

XI олимпијада

1. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви a такви што за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $z = n^4 + a$ е сложен.

Решение. Нека $a = 4k^4$, каде што $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} z = n^4 + a &= n^4 + 4k^4 = n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 = (n^2 + 2k^2)^2 - (2nk)^2 \\ &= (n^2 + 2k^2 - 2nk)(n^2 + 2k^2 + 2nk) \end{aligned}$$

и притоа важи

$$n^2 + 2k^2 - 2nk = (n - k)^2 + k^2 \geq k^2 > 1;$$

$$n^2 + 2k^2 + 2nk = (n + k)^2 + k^2 > k^2 > 1.$$

Јасно, бројот z е сложен бидејќи може да се запише како производ на два природни броја поголеми од 1.

2. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се реални константи, x е реална променлива и

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \dots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Ако $f(x_1) = f(x_2) = 0$, тогаш $x_1 - x_2 = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\cos(a_i + x)}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{\cos[(a_i + x_1) + (x - x_1)]}{2^{i-1}} \\ &= \cos(x - x_1) \sum_{i=1}^n \frac{\cos(a_i + x_1)}{2^{i-1}} - \sin(x - x_1) \sum_{i=1}^n \frac{\sin(a_i + x_1)}{2^{i-1}} \\ &= \cos(x - x_1) f(x_1) - \sin(x - x_1) f\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right). \end{aligned}$$

Од условот на задачата имаме $f(x_1) = 0$ и

$$f(-a_1) = \cos 0 + \sum_{i=2}^n \frac{\cos(a_i - a_1)}{2^{i-1}} \geq 1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^n} > 0.$$

Значи, $f(x) \neq 0$ и $f(\frac{\pi}{2} + x_1) \neq 0$.

Бидејќи $f(x_2) = 0$, добиваме $\sin(x_2 - x_1) = 0$, т.е. $x_2 - x_1 = m\pi$.

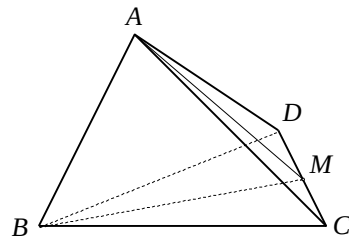
3. За $k = 1, 2, 3, 4, 5$ најди потребен и доволен услов кој го задоволува бројот $a > 0$ за да постои тетраедар чии k рабови имаат должина a , а останатите $6 - k$ рабови да имаат должина 1.

Решение. а) $k = 1$. Нека $\overline{AB} = a$,

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1.$$

Точката M е средина на работ CD . Тогаш

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Бидејќи } \overline{AB} < \overline{AM} + \overline{BM},$$



Црп. 11.1.

мора да е исполнето $a < \sqrt{3}$. Овој услов е и доволен. Навистина, ако $a < \sqrt{3}$, тогаш постои триаголник ABM со должини на страни $\overline{AB} = a$, $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M , а C и D се точки на n такви што $\overline{MC} = \overline{MD} = \frac{1}{2}$. Тогаш

$$\overline{AB} = a \text{ и } \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1.$$

б) $k = 2$. Постојат две можности.

1) Рабовите со должина a почнуваат во исто теме. Нека $\overline{AC} = \overline{AD} = a$ и $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$, а M е средина на работ CD . Тогаш $\overline{AM} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$ и $\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Од $\overline{AB} - \overline{BM} < \overline{AM} < \overline{AB} + \overline{BM}$, го добиваме неравенството

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

кое е еквивалентно на неравенството $\sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Последното неравенство е и доволен услов. Во овој случај постои $\triangle ABM$ со страни $\overline{AB} = 1$, $\overline{AM} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$, $\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M , а точките C и D припаѓаат на n и $\overline{MC} = \overline{MD} = \frac{1}{2}$.

Останува да се провери дека рабовите на тетраедарот ги исполнуваат условите $\overline{AC} = \overline{AD} = a$ и $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$.

2) Рабовите со должина a се разминувачки. Нека

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a, \quad \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 1$$

и точката M е средина на работ CD . Тогаш $\overline{MA} = \overline{MB} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$. Неравенството $\overline{AB} < \overline{MA} + \overline{MB}$ е еквивалентно со неравенството $a < \sqrt{2}$.

Последниот неравенство е и доволен услов. Навистина, ако $a < \sqrt{2}$ тогаш постои триаголник ABM со страни $\overline{AB} = a$, $\overline{MA} = \overline{MB} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M , а C и D се такви точки на n , што $\overline{MC} = \overline{MD} = \frac{a}{2}$. Останува да се провери дека

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a \text{ и } \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 1.$$

Значи, за $k = 2$, потребен и доволен услов е $a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

в) $k = 3$. Доволно е да се разгледаат следните два случаи.

1) Рабовите со должина a излегуваат од исто теме. Ако

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = a \text{ и } \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1,$$

тогаш $\overline{AC} > \overline{CO}$ (бидејќи $\triangle AOC$ е правоаголен), каде O е средна точка на триаголникот BCD . Од $\overline{CO} = R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $a > R$, сле-

дува $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ова неравенство е и доволен

услов. Нека BCD е рамностран триаголник со страна 1, а n е нормалата на рамнината BCD во точката O . Точката A припаѓа на

нормалата n така што $\overline{OA} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$. Сега

треба да се провери дали $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = a$.

2) Рабовите со должина a се страни на рамностран триаголник. Нека $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = a$ и $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 1$. Како и во претходниот случај мора да е исполнето $\overline{AC} > \overline{CO}$, $\overline{CO} = R$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $R < 1$, т.е. $\frac{a}{\sqrt{3}} < 1$, $a < \sqrt{3}$.

Лесно се докажува дека овој услов е и доволен.

г) $k = 4$. Во овој случај ќе разгледаме тетраедар сличен на дадениот со коефициент на сличност $k = \frac{1}{a}$. Новиот тетраедар има 4 рабови со должина 1 и

два раба со должина $\frac{1}{a}$. Според тоа потребен и доволен услов е $\frac{1}{a} < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$,

т.е. $a > \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

д) $k = 5$. Разгледуваме сличен тетраедар на дадениот со коефициент на сличност $\frac{1}{a}$. Тој има 5 рабови со должина 1 и еден раб со должина $\frac{1}{a}$. Според тоа, потребен и доволен услов $\frac{1}{a} < \sqrt{3}$, т.е. $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

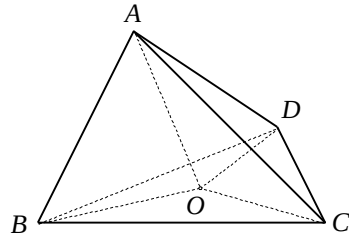
4. Нека отсечката AB е дијаметар на кружницата γ и $C \in \gamma$ е таква што $C \neq A$ и $C \neq B$. Точката D е ортогонална проекција на точката C врз отсечката AB . Трите кружници γ_1, γ_2 и γ_3 ја допираат AB така што γ_1 е впишана во триаголникот ABC , а γ_2 и γ_3 ја допираат отсечката CD и кружницата γ . Докажи дека γ_1, γ_2 и γ_3 имаат и друга заедничка тангента.

Решение. Нека O_2 е центар на γ_2 , $O_2H_2 \perp AB$ и H_2 е меѓу B и D . Радиусот на γ нека е R . Ако воведеме ознаки $\overline{AD} = x$ и $\overline{O_2H_2} = r$ добиваме

$$\overline{AH_2} = r + x \text{ и } \overline{OO_2} = \sqrt{OH_2^2 + r^2} = \sqrt{(x + r - R)^2 + r^2}.$$

Но, γ и γ_2 се допираат па е $\overline{OO_2} + \overline{O_2K} = R$, односно

$$\sqrt{(x + r - R)^2 + r^2} = R - r \text{ т.е. } (x + r - R)^2 = R^2 - 2Rr$$



Црп. 11.2.

и според тоа

$$\overline{AH_2}^2 = (x+r)^2 = [(x+r-R)+R]^2 = 2Rx.$$

Понатаму, од $\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 2Rx = \overline{AH_2}^2$, добиваме $\overline{AC} = \overline{AH_2}$.

Ако со O_3 го означиме центарот на γ_3 и $O_3H_3 \perp AB$, тогаш аналогно се докажува дека $\overline{BC} = \overline{BH_3}$. Нека O_1 е средина на отсечката O_3O_2 , $O_1H_1 \perp AB$. Ќе покажеме дека O_1 е центар на γ_1 . Бидејќи O_1H_1 е средна линија на трапезот $O_3H_3H_2O_2$, точно е равенството

$$\overline{O_1H_1} = \frac{1}{2}(\overline{O_3H_3} + \overline{O_2H_2}).$$

Понатаму, $\overline{O_3H_3} = \overline{H_3D}$, CD е тангентата на γ_2 и γ_3 , $\overline{O_2H_2} = \overline{H_2D} = r$. Според тоа

$$\begin{aligned}\overline{O_1H_1} &= \frac{\overline{O_3H_3} + \overline{O_2H_2}}{2} = \frac{\overline{H_3D} + \overline{H_2D}}{2} = \frac{\overline{H_3H_2}}{2} = \frac{\overline{AH_2} + \overline{BH_3} - \overline{AB}}{2} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2} \\ \overline{AH_1} &= \frac{\overline{AH_3} + \overline{AH_2}}{2} = \frac{\overline{AH_2} + \overline{AB} - \overline{BH_3}}{2} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2}.\end{aligned}$$

Нека O'_1 е центар на γ_1 , $O'_1H'_1 \perp AB$, $O'_1M \perp AC$, $O'_1N \perp BC$ и H'_1, M, N се допирни точки на $\triangle ABC$ и γ_1 . Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{AH'_1} + \overline{AM} &= (\overline{AB} - \overline{BH'_1}) + (\overline{AC} - \overline{MC}) = \overline{AC} + \overline{AB} - (\overline{MC} + \overline{BH'_1}) \\ &= \overline{AC} + \overline{BC} - (\overline{CN} + \overline{BN}) = \overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}.\end{aligned}$$

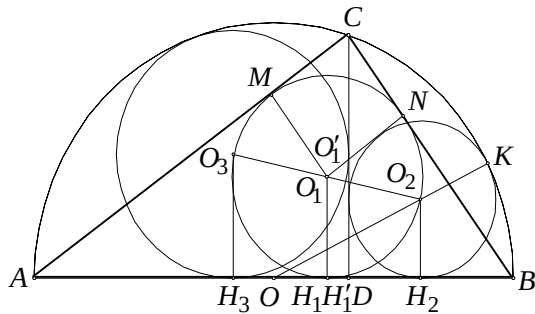
бидејќи $\overline{MC} = \overline{CN}$ и $\overline{BH'_1} = \overline{BN}$ (разгледај ги тангентите од точките B и C кон кружницата). Според тоа,

$$\overline{O'_1H'_1} = \overline{O'_1M} = \overline{O'_1N} = \overline{CM} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2} = \overline{O_1H_1}.$$

Ако триаголникот ABC не е рамнокрак тогаш $O_2O_3 \parallel AB$, од што следува дека точките O_1 и O'_1 се совпаѓаат. Ако триаголникот ABC е рамнокрак, тогаш радиусите на γ_1, γ_2 и γ_3 се еднакви на $(\sqrt{2}-1)R$.

Докажавме дека O_1, O_2 и O_3 лежат на една права.

Понатаму, правата која е симетрична на тангентата на кружница во однос на правата која минува низ центарот повторно е тангентата на кружницата.



Црп. 11.3.

Според тоа, правата симетрична со AB во однос на правата $O_1O_2 \equiv O_2O_3$ е бараната втора тангента.

5. Во рамнина дадени се n , ($n > 4$) точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Докажи дека постојат најмалку $\binom{n-3}{2}$ конвексни четириаголници кои имаат темиња во четири од дадените точки.

Решение. *Лема.* Во рамнина се дадени пет точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Тогаш постојат четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник.

Доказ. Ако конвексното затворање на дадените точки е петаголник, тогаш било кои четири точки се темиња на конвексен четириаголник. Ако конвексното затворање на дадените точки е четириаголник, тогаш тој е бараниот четириаголник. Нека конвексното затворање е триаголник и точките A, B, C од дадените се темиња на тој на триаголник. Две точки D и E од дадените, лежат во внатрешноста на тој триаголник, а правата DE сече две од страните на тој триаголник во внатрешни точки. Нека се тоа на пример AC и BC . Тогаш точките A, B, D и E се темиња на конвексниот четириаголник. ■

Ги разгледуваме сите комбинации од по 5 точки. Нив ги има $\binom{n}{5}$. Секоја комбинација содржи подмножество од четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник. Секое теме на четириаголникот е вклучено во $n-4$ комбинации. Значи, постојат барем $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ конвексни четириаголници, кои припаѓаат на даденото множество точки. Останува да докажеме дека

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5} \geq \binom{n-3}{2}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(n-5)(n-6)(n+8) \geq 0.$$

кое е точно за секој $n > 4$. Знак за равенство важи ако и само ако $n = 5$ или $n = 6$.

6. Докажи дека, ако $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1y_1 - z_1^2 > 0, x_2y_2 - z_2^2 > 0$, тогаш точно е неравенството

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Најди потребни и доволни услови при кои важи знак за равенство.

Решение. Од условот на задачата следува $y_1 > 0, y_2 > 0$. Воведуваме ознаки

$$u_1 = \sqrt{x_1y_1} + z_1, u_2 = \sqrt{x_2y_2} + z_2, v_1 = \sqrt{x_1y_1} - z_1 \text{ и } v_2 = \sqrt{x_2y_2} - z_2.$$

При тоа u_1, u_2, v_1 и v_2 се позитивни реални броеви. Понатаму, од

$$\begin{aligned}
 (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 &= (\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2})^2 + (\sqrt{x_1 y_1} - \sqrt{x_2 y_2})^2 - (z_1 + z_2)^2 \\
 &= (\sqrt{x_1 y_1} + z_1 + \sqrt{x_2 y_2} + z_2)(\sqrt{x_1 y_1} - z_1 + \sqrt{x_2 y_2} - z_2) + (\sqrt{x_1 y_1} - \sqrt{x_2 y_2})^2 \\
 &= (u_1 + u_2)(v_1 + v_2) + (\sqrt{x_1 y_1} - \sqrt{x_2 y_2})^2
 \end{aligned}$$

следува

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \geq (u_1 + u_2)(v_1 + v_2),$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_1 y_2 = x_2 y_1$.

Доволно е да се докаже неравенството $\frac{8}{(u_1 + u_2)(v_1 + v_2)} \leq \frac{1}{u_1 v_1} + \frac{1}{u_2 v_2}$, односно

$$8u_1 u_2 v_1 v_2 \leq (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)(u_1 v_1 + u_2 v_2)$$

Последното неравенство е точно, бидејќи

$$2\sqrt{u_1 u_2} \leq u_1 + u_2, 2\sqrt{v_1 v_2} \leq v_1 + v_2 \text{ и } 2\sqrt{u_1 v_1 u_2 v_2} \leq u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Јасно, знак за равенство важи ако $u_1 = u_2, v_1 = v_2$.

Со тоа даденото неравенство е докажано.

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1 y_2 = x_2 y_1, u_1 = u_2, v_1 = v_2$.