Ристо Малчески

АХ, ТИЕ ПИТАГОРОВИ ТРОЈКИ

Да го разгледаме правоаголниот триаголник со катети 3 и 4. Важи: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Катетите на овој триаголник се цели броеви кои се разликуваат за единица. Се поставува прашање дали може да се најда и други правоаголни триаголници со разгледуваното својство, при што мерните броеви на катетите ќе бидат поголеми. Јасно, во тој случај разликата, во проценти, меѓу катетите ќе биде помала и триаголникот повеќе ќе наликува на рамнокрак правоаголен триаголник. Да ги разгледаме примерите:

$$20^2 + 21^2 = 29^2 \quad \text{и} \quad 119^2 + 120^2 = 169^2.$$

Во првиот пример единицата е разлика во однос на 20 единици (5%), а во вториот таа е разлика во однос на 119 единици (0,84%).

Дали можеме да најдеме примери во кои процентуалната разлика брзо ќе се намалува?

За да одредиме вакви триаголници, треба во множеството природни броеви да ја решиме равенката $x^2 + (x+1)^2 = y^2$, која е еквивалентна на равенката $(2x+1)^2 + 1 = 2y^2$. Со смената $z = 2x+1$ последната равенка ја трансформираме во видот

$$z^2 - 2y^2 = -1. \tag{1}$$

Равенката (1) е равенката на Ферма-Пел, која е добро проучена и во овој случа има бесконечно многу решенија. Имено, ако за

$$z_1 = a, \ \ y_1 = b, \ \ c = -1,$$

важи

$$a^2 - db^2 = c,$$

тогаш за секој непарен по ред подреден пар на низата (z_n, y_n) дефинирана со

$$z_{k+1} = az_k + dby_k; \qquad y_{k+1} = ay_k + bz_k \tag{2}$$

е исполнето равенството $z_{k+1}^2 - dy_{k+1}^2 = c$, (проверете!).

Според тоа, ако $z_1 = a, \ y_1 = b,$ е едно решение на (1), тогаш секој непарен по ред подреден пар на низата (z_n, y_n) определен со релациите (2) е решение на (1). Притоа важи

$$z_{2k+1} > z_{2k-1} \quad \text{и} \quad y_{2k+1} > y_{2k-1}.$$

Конечно, тргнувајќи од триаголникот $x_1 = 3, y_1 = 5,$ т.е. од $z_1 = 3, y_1 = 5,$ со помош на (2) можеме да одредиме бесконечно многу триаголници со бараното својство. На пример:

за $z_1 = 7, y_1 = 5$ го имаме триаголникот 3,4,5;

за $z_3 = 1393, y_1 = 985$ го имаме триаголникот 696,697,9855;

за $z = 275807, y_1 = 195025$ го имаме триаголникот 137903, 137904, 195025 итн.

Со претходната постапка конструиравме бесконечно многу правоаголни триаголници чии катети се разликуваат за единица и должините на катетите растат во секој нареден чекор, т.е. секој нареден триаголник се приближува кон рамнокракиот правоаголен триаголник. Ова ни овозможува да најдеме рационални апроксимации на бројот $\sqrt{2}$. Навистина, при доволно голем x важи $\frac{(x+1)^2}{x^2} \approx 1$. Ако се има предвид равенството $x^2 + (x+1)^2 = y^2$, добиваме

$$2 = \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \approx \frac{x^2 + (x+1)^2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}, \text{ т.е. } \sqrt{2} \approx \frac{y}{x}.$$

Така, на пример, имаме

$$\frac{985}{697} < \sqrt{2} < \frac{985}{696} \quad \text{или} \quad \frac{195025}{137904} < \sqrt{2} < \frac{195025}{137903}$$

од каде што наоѓаме

$$1{,}413199426 < \sqrt{2} < 1{,}415229885 \text{ или } 1{,}414208435 < \sqrt{2} < 1{,}41421869$$

а $\sqrt{2}$ со точност од 10^{-8} е 1,414213562.