Шефкет Арсланагиќ, Сараево

НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

Во оваа статија ќе го докажеме неравенството на Чебишев и ќе дадеме неколку интересни примени на истото.

Теорема (Чебишев). Ако за броевите $a_i, b_i \in \mathbf{R}, i=1,2,...,n$ важи $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ или $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$, тогаш е исполнето неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \ . \tag{1}$$

Ако за броевите $a_i, b_i \in \mathbf{R}, i=1,2,...,n$ важи $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ или $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$, тогаш е исполнето неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \ . \tag{2}$$

Во равенствата (1) и (2) знак за равенство важи ако и само ако

$$a_1 = a_2 = ... = a_n \text{ или } b_1 = b_2 = ... = b_n .$$

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ или $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$. Притоа за секои $i, j \in \{1,2,...,n\}$ важи неравенството

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0 , \tag{*}$$

од каде што последователно следува:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j) \ge 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j b_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \ge 0 ,$$

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} a_j + n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \ge 0 ,$$

$$2n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge 2\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i ,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \ ,$$

што значи дека точно е неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенствата (*) важи знак за равенство за $i, j \in \{1,2,...,n\}$, т.е. ако и само ако

$$a_1 = a_2 = ... = a_n \text{ или } b_1 = b_2 = ... = b_n .$$

Неравенството (2) се докажува аналогно. Обиди се самостојно да го испишеш доказот. ♦

Пример 1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажете го неравенството

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2} \geq \frac{15}{4} .$$

Решение. Од $a,b,c>0$ и $a+b+c=1$ имаме $a<1, b<1, c<1$, па затоа $0<a<1$, $0<b<1$ и $0<c<1$. Понатаму, даденото неравенство е симетрично во однос на a,b и c, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $0<a\leq b\leq c$. Имаме $a^2 \leq b^2 \leq c^2 <1$, т.е.

$$1+a^2 \leq 1+b^2 \leq 1+c^2 \text{ и } -a^2 \geq -b^2 \geq -c^2 > -1$$

што значи

$$1-a^2 \geq 1-b^2 \geq 1-c^2 > 0,$$

т.е.

$$\frac{1}{1-a^2} \leq \frac{1}{1-b^2} \leq \frac{1}{1-c^2} .$$

Сега од неравенството на Чебишев за $n=3$ и од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2} &= (1+a^2)\frac{1}{1-a^2}+(1+b^2)\frac{1}{1-b^2}+(1+c^2)\frac{1}{1-c^2}\\ &\geq \frac{1}{3}(1+a^2+1+b^2+1+c^2)(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2})\\ &= \frac{1}{3}(3+a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2})\\ &\geq \frac{1}{3}[3+\frac{1}{3}(a+b+c)^2](\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2})\\ &= \frac{1}{3}[3+\frac{1}{3}\cdot 1^2](\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2})\\ &= \frac{10}{9}(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}),\end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2} \geq \frac{10}{9}(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}) . \tag{3}$$

Сега ќе докажеме дека

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2} \geq \frac{27}{8} , \tag{4}$$

за $a,b,c>0$ и $a+b+c=1$. Повторно од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме

$$a^2+b^2+c^2 \geq \tfrac{1}{3}(a+b+c)^2 = \tfrac{1}{3}\cdot 1^2 = \tfrac{1}{3},$$

па затоа $-(a^2+b^2+c^2) \leq -\frac{1}{3}$, т.е.

$$3-(a^2+b^2+c^2) \leq 3-\tfrac{1}{3}$$

односно

$$1-a^2+1-b^2+1-c^2 \leq \tfrac{8}{3},$$

што значи

$$\frac{1}{1-a^2+1-b^2+1-c^2} \geq \frac{3}{8}. \tag{5}$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}, \text{ т.е. } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z},$$

при $x=1-a^2$, $y=1-b^2$, $z=1-c^2$ и неравенството (5) имаме:

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2} \geq \frac{9}{1-a^2+1-b^2+1-c^2} \geq 9\cdot\frac{3}{8} = \frac{27}{8},$$

т.е. точно е неравенството (4).

Конечно, од неравенствата (3) и (4) следува

$$\begin{aligned}\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2} &\geq \frac{10}{9}\left(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}\right)\\ &\geq \frac{10}{9}\cdot\frac{27}{8} = \frac{15}{4},\end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$. Последното следува како од неравенството на Чебишев и фактот дека во неравенствата меѓу средините знак за равенство важи ако и само ако броевите се еднакви. ♦

Пример 2. Нека h_a, h_b, h_c се должините на висините, r_a, r_b, r_c се должините на радиусите на припишаните кружници и r е должината на радиусот на вписаната кружница во ΔABC. Докажете го неравенството

$$\frac{h_a^2}{r_a}+\frac{h_b^2}{r_b}+\frac{h_c^2}{r_c} \geq 9r. \tag{6}$$

Решение. За секој триаголник точни се равенствата

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}. \tag{8}$$

Понатаму, даденото неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \geq b \geq c$, од што следува $r_a \geq r_b \geq r_c$, т.е. $\frac{1}{r_a} \le \frac{1}{r_b} \le \frac{1}{r_c}$ и $h_a \le h_b \le h_c$. Сега, од неравенството (1) на Чебишев и равенствата (7) и (8) следува

$$\begin{aligned}\frac{h_a^2}{r_a}+\frac{h_b^2}{r_b}+\frac{h_c^2}{r_c} &= h_a^2\frac{1}{r_a}+h_b^2\frac{1}{r_b}+h_c^2\frac{1}{r_c}\\ &\ge \frac{1}{3}(h_a^2+h_b^2+h_c^2)(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c})\\ &= \frac{1}{3}(h_a^2+h_b^2+h_c^2)(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})\\ &= \frac{1}{3r}(h_a^2+h_b^2+h_c^2).\end{aligned} \tag{9}$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2 \ge \frac{1}{3}(h_a+h_b+h_c)^2$$

и ако замениме во неравенството (9) имаме:

$$\frac{h_a^2}{r_a}+\frac{h_b^2}{r_b}+\frac{h_c^2}{r_c} \ge \frac{1}{9r}(h_a+h_b+h_c)^2. \tag{10}$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

т.е.

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \ge 9,$$

па затоа

$$\begin{aligned}h_a+h_b+h_c &= \frac{2P}{a}+\frac{2P}{b}+\frac{2P}{c} = 2P(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\\ &= 2\frac{r(a+b+c)}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \ge 9r.\end{aligned}$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (10) добиваме

$$\frac{h_a^2}{r_a}+\frac{h_b^2}{r_b}+\frac{h_c^2}{r_c} \ge \frac{1}{9r}(h_a+h_b+h_c)^2 \ge \frac{1}{9r}(9r)^2 = 9r.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамностран. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Нека $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви такви што $x_1x_2...x_n \ge 1$ и $k>0$. Докажете го неравенството

   $$x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+...+x_n^{k+1} \ge x_1^k+x_2^k+...+x_n^k.$$

   Кога важи знак за равенство?

2. Нека $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви. Докажете го неравенството

   $$\frac{x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+...+x_n^{n+1}}{x_1x_2...x_n} \ge x_1+x_2+...+x_n.$$

   Кога важи знак за равенство?

3. Нека $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви. Докажете го неравенството

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}...x_n^{x_n} \geq (x_1x_2...x_n)^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}.$$

Кога важи знак за равенство?

4. Докажете, дека ако $0 < a \leq b \leq c$, тогаш $a^{c-a}b^{a-b}c^{b-c} \leq 1$.

5. Нека α,β,γ се внатрешните агли, m_a, m_b, m_c се должините на тежишните линии и r е должината на радиусот на впишаната кружница во ΔABC. Докажете го неравенството

$$\frac{\cos\alpha}{m_a}+\frac{\cos\beta}{m_b}+\frac{\cos\gamma}{m_c} \leq \frac{1}{2r}.$$

Кога важи знак за равенство?

6. Нека α,β,γ се внатрешните агли, m_a, m_b, m_c се должините на тежишните линии, s е полупериметарот и r е должината на радиусот на впишаната кружница во ΔABC. Докажете го неравенството

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{m_a}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{m_b}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{m_c} \leq \frac{s}{3r^2}.$$

Кога важи знак за равенство?

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š. Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
2. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
3. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
4. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
5. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
6. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008