1=\frac{z}{d^2}$ е природен број. Но, тогаш

$$x_1^4+y_1^4=z_1^2,\ \mathrm{NZD}(x_1,y_1)=1,\ x_1,y_1,z_1\in\mathbb{N}.$$

Според тоа, повторно можеме да разгледуваме само примитивни решенија на равенката (1). Нека (x_1,y_1,z_1) е такво решение. Ќе докажеме дека постои решение (x_2,y_2,z_2) такво, што $\mathrm{NZD}(x_2,y_2)=1$, $x_2,y_2,z_2\in\mathbb{N}$ и $0<z_2<z_1$.

Од $(x_1^2)^2+(y_1^2)^2=z_1^2$ следува дека x_1^2, y_1^2, z_1 е примитивна Питагорова тројка. Според тоа постојат $u,v\in\mathbb{N}$, $u>v$ такви, што

$$x_1^2=u^2-v^2,\ y_1^2=2uv,\ z_1=u^2+v^2\,. \tag{2}$$

Од (2) следува дека $x_1^2+v^2=u^2$, каде $\mathrm{NZD}(x_1,v,u)=1$ и така (x_1,v,u) е примитивна Питагорова тројка. Можеме да претпоставиме, дека x_1 е непарен и затоа v е парен. Според тоа, u е непарен, па затоа постојат $a,b\in\mathbb{N}$ такви, што

$$a^2+b^2=u,\ 2ab=v\,,\ \mathrm{NZD}(a,b)=1\,. \tag{3}$$

Бидејќи u е непарен, v е парен и $\mathrm{NZD}(u,v)=1$, добиваме $\mathrm{NZD}(u,2v)=1$. Според тоа, $y_1^2=u\cdot 2v$ па затоа постојат $z_2,c\in\mathbb{N}$ такви, што $u=z_2^2,\ 2v=c^2$. Бидејќи c е парен број, имаме $c=2d$, односно $v=2d^2$. Така

$$ab=\tfrac{v}{2}=d^2\,.$$

Но, $\mathrm{NZD}(a,b)=1$, што значи дека постојат x_2 и y_2 такви, што

$$a=x_2^2,\ b=y_2^2 \text{ и } \mathrm{NZD}(x_2,y_2)=1\,.$$

Со замена за a,b и u во (3) наоѓаме

$$x_2^4+y_2^4=z_2^2\,.$$

Според тоа, постојат $x_2,y_2,z_2\in\mathbb{N}$, $\mathrm{NZD}(x_2,y_2)=1$ и

$$0<z_2\le z_2^4=u^2<u^2+v^2=z_1\,,$$

такви што подредената тројка (x_2,y_2,z_2) е решение на равенката (1).

Продолжувајќи ја постапката, во множеството шриродни броеви наоѓаме ново решение (x_3,y_3,z_3) на (1), за кое $\mathrm{NZD}(x_3,y_3)=1$ и $0<z_3<z_2$ итн. Според тоа, ако во множеството природни броеви равенката (1) има решение (x_1,y_1,z_1), тогаш таа во множеството природни броеви има бесконечно многу решенија $(x_i,y_i,z_i),\ i=1,2,...$ за кои важи $z_1>z_2>z_3>z_4>z_5>...$, што не е можно. Од добиената противречност следува, дека не постојат решенија на (1), за кои $x\ne 0,\ y\ne 0,\ z\ne 0$. ■

Последица 1. Равенката $x^4+y^4=z^4$ нема решение во множеството на целите броеви, при кое $x\ne 0,\ y\ne 0,\ z\ne 0$.

Доказ. Нека претпоставиме дека x_0,y_0,z_0 е решение на $x^4+y^4=z^4$ во множеството на целите броеви за кое $x_0\ne 0, y_0\ne 0, z_0\ne 0$. Тогаш во множеството на целите броеви равенката (1) има решение $x_0\ne 0, y_0\ne 0,\ z_0^2\ne 0$, што противречи на теорема 2. ■

Да ја разгледаме равенката

$$x^2+y^2+z^2=w^2\,. \tag{4}$$

Нека претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(x,y,z,w)=1$ и дека $x,y,z,w\in\mathbb{N}$. Ако $w=0$, тогаш $x=y=z=0$. Ако еден од x,y,z е нула, тогаш останатите три броја формираат Питагорова тројка. Нека претпоставиме дека

$$w = x + y. \tag{5}$$

Тогаш (4) го добива обликот $z^2 = 2xy$. Според тоа, z е парен и имаме $z = 2u$, па затоа $2u^2 = xy$. Но, ова значи дека еден од броевите x или y е парен. Земаме x да е парен, т.е. $x = 2v$ и добиваме $u^2 = vy$. Последното значи дека постојат $a, b \in \mathbb{N}$ такви, што

$$v = a^2, \ \ y = b^2. \tag{6}$$

Од (6) следува дека решение на равенката (4) се

$$x = 2a^2, y = b^2, z = 2ab, w = 2a^2 + b^2, \ a, b \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Значи, постојат бесконечно многу решенија на равенката (4), за кои $x \neq 0, \ y \neq 0,$ $z \neq 0$ и $w \neq 0$. Што се однесува до определувањето на решенијата на равенката (4), може да се определи и друга класа на решенија за која $w \neq x + y$. Имено нека претпоставиме дека две променливи од x, y, z се првиот пар на Питагорови тројки. Тогаш

$$t^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = w^2,$$

па затоа x, y, t и t, z, w се Питагорови тројки. Според теорема 1 можеме да претпоставиме дека тројките x, y, t и t, z, w се Питагорови тројки. Така имаме

$$x^2 + y^2 = t^2, t^2 + z^2 = w^2, \ \mathrm{NZD}(x, y, t) = \mathrm{NZD}(t, z, w) = 1, \ x, y, z, t, w \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Бидејќи x, y, t е примитивна Питагорова тројка t е непарен и без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека x е непарен, а y е парен број. Но, како t, z, w е примитивна Питагорова тројка и t е непарен број, па затоа z е парен и w е непарен број. Според теорема 1 постојат $r, s, u, v \in \mathbb{N}$ такви што $\mathrm{NZD}(r, s) =$ $\mathrm{NZD}(u, v) = 1$, $r > s, u > v$, при што r и s се со различна вредност и u и v се со различна парност и

$$x = r^2 - s^2, \ y = 2rs, t = r^2 + s^2, t = u^2 - v^2, \ z = 2uv, \ w = u^2 + v^2.$$

Притоа $t = r^2 + s^2 = u^2 - v^2$, односно $r^2 + s^2 + v^2 = u^2$, каде $r, s, u, v \in \mathbb{N}$. Исто така од $\mathrm{NZD}(r, s) = 1$ следува $\mathrm{NZD}(r, s, v, u) = 1$. Освен тоа,

$$u \leq u^2 < u^2 + v^2 = w.$$

Така за секое решение на (4), кое е и решение на (8) имаме решение на (4) со помала последна променлива. Притоа да забележиме дека r и s не мора да се два члена на Питагорова тројка (r, s, α) и u и v не мора да се два члена на Питагорова тројка (α, v, u). Во спротивно добиваме дека равенката (4) нема решение (следува од методот на Ферма), а ние веќе докажавме дека (4) има бесконечно многу решенија.

Последната дискусија со Питагоровите тројки овозможува исто така да се определат бесконечно многу решенија на равенката (4). Имено, едно решение на (4) е $u = 3, v = 2, r = 2, s = 1$, т.е. $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$. Сега добиваме $x = 3, y = 4, t = 5,$ $z = 12$ и $w = 13$, дека е решение на (8). Земаме $u = 13$. Бидејќи v е парен број и $\mathrm{NZD}(u, v) = 1$ имаме $v = 12$ и како $r > s$ имаме $r = 4$ и $s = 3$. Но тогаш

$$x=7, y=24, t=25, z=312, w=313,$$

е решение на (11). Земаме $u=313$. Бидејќи v е парен број, имаме $v=24$ и како $r>s$ имаме $r=312$ и $s=7$. Но, тогаш добиваме

$$x=312^2-7^2,\ y=2\cdot 312\cdot 7,\ t=312^2+7^2,\ z=2\cdot 312\cdot 24,\ w=313^2+24^2$$

што претставува ново решение на (8), т.е. на (4). Значи, (4) и (8) имаат бесконечно многу решенија. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 3. Равенката (4) и системот равенки (8) имаат бесконечно многу решенија, за кои сите променливи се различни од нула. ■

Пример 1. Докажи дека равенката $x^2+y^2=6z^2$ во множеството $\mathbb{Z}$ нема решение различно од (0,0,0).

Решение. Нека (a,b,c), $\mathrm{NZD}(a,b,c)=1$ е решение на дадената равенка. Десната страна на равенката е делива со 3, па затоа и левата страна мора да е делива со 3. Но, тоа значи дека $3\,|\,a$ и $3\,|\,b$. Имено, ако $a=3k\pm 1$ и $b=3n\pm 1$, тогаш $a^2+b^2=3m\pm 1$, што е противречност. Затоа $9\,|\,a^2$ и $9\,|\,b^2$, од што следува дека $9\,|\,6c^2$, т.е. $3\,|\,2c^2$. Но, $\mathrm{NZD}(2,3)=1$, па затоа $3\,|\,c$ што противречи на претпоставката дека $\mathrm{NZD}(a,b,c)=1$. ■

Пример 2. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$

Решение. Очигледно едно решение на равенката е (0,0,0). Затоа да претпоставиме дека (x,y,z) е решение на равенката во кое сите три броеви x,y,z се различни од нула. Тогаш секој од броевите можеме да го запишеме во обликот $2^k t$, каде t е непарен број, т.е.

$$x=2^p x_1, y=2^q y_1, z=2^s z_1,$$

за непарни x_1, y_1, z_1. Од симетричноста на равенката следува, дека не се губи од општоста ако претпоставиме $p\le q\le s$. Тогаш равенката може да се скрати со 2^{2p} и добиваме

$$x_1^2+(2^{q-p}y_1)^2+(2^{s-p}z_1)^2=2^{q+s-p+1}x_1y_1z_1.$$

Ако $q>p$, тогаш левата страна на последната равенка е непарна, а десната е парна, што е противречност. Значи, мора да е $q=p$. Но, тогаш равенката го добива обликот

$$x_1^2+y_1^2+(2^{s-p}z_1)^2=2^{s+1}x_1y_1z_1$$

Ако $s=p$, тогаш левата страна на последната равенка е непарна, а десната парна, што е противречност. Значи мора да е $s>p$. Но тогаш $x_1^2+y_1^2$ е делив со 2, а $(2^{s-p}z_1)^2$ и $2^{s+1}x_1y_1z_1$ се деливи 4, па повторно добиваме противречност.

Значи, дадената равенка во множеството цели броеви има единствено решение (0,0,0). ■