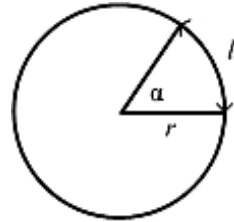


ПРИБЛИЖНА КОНСТРУКЦИЈА НА АГОЛ ОД 1 rad

Да се потсетиме: радијан (ознака rad) е мерна единица за агол. Големината на централниот агол α во радијани е еднаква на количникот на должината на кружниот лак l над тој агол и радиусот на кружницата r , т.е. $\alpha = \frac{l}{r}$, цртеж десно. Оттука, радијанската мерка на аголот чија мерка во степени е еднаква

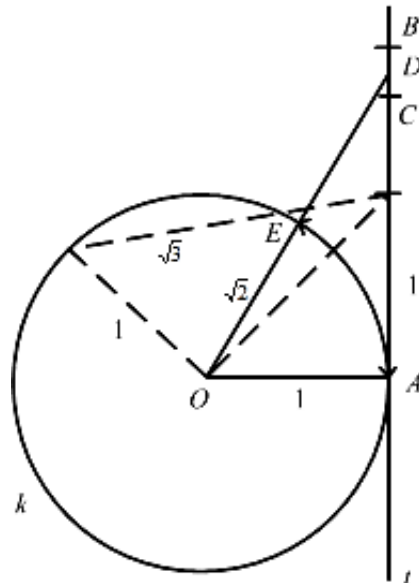


на 180° е еднаква на количникот на должината на полукружницата и радиусот, т.е. $\frac{L}{2r} = \pi \text{ rad}$, каде со L е означена должината на кружницата.

Според тоа, $180^\circ = \pi \text{ rad}$, па затоа $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29597^\circ = 57^\circ 17' 33,8''$ и $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad}$.

Докажано е дека конструкцијата на агол од 1 rad не е изводлива. Меѓутоа, најдени се многу интересни приближни конструкции, од кои во оваа статија ќе разгледаме четири.

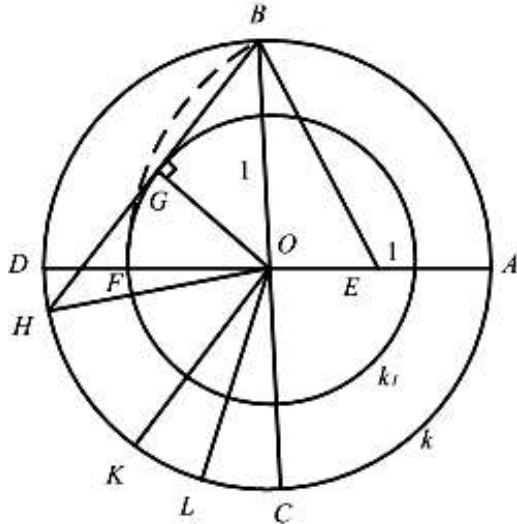
Прва конструкција. Конструираме кружница $k(O,1)$ и во точката A конструираме тангентата t . На тангентата, од иста страна на точката A , (цртеж десно) наоѓаме точки B и C такви што $\overline{AC} = \frac{3}{2}$ и $\overline{AB} = \sqrt{3}$ (конструкцијата на отсечка со должина $\sqrt{3}$ е дадена на цртежот десно). Потоа на тангентата t наоѓаме точка D таква што $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}}{4}$. Ја повлекуваме правата OD и ја наоѓаме пресечната точка E со кружницата k . Ќе докажеме дека должината на лакот AE приближно е еднаква на 1 rad. Имаме



$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \frac{\overline{BC}}{4} = \overline{AC} + \frac{1}{4}(\overline{AB} - \overline{AC}) \\ &= \frac{3}{4}\overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1,558012702\end{aligned}$$

додека $\text{tg}1 = 1,557407725$. Обидете се да ја определите грешката.

Втора конструкција. Нека дијаметрите AD и BC на кружницата $k(O,1)$ се заемно нормални, точката E е средина на радиусот OA и точката F припаѓа на радиусот OD и важи $\overline{EF} = \overline{EB}$ (цртеж десно). На кружницата $k_1(O, \overline{OF})$, од точката B повлекуваме тангентата која ја допира кружницата k_1 во точката G и ја сече кружницата k во точката H . Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle OEB$ добиваме



$$\overline{BE}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OB}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}, \text{ т.е. } \overline{BE} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Понатаму,

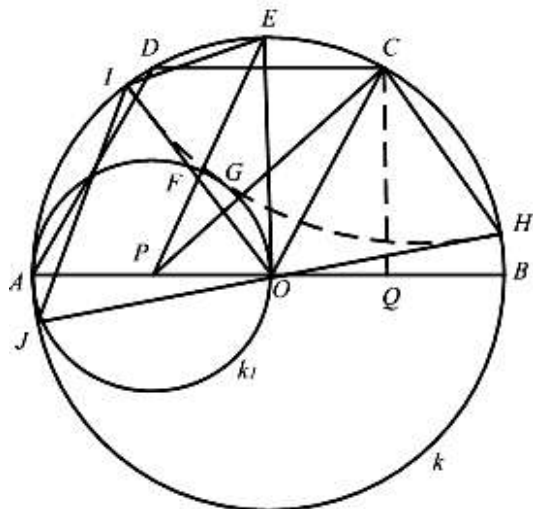
$$\overline{GO} = \overline{FO} = \overline{EF} - \overline{EO} = \overline{BE} - \overline{EO} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Од $\triangle OBG$ наоѓаме

$$\sin \sphericalangle OBG = \frac{\overline{GO}}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ т.е. } \sphericalangle OBG = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,666239 \text{ rad},$$

односно $\sphericalangle OBG \approx \frac{2}{3} \text{ rad}$. Понатаму, од теоремата за централен и перифериски агол следува $\sphericalangle HOC = 2\sphericalangle HBC = 2\sphericalangle OBG \approx \frac{4}{3} \text{ rad}$. Во точката O повлекуваме права паралелна со правата BH и нека K е пресечната точка на оваа права со кружницата k . Значи, $\sphericalangle HOK = \sphericalangle KOC = \sphericalangle OBG \approx \frac{2}{3} \text{ rad}$. Симетралата на аголот $\sphericalangle KOC$ ја сече кружницата k во точка L и притоа важи $\sphericalangle HOL} = \sphericalangle HOK} + \sphericalangle KOL} \approx \frac{2}{3} \text{ rad} + \frac{1}{3} \text{ rad} = 1 \text{ rad}$. Конечно, во овој случај конструираниот агол има големина $\frac{3}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,999359 \text{ rad}$ и јасно тоа е добро приближување за конструкција на агол од 1 rad .

Трета конструкција. Конструираме кружница $k(O, \overline{OA})$ и нека точките B, C и D припаѓаат на k и се такви што $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{OB}$. Сега нека точката P е средина на отсечката OA и да конструираме кружница $k_1(P, \overline{PA})$ (цртеж десно). Во точката O конструираме нормала на AB и нека таа го сече лакот CD во точката E и нека точките



F и G се соодветно пресечните точки на отсечките PE и PC се кружницата k_1 . На кружницата k определуваме точки I и H такви што $\overline{EI} = \overline{EF}$ и $\overline{CH} = \overline{CG}$. Пресечната точка на правата HO и кружницата k ја означуваме со J и нека точката Q е проекцијата на точката C на дијаметарот AB . Ќе докажеме дека $\sphericalangle IJH \approx 1 \text{ rad}$.

Нека $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$. Тогаш $\overline{OP} = \frac{1}{2}$, па од Питагоровата теорема за триаголникот $\triangle OPE$ следува $\overline{PE}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OE}^2 = \frac{5}{4}$, што значи $\overline{PE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Затоа $\overline{EI} = \overline{EF} = \overline{EP} - \overline{FP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Триаголникот $\triangle OBC$ е рамностран со должина на страна 1, а CQ е негова висина, па затоа $\overline{CQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle PQC$ добиваме

$$\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{PQ}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{7}{4}, \text{ т.е. } \overline{CP} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Сега $\overline{CH} = \overline{CG} = \overline{CP} - \overline{PG} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$. Понатаму, триаголникот OIE е рамнокрак и важи $\overline{EI} = 2 \sin \frac{\sphericalangle IOE}{2}$, па затоа $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \sin \frac{\sphericalangle IOE}{2}$, од каде добиваме $\frac{\sphericalangle IOE}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\pi}{10}$. Имаме $\sphericalangle EOC = \frac{\pi}{6}$ и триаголникот OCH е рамнокрак, па е $\overline{CH} = 2 \sin \frac{\sphericalangle COH}{2}$ и затоа $\frac{\sqrt{7}-1}{2} = 2 \sin \frac{\sphericalangle COH}{2}$, од каде добиваме $\frac{\sphericalangle COH}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4}$. Сега имаме

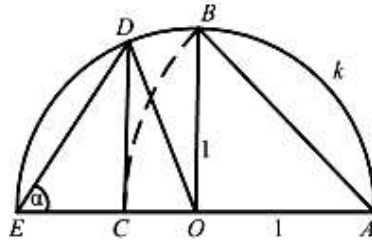
$$\angle IOH = \angle IOE + \angle EOC + \angle COH$$

и како $\angle IJH = \frac{\angle IOH}{2}$ добиваме

$$\begin{aligned}\angle IJH &= \frac{\angle IOH}{2} = \frac{\angle IOE}{2} + \frac{\angle EOC}{2} + \frac{\angle COH}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{12} + \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4} \\ &= \frac{11\pi}{60} + \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4} \approx 0,9999897 \text{ rad.}\end{aligned}$$

Забележуваме дека ова е доста приближна конструкција на агол од 1rad, но истата е доста комплицирана.

Четврта конструкција. Нека E е дијаметар на полукружницата $k(O, OA)$, $OA=1$, $OB \perp OA$ и точката C лежи на радиусот EO и е таква што $\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{2}$ (цртеж десно). Во точката C конструираме права нормална на EA



и нека таа ја сече полукружницата во точката D . Јасно, $\overline{OD}=1$ и $\overline{OC} = \overline{AC} - \overline{AO} = \sqrt{2} - 1$. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle OCD$ добиваме

$$\overline{CD}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OC}^2 = 1^2 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Понатаму, $\overline{CE} = \overline{AE} - \overline{AC} = 2 - \sqrt{2}$, а од $\triangle DEC$, повторно со примена на Питагоровата теорема наоѓаме

$$\overline{DE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 = 2(\sqrt{2} - 1) + (2 - \sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1).$$

Конечно, од $\triangle DEC$ добиваме $\sin^2 \varphi = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{ED}^2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Според тоа,

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0,9989 \text{ rad.}$$

Забележуваме дека последната конструкција е доста едноставна, но и дека има и многу мала грека.

Литература

1. Jim Dickson, Nick Lord, Approximate constructions of 1 radian, The Mathematical gazette, Vol. 98, Number 542, July, 2014
2. J. Carstensen, A. Muminagić: Konstruktion of 1 radian, Matematik Maqasinet, 25, s. 649
3. J. Carstensen, A. Muminagić: Konstruktion of 1 radian, 2, Matematik Maqasinet, 78, s. 2868