26. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 17. октобар 2004. год.

8–9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (*3 йоена*). Могу ли се цели бројеви од 1 до 2004 распоредити у неки низ, тако да збир ма којих 10 узастопних буде дељив са 10?

2. (*4 йоена*). У кутији се налази 111 куглица црвене, плаве, зелене и беле боје. Ако се, не гледајући у кутију, извади из ње 100 куглица, онда ће међу њима обавезно бити 4 куглице различитих боја. Колико најмање куглица морамо извући, не гледајући у кутију, да би се међу њима сигурно нашле 3 куглице различитих боја?

3. (*4 йоена*). Имамо неколико градова, од којих су неки повезани аутобуским линијама (без међустаница). Из ма којег града може се стићи у ма који други (уз могуће преседање). Ивановић је купио по једну возну карту за сваку маршруту (тј. може проћи по њој само једном на било коју страну). Петровић је купио n возних карата за сваку маршруту. Ивановић и Петровић су пошли из града А. Ивановић је искористио све своје карте, нове карте није куповао и стигао је у град В. Петровић је неко време путовао са купљеним картама, нашао се у граду Х и не може из њега поћи док не купи нову карту. Доказати да је Х или град А, или град В.

4. (*5 йоена*). Дати су кружница и права која је не сече. Како помоћу шестара и лењира конструисати квадрат чија ће два суседна темена бити на кружници, а друга два темена - на датој правој (ако се зна да такав квадрат постоји)?

5. (*5 йоена*). Колико има различитих начина да се број 2004 разложи на целе позитивне сабирке, који су приближно једнаки? Сабирака може бити један или неколико. Бројеве називамо приближно једнаким ако њихова разлика није већа од 1. Начини, који се разликују само по *редоследу сабирака, сматрају се једнаким.*

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло

Припремна варијанта, 17. октобар 2004. год.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (*3 поена*). Три кружнице пролазе кроз тачку X. Тачке A, B, C - су тачке њиховог пресека, различите од X. Нека је A' друга пресечна тачка праве AX и кружнице описане око троугла BCX. Тачке B' и C' одређене су аналогно. Докажите да су троуглови ABC', A B'C и A'BC слични.

2. (*3 поена*). У кутији се налази 100 куглица беле, плаве и црвене боје. Ако се, не гледајући у кутију, извади из ње 26 куглица, онда ће међу њима обавезно бити 10 куглица исте боје. Колико најмање куглица морамо извући, не гледајући у кутију, да би се међу њима сигурно нашло 30 куглица исте боје?

3. (*4 поена*). Дата су два полинома позитивног степена, $P(x)$ и $Q(x)$, при чему важе идентитети $P(P(x))=Q(Q(x))$ и $P(P(P(x)))=Q(Q(Q(x)))$. Да ли тада обавезно важи идентитет $P(x)=Q(x)$?

4. (*4 поена*). Колико има различитих начина да се број 2004 разложи на целе позитивне сабирке, који су приближно једнаки? Сабирака може бити један или неколико. Бројеве називамо приближно једнаким ако њихова разлика није већа од 1. Начини, који се разликују само по редоследу сабирака, сматрају се једнаким.

5. (5 поена). За које N се бројеви од 1 до N могу поређати у другачијем редоследу, тако да аритметичка средина ма које групе од два или више узастопних бројева не буде цео број?

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 24. октобар 2004. год.

8–9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (*4 поена*). Троугао ћемо звати рационалним ако су мерни бројеви свих његових углова рационални бројеви. Тачку у троуглу зваћемо рационалном ако, спојивши је са теменима, добијемо три рационална троугла. Докажите да у сваком оштроуглом рационалном троуглу постоје бар три рационалне тачке.

2. (*5 поена*). Кружница, уписана у троугао ABC, додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама A', B' и C'. Знамо да је AA'=BB'=CC'. Да ли је тада обавезно троугао ABC једнакостраничан?

3. (*6 поена*). *Колико се највише коња може поставити на шаховску таблу* 8x8, тако да сваки туче не више од 7 осталих.

4. (*6 поена*). Васа је замислио два позитивна броја x и y. Записао је бројеве $x+y$, $x-y$, xy и x/y и показао Петру, али му није рекао, који број је у којој операцији добијен. Докажите да Петар може једнозначно да одреди x и y.

5. (*7 поена*). У троуглу ABC на страници BC означена је тачка K. У троуглове ABK и ACK уписане су кружнице, при чему прва додирује страницу BC у тачки M, а друга у тачки N. Докажите да је тада $BM \cdot CN > KM \cdot KN$.

6. (*8 поена*). Двојица деле комад (парче) сира. На почетку први дели сир на два комада, затим други сваки од тих комада дели на два дела и тако даље, док се не добије 5 комада. Затим први за себе узима један комад, онда други узима један од преосталих комада, затим опет први и тако све док има сира. За сваког играча утврдите колико највише сира он може осигурати за себе, без обзира како игра његов противник.

7. (*8 поена*). Нека су A и B два правоугаоника. Од правоугаоника који су подударни са A, састављен је правоугаоник сличан са B. Доказати да се од правоугаоника подударних са B може саставити правоугаоник сличан са A.

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло

Основна варијанта, 24. октобар 2004. год.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (*5 йоена*). Функције f и g дефинисане су на целој бројевној правој и узајамно су инверзне, тј. $g(f(x))=f(g(x))=y$ за свако x и y. Познато је да се f може приказати у облику збира линеарне и периодичне функције (тј. $f(x)=kx+h(x)$, где је k број, а h - периодична функција). Докажите да се g такође може представити у таквом облику. (Функција h назива се периодичном ако се може наћи такав број $d\neq 0$, тако да је $h(x+d)=h(x)$ за сваки број x).

2. (*5 йоена*). Двојица играју следећу игру. Имамо гомилу каменчића. Први играч, кад је на потезу, узима 1 или 10 каменчића. Други играч, при сваком свом потезу, узима m или n каменчића. Предмете узимају наизменично, а почиње први. Губи онај који не може да начини потез (да узме каменчић). Зна се да при ма којој почетној количини каменчића, први играч увек може да игра тако да победи. Какви могу бити бројеви m и n?

3. (*5 йоена*). Васа је замислио два позитивна броја x и y. Затим је записао бројеве $x+y$, $x-y$, xy и x/y и показао Петру, али му није рекао који број је у којој операцији добијен. Докажите да Петар може једнозначно да одреди x и y.

4. (*6 йоена*). Кружница с центром I лежи у кружници са центром O. Нађите геометријско место центара кружница описаних око троуглова IAB, где је AB тетива веће кружнице која додирује мању кружницу.

5. (*7 йоена*). Нека су А и В два правоугаоника. Од правоугаоника који су подударни са А, састављен је правоугаоник сличан са В. Доказати да се од правоугаоника подударних са В може саставити правоугаоник сличан са А.

6. (*8 йоена*). Дат је цео број n, који није дељив ни са 2 ни са 3. Троугао ћемо звати разрешивим ако мера сваког његовог угла има облик $\frac{m\cdot 180^\circ}{n}$ (m помножити са 180 степени, па поделити са n), где је m - цео број. Једнаким ћемо сматрати разрешиве троугле са једнаким угловим (тј. сличне троуглове). У почетку је дат један разрешиви троугао. Сваког минута један од постојећих троуглова разрезује се на два разрешива тако да су после резања сви добијени троуглови неједнаки (тј. нису слични). После неког времена показало се да ниједан од троуглова није могуће тако разрезати. Докажите да су до тог момента међу добијаним деловима постојали сви могући разрешиви троуглови.

7. (*8 йоена*). Углови AOB и COD доводе се до поклапања ротацијом. У њих су уписане кружнице које се секу у тачкама E и F. Докажите да су углови AOE и DOF једнаки.

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.
Припремна варијанта. 20. фебруар 2005. год.

8—9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (3 поена) Истовремено из села А и Б су кренули Ана и Бора у сусрет једно другоме (њихове брзине су константне, али не и нужно међусобно једнаке). Да је Ана кренула 30 минута раније, они би се срели 2 km ближе селу Б. Да је Бора кренуо 30 минута раније, сусрет би се десио ближе селу А. За колико ближе?

2. (4 поена) Нека је N било који природан број. Доказати да се у десетичном запису било броја N било броја 3N налази једна од цифара 1, 2, 9.

3. (5 поена) У првом реду шаховске табле се налази 8 истоветних црних дама, а у последњем реду 8 истоветних белих дама. За који минималан број потеза беле даме могу заменити места са црним дамама? Бели и црни потезе вуку наизменично, по једна дама за један потез. Дама се креће по хоризонтали, по вертикали или по дијагонали за ма који број поља, ако се на путу не налазе друге даме.

4. (5 поена) Дат је квадрат ABCD, а M и N су средишта страница BC и AD респективно. На продужетку дијагонале AC, преко тачке A, одабрана је тачка K. Дуж KM сече страницу AB у тачки L. Докажите да су углови KNA и LNA једнаки.

5. (5 поена) У неком граду све улице иду или правцем север - југ или правцем исток-запад. Возач аутомобила се провозао тим градом, направивши тачно сто скретања на лево. Колико скретања на десно је при томе могао направити, ако ни једно место није прошао два пута и на крају се вратио на место поласка? (Све улице су двосмерне.)

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.
Припремна варијанта, 20. фебруар 2005. год.
10—11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (3 поена) На координатној равни је нацртано четири графика функкције облика $y = x^2 + ax + b$, где су a и b бројевни коефицијенти. Знамо да постоје тачно 4 тачке пресека, при чему се у свакој секу тачно два графика. Доказати да је збир највеће и најмање од апсциса тачака пресека једнака збиру преостале две апсцисе.

2. (4 поена) Сви природни бројеви су записани један за другим без размака на бесконачној траци: 1234567891011121314... Затим су траку разрезали на делове од по седам цифара у сваком делу. Доказати да се ма који седмоцифрени број

   а) налази бар на једном делу (3 поена);

   б) налази на бесконачно много делова (1 поен).

3. (4 поена) Дат је квадрат ABCD, а M и N су средишта страница BC и AD респективно. На продужетку дијагонале AC иза тачке A одабрана је тачка K. Дуж KM сече страницу AB у тачки L. Докажите да су углови KNA и LNA једнаки.

4. (4 поена) У неком граду све улице иду или правцем север - југ или правцем исток-запад. Аутомобилиста се провозао тим градом, направивши тачно сто скретања на лево. Колико је при том могао направити скретања на десно, ако ни једно место није прошао два пута и на крају се вратио на место поласка? (Све улице су двосмерне).

5. (5 поена) Збир неколико позитивних бројева једнак је 10, а збир њихових квадрата је већи од 20. Доказати да је збир кубова тих бројева већи од 40.

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 27. фебруар 2005. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) На графику квадратног тринома са целобројним коефицијентима уочене су две тачке са целобројним координатама. Докажите да, ако је растојање међу њима изражено целим бројем, онда је дуж која их спаја паралелна са апсцисном осом.

2. (5 поена) Висине AA' и BB' троугла ABC секу се у тачки H. Тачке X и Y су редом средишта дужи AB и CH. Докажите да су праве XY и A'B' међусобно нормалне.

3. На бројчанику исправног сата барона Минхаузена постоје само велика казаљка, мала казаљка и секундара, а све цифре и подеоци су избрисани. Барон тврди да он по том сату може да одређује тачно време, јер, према његовом посматрању, на њему се током дана (од 8.00 до 19.59) не понавља два пута исти распоред казаљки. Да ли је тврђење барона тачно? (Казаљке имају различиту дужину, а крећу се равномерно).

4. Папирни правоугаоник са квадратном мрежом, величине 10×12, неколико пута је пресавијан по линијама мреже тако да је добијен квадратић 1×1. Колико се парчића може добити пошто се тај квадратић расече по дужи која спаја

а) средишта две његове наспрамне ивице (2 поена);

б) средишта две његове суседне ивице (4 поена)?

(Нађите сва решења и докажите да других нема).

5. (6 поена) Конструктор се састоји из гарнитуре (комплета) правоуглих паралелепипеда. Сви се они могу сместити (сложити) у једну кутију такође облика правоуглог паралелепипеда. У шкартираном (дефектном) комплету код сваког паралелепипеда једна од ивица била је мања од стандардне. Може ли се тврдити да се код кутије, у коју се ставља комплет, такође може смањити једна од ивица? (Паралелепипеди се слажу у кутију тако да су њихове ивице паралелне ивицама кутије).

6. (6 поена) Тома и Сима деле гомилу од 25 новчића с вредностима 1, 2, 3, ... 25 алтина. При сваком потезу један од њих бира новчић из гомиле, а други говори коме да се да тај новчић. Први бира Тома, а потом онај који има тренутно више алтина, а ако имају једнако, онда онај који је бирао прошли пут. Може ли Тома поступати тако да на крају има више алтина од Симе, или, пак, Сима може увек у томе спречити Тому и на крају имати више алтина од Томе?

7. (8 поена) Поља шаховске табле 8×8 нумерисана су по дијагоналама, које иду с лева наниже, почевши од горњег левог угла: 1; следећа дијагонала 2, 3; следећа 4, 5, 6; и тако даље (претпоследња дијагонала 62, 63; последња 64). Пера је поставио на ту таблу 8 жетона тако да је у сваком реду и сваком ступцу био по један жетон. Затим је он преместио жетоне тако да је сваки жетон дошао на поље са већим бројем. Може ли после тога у сваком реду и сваком ступцу да се нађе по један жетон?

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 27. фебруар 2005. год.

10—11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) На графику полинома са целобројним коефицијентима уочене су две тачке са целобројним координатама. Докажите да, ако је растојање међу њима изражено целим бројем, онда је дуж која их спаја паралелна са апсцисном осом.

2. (5 поена) Кружница k_1 пролази кроз центар кружнице k_2. Кроз тачку С на кружници k_1 повучене су тангенте на k_2 и оне секу кружницу k_1 у тачкама А и В. Докажите да је дуж АВ нормална на праву која пролази кроз центре кружница.

3. (5 поена) Миша и Влада деле гомилу од 25 новчића с вредностима 1, 2, 3, ... 25 алтина. При сваком потезу један од њих бира новчић из гомиле, а други говори коме да се да тај новчић. Први бира Миша, а потом онај који има тренутно више алтина; ако имају једнако - онај који је бирао прошли пут. Може ли Миша играти тако да на крају има више алтина од Владе, или, пак, Влада може играти тако да он на крају има више алтина од Мише?

4. (6 поена) Постоји ли квадратни трином $f(x)$, такав да за сваки цео позитиван број n једначина $f(f(...f(x))) = 0$, где је n слова f, има тачно 2^n различитих реалних решења?

5. (7 поена) Икосаедар и додекаедар уписани су у једну исту сферу. Докажите да су они тада и описани око једне исте сфере. (Напомена: Икосаедар има 20 једнаких страна у виду правилних троуглова, из сваког темена полази по 5 ивица и углови које заклапају суседне стране су једнаки. Додекаедар се састоји из 12 једнаких страна - правилних петоуглова, из сваког темена полазе по 3 ивице и углови међу суседним странама су једнаки.)

6. (7 поена) Нека је a угаоно поље шаховске табле 8×8, b њему суседно поље на дијагонали. Докажите да је број начина да "хроми топ" обиђе целу таблу, полазећи са поља a, већи од броја начина да "хроми топ" обиђе целу таблу, полазећи са поља b. ("Хроми топ" се креће по табли по једно поље водоравно или усправно и мора да стане на свако поље табле тачно једном.)

7. У простору је дато 200 тачака. Сваке две од њих спаја дуж, при чему добијене дужи немају пресечних тачака. Свака дуж обојена је једном од К боја. Пеђа хоће сваку од датих тачака да обоји једном од тих К боја, али тако да се не могу наћи две тачке и дуж која је њима одређена исте боје. Може ли Пеђа то увек да уради, ако је:

- **а)** К = 7 (4 поена);
- **б)** К = 10 (4 поена)?