Томи Димовски, Ана Димовска
Скопје

НЕКОИ ЕДНОСТАВНИ ТЕХНИКИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ (ПРВ ДЕЛ)

Функционалните равенки се доста интересна и популарна тема како на IMO, така и на други државни и меѓународни математички натпревари. Голем број на проблеми на IMO може да се класифицираат како функционални равенки и дел од тие проблеми во оваа статија ќе бидат разгледани или дадени за вежба на читателот. Решавањето на овие проблеми се сведува на наоѓање на сите функции кои задоволуваат дадена равенка, а понекогаш и некои дополнителни услови како непрекинатост, монотоност и ограниченост. Како и да е, не постои општа постапка со која може да се реши овој тип на проблеми. Во оваа статија се дадени основни идеи и техники кои може да се користат за решавање на функционални равенки и кои може да се доста корисни.

1. Смена на променливи

Смена на променливи е навистина едноставна техника која може да се искористи како дел на решение на посложен проблем. Во општ случај, ако е дадена равенка од облик $f(g(x))=h(x)$, каде што $g(x),h(x)$ се дадени функции и $g(x)$ има инверзна функција, тогаш со воведување на смената $t=g(x)$, се добива $f(x)=h(g^{-1}(x))$.

Пример 1. Определи ги сите функции $f(x)$ дефинирани на сите реални броеви, такви што

$$f(\tfrac{x+1}{x})=1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2} \quad \text{за секој } x\neq 0.$$

Решение. Воведуваме смена $t=\frac{x+1}{x}$. Тогаш $x=\frac{1}{t-1}$ и почетната равенка се сведува во обликот $f(t)=t^2-t+1$. Според тоа, $f(x)=x^2-x+1$. ■

2. Правење на систем од равенки

Ова е уште една едноставна техника, која често функционира кога равенката ги содржи вредностите $f(g(x))$ и $f(h(x))$, за два различни алгебарски изрази $g(x)$ и $h(x)$.

Пример 2. Определи ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4 \quad \text{за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Решение. Го заменуваме x со $1-x$ во дадената функција и добиваме $(1-x)^2 f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$. Бидејќи $f(1-x)=2x-x^4-x^2 f(x)$, со замена на $f(1-x)$ во последната равенка и со решавање по $f(x)$, добиваме дека $f(x)=1-x^2$.

Потребно е уште да провериме дали оваа функција ја задоволува дадената равенка:

$x^2 f(x)+f(1-x)=x^2(1-x^2)+1-(1-x)^2=2x-x^4$. ■

Пример 3. Реши ја равенката $f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x}f(-x)=x$, каде што $f(x)$ е реално вредносна функција дефинирана за сите реални броеви различни од 0.

Решение. Го заменуваме x со $\frac{1}{x}$ во дадената равенка и добиваме $f(x)+xf(-\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$. Го заменуваме x со $-x$ во последната равенка и добиваме $f(-x)-xf(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}$. Со множење на првата равенка со x и додавање на последната, добиваме $2f(-x)=x^2-\frac{1}{x}$. Го заменуваме уште еднаш x со $-x$ и добиваме $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$.

Останува уште да покажеме дека ова функција ја задоволува почетната равенка. ■

Забелешка. Во поголемиот број на случаи ја решаваме равенката под претпоставка дека функцијата $f(x)$ постои. Затоа неопходно е да се провери дали добиената функција ја задоволува дадената равенка.

3. Користење на симетрија

Оваа техника може да се користи кога функционалната равенка е со повеќе променливи.

Пример 4. Определи ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)=x+f(y) \text{ за сите } x,y\in\mathbf{R}.$$

Решение. Левата страна на равенката е симетрична по x и y. Според тоа, $x+f(y)=f(x+y)=f(y+x)=y+f(x)$, односно $f(x)-x=f(y)-y$, за сите $x,y\in\mathbf{R}$. Следува дека $f(x)-x$ е константа за сите $x\in\mathbf{R}$, односно $f(x)=x+c$ за било кој избор на реална константа c. Лесно може да се провери дека добиената фамилија функции ја задоволува дадената равенка. ■

Пример 5. Определи ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)+f(x-y)=4xy \text{ за сите } x,y\in\mathbf{R}.$$

Решение. Нека $u=x+y$ и $v=x-y$. Тогаш дадената равенка може да се напише во облик $f(u)-f(v)=u^2-v^2$ или $f(u)-u^2=f(v)-v^2$. Бидејќи добиената релација е исполнета за произволни $u,v\in\mathbf{R}$, $f(u)-u^2$ е константа за сите $u\in\mathbf{R}$. Следува дека $f(x)=x^2+c$, за било кој избор на реална константа c.

Лесно може да се провери дека добиената фамилија функции ја задоволува дадената равенка. ■

Забелешка. Иако е релативно едноставно да се провери дали добиените функции ги задоволуваат дадените равенки тоа е неопходно.

4. Пресметување на $f(x_0)$ за специјален избор на x_0

Наоѓањето на $f(x_0)$ за некои вредности на x_0, како на пример $f(0), f(1), f(2), f(-1)$ и.т.н., може да даде некаква идеја за тоа како изгледа функцијата $f(x)$. Оваа техника често е корисна кога дадената равенка е со повеќе променливи.

Пример 6. (Korea, 1988) Определи ја $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, таква што

$$f(x)f(y)=f(xy)+x+y \quad \text{за сите } x,y\in\mathbf{R}.$$

Решение. За $y=0$ добиваме $f(x)f(0)=f(0)+x$. Следува дека $f(0)\neq 0$ и $f(x)=1+\frac{x}{f(0)}$. Во последната равенка ако замениме $x=0$, добиваме дека $f(0)=1$. Според тоа, $f(x)=1+x$.

Лесно може да се провери дека добиената функција ја задоволува дадената равенка. ■

Пример 7. Определи ги сите функции $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{Q}^+$ такви што

$$f(x+\tfrac{y}{x})=f(x)+\tfrac{f(y)}{f(x)}+2y, \text{ за сите } x,y\in\mathbf{Q}^+.$$

Решение. Го заменуваме (x,y) со $(1,1),(1,2)$ и $(2,2)$ во дадената равенка и добиваме дека $f(2)=f(1)+3, f(3)=f(1)+\frac{f(2)}{f(1)}+4$ и $f(3)=f(2)+5$. Од овие три равенки добиваме дека $f(1)=1, f(2)=4$ и $f(3)=9$.

Најпрво ќе покажеме дека $f(n)=n^2$ за секој $n\in\mathbf{N}$.

Оваа претпоставка може да ја покажеме со тоа што ќе земеме $x=y=n$ во дадената равенка, со користење на добиената релација $f(n+1)=f(n)+1+2n$ и принципот на математичка индукција.

Следно ќе покажеме дека $f(x)=x^2$ за секој $x\in\mathbf{Q}^+$.

Најпрво земаме $x=n, y=m$, а потоа $x=\frac{m}{n}, y=n$ за $m,n\in\mathbf{N}$. Добиваме

$$f(n+\tfrac{m}{n})=f(n)+\tfrac{f(m)}{f(n)}+2m=n^2+\tfrac{m^2}{n^2}+2m \text{ и}$$

$$f(\tfrac{m}{n}+n)=f(\tfrac{m}{n})+\frac{f(m)}{f(\frac{m}{n})}+2m=f(\tfrac{m}{n})+\frac{m^2}{f(\frac{m}{n})}+2m.$$

Од последните две равенки добиваме дека $n^2+\frac{m^2}{n^2}=f(\frac{m}{n})+\frac{m^2}{f(\frac{m}{n})}$, односно

$$0=f(\tfrac{m}{n})-\frac{m^2}{n^2}-n^2+\frac{m^2}{f(\frac{m}{n})}=f(\tfrac{m}{n})-\frac{m^2}{n^2}-\frac{n^2}{f(\frac{m}{n})}(f(\tfrac{m}{n})-\frac{m^2}{n^2})$$
$$=(f(\tfrac{m}{n})-\frac{m^2}{n^2})(1-\frac{n^2}{f(\frac{m}{n})})$$

Нека $\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}^+$ каде што $p,q\in\mathbf{N}$. Ако $1-\frac{p^2}{f(\frac{p}{q})}\neq 0$, тогаш $f(\frac{p}{q})-\frac{p^2}{q^2}=0$, односно $f(\frac{p}{q})=(\frac{p}{q})^2$.

Ако $1-\frac{p^2}{f(\frac{p}{q})}=0$, тогаш $\frac{f(2q)}{f(\frac{2p}{2q})}=\frac{4q^2}{f(\frac{p}{q})}\neq\frac{q^2}{f(\frac{p}{q})}=1$. Според тоа, $\frac{f(2q)}{f(\frac{2p}{2q})}\neq 1$, од каде за $n=2q,m=2p$ во горната равенка добиваме $f(\frac{p}{q})=f(\frac{2p}{2q})=\frac{4p^2}{4q^2}=(\frac{p}{q})^2$.

Со директна проверка се покажува дека функцијата $f(x)=x^2$ ја задоволува дадената равенка.

5. Полиноми

Кога функциите кои ги бараме се полиноми постојат повеќе својства што треба да ги разгледаме. Некои од најважните се: степенот, конечниот број на нули (освен ако се работи за тривиалниот полином $p(x)\equiv 0$) и теоремата за факторизација ($p(a)=0$ акко $(x-a)$ е делител на $p(x)$).

Пример 8. Определи ги сите реални полиноми $p(x)$ такви што

$$p(x+1)+2p(x-1)=6x^2+5 \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Решение. Очигледно е дека $p(x)$ мора да е полином од втор степен. Затоа можеме да го запишеме во облик $p(x)=ax^2+bx+c$. Го заменуваме овој израз во равенката и добиваме

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c+2a(x-1)^2+2b(x-1)+2c=6x^2+5,$$

што откако ќе се среди се сведува на изразот

$$3ax^2+(-2a+3b)x+(3a-b+3c)=6x^2+5.$$

Со изедначување на коефициентите од двете страни на последната равенка добиваме $a=2,b=\frac{4}{3},c=\frac{1}{9}$, односно $p(x)=2x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}$. Лесно може да се провери дека добиениот полином ја задоволува дадената равенка. ■

Пример 9. Определи ги сите реални полиноми $p(x)$ такви што

$$xp(x-1)=(x-2)p(x) \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Решение. За $x=0$ се добива $0=-2p(0)$, односно $p(0)=0$. Слично, за $x=2$ се добива $p(1)=0$. Бидејќи $p(x)$ е делив со x и $(x-1)$ можеме да го запишеме во облик $p(x)=x(x-1)q(x)$, каде што $q(x)$ е полином со степен за 2 помал од степенот на $p(x)$. Го заменуваме $p(x)$ со $x(x-1)q(x)$ во дадената равенка и добиваме $x(x-1)(x-2)q(x-1)=(x-2)x(x-1)q(x)$ за секој $x\in\mathbf{R}$. Следува дека $q(x-1)=q(x)$ за секој $x\in\mathbf{R}$. Нека x_0 е произволен реален број и нека $h(x)=q(x)-q(x_0)$. Очигледно е дека $h(x_0)=0$. Уште повеќе, $h(x_0+1)=q(x_0+1)-q(x_0)=q(x_0)-q(x_0)=0$. Со помош на принципот на математичка индукција се покажува дека $h(x_0+n)=0$ за секој $n\in\mathbf{Z}$. Бидејќи секој ненулти полином има конечен број на нули, следува дека $h(x)\equiv 0$. Следува дека $q(x)$ е константен полином и $p(x)=cx(x-1)$ за произволен избор на реалната константа c. Останува уште само да се провери дека полиномите ја задоволуваат дадената равенка.

Задачи за самостојна работа

1. Определи ги сите решенија $f(x)$ на равенката
$$xf(x)+2xf(-x)=-1 \text{ каде } x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}.$$
2. Реши ја функционалната равенка
$$2f(\mathrm{tg}x)+f(-\mathrm{tg}x)=\sin 2x$$
каде $f(x)$ е функција дефинирана на интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.
3. Определи ги сите функции $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ такви што
$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{N}_0.$$
4. За функцијата $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ е исполнето $f(1)=2$ и
$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$. Определи ги сите такви функции.
5. (Belarus 1997) Определи ги сите функции $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што за произволни реални броеви x и y:
$$g(x+y)+g(x)g(y)=g(xy)+g(x)+g(y).$$
6. Определи ги сите реални полиноми $p(x)$ кои ја задоволуваат равенката
$$p(x^2-2x)=\left(p(x-2)\right)^2 \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$
7. (Romania 2001) Определи ги сите реални полиноми такви што
$$p(x)p(2x^2-1)=p(x^2)p(2x-1) \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Литература

[1] D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011

[2] Р. Малчески, А. Малчески, Функции и функционални равенки, Армаганка, Скопје, 2019

[3] P. Vaderlind, The quest for functions - Functional equations for тhe beginners, Stockholm University, 2005