Лилјана Грибовска Поповиќ, Скопје

ИНВЕРЗИЈА *I*

Вовед

Има многу геометриски задачи кои што се решаваат со помош на геометриската трансформација инверзија, која пак не се изучува во нашиот образовен систем. За таа цел во следните редови ќе ги разгледаме нејзините теориски аспекти и примена. Но, најнапред да дадеме мала поддршка за подобро разбирање на содржините што следат како и на користените поими. Исто така ве упатуваме и на броевите 49 и 50 од математичкото списание “Сигма” од 2000/2001, каде во статијата *Пресликувања во рамнина преку комплексни броеви,* од Р. Малчески и А. Малчески, инверзијата е разгледана со помош на апаратот на комплексните броеви.

1. Да се потсетиме.

Во геометријата се разгледуваат разни пресликувања на множества од точки. Таквите пресликувања ги викаме геометриски трансформации. Некои од нив го задржуваат растојанието меѓу точките, нив ги нарекуваме *изометрии* (централна и осна симетрија, транслација, ротација). Кај други растојанието меѓу точките се смалува или зголемува, нив ги нарекуваме *трансформации на сличност.* Изометриите се посебен случај на трансформации на сличност. Хомотетијата која се изучува во нашиот образовен систем е исто така трансформација на сличност. Овде ќе се потсетиме на дефинирањето и на некои својства на хомотетијата кои ќе ги користиме во оваа статија.

Нека во рамнината П е дадена една фиксна точка О и $к\neq0$ е реален број. На произволна точка $А\in П$ ѝ придружуваме точка $А'$ од рамнината П, $А'\neq О$, таква што $\overrightarrow{OA'} = k\cdot\overrightarrow{OA}$. Така дефинираната трансформација на рамнината П се вика *хомотетија со центар во О и коефициент к* и ќе ја означуваме со $H^к_0$ или Н (О, k). Хомотетијата ја задржува колинеарноста на точките во рамнината, права што не минува низ центарот на хомотетијата ја пресликува во права паралелна на дадената, агол во еднаков на дадениот. Овде од посебен интерес е пресликувањето на кружница при хомотетија.

Кружница со радиус r , при хомотетија со коефициент к се пресликува во кружница со радиус $|к|$r. Било кои две кружници во рамнината се хомотетични, притоа концентричните имаат само еден центар на хомотетија, а оние кои не се концентрични може да имаат еден или два центри на хомотетија (ако се два тогаш едниот се вика надворешен а другиот внатрешен). Конструкцијата на центрите на хомотетија, се викаат уште и центри на сличност, ќе ја изведеме во склоп на задачите што овде ќе ги решаваме.

Во статијата исто така ќе го користиме и поимот *степен на точка А во однос на кружница к(*О, r*)*, а тоа е бројот $d_k(A) = OA^2 - r^2$.

2. Права и точка како кружници.

Нека во рамнината се дадени права p, точка M на неа и полуправа h со почеток во M и нормална на p.

(Црт. 1)

Да конструираме кружница к со центар во произволна точка O од полуправата h, којашто ја допира правата p во точката M. Ако точката O се движи по полуправата h и последователно ги зазема положбите O_1, O_2, O_3, O_4, . . . на нив ќе одговараат соодветно кружниците $к_1$, $к_2$, $к_3$, $к_4$, . . ., коишто ја допираат правата p во точката M. Тогаш, може да се каже, дека секоја следна кружница се повеќе се исправа, бидејки секоја следна кружница има се помала кривина (под кривина на кружница се подразбира вредноста на изразот 1/r , каде r е радиусот на кружницата). Ова дава за право секоја права да ја разгледуваме како кружница, имено како *кружница со бесконечно голем радиус*. Исто така, и секоја точка може да се разгледува како кружница и тоа како *кружница со радиус нула,* кое пак следува директно од дефиницијата на кружница. Разгледувањето на правата и точката како гранични случаи на кружницата е доста згодно при третирањето на некои задачи од геометријата, а особено кај инверзијата. Ова дозволува некои разгледувања и резултати од нив да имаат поголема општост.

3. Дефиниција и основни својства на инверзијата.

Нека во рамнината П е дадена точката O, а m≠0 е позитивен реален број. Разгледуваме пресликување *I* од П/{O} во П/{O}, каде на произволна точка $A \neq O$ од рамнината и се придружува точката A′ која што лежи на полуправата OA и го задоволува равенството

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = m\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Дефиниција 1. Пресликувањето *I*: П/{O}→П/{O}, дефинирано со (1) се нарекува ***инверзија*** со центар во O и коефициент m.

Од дефиницијата, бидејќи точката A′ е еднозначно определена, пресликувањето е инјекција. Со исклучувањето на точката O од рамнината П (точката O нема слика и ниедна точка од рамнината не се пресликува во неа), ова пресликување е и сурijекција. Значи инверзијата *I* е биективно пресликување.

Ќе наведеме, докажеме и примениме некои својства на инверзијата.

Теорема 1. Инверзијата е инволуторно пресликување.

Доказ. Од I(A)=A′ следува дека A′ лежи на полуправата OA и, притоа, $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = m$. Ако I(A′)=$A_1$, тогаш A_1 ќе лежи на полуправата OA′, која се совпаѓа со полуправата OA, притоа $\overline{OA'} \cdot \overline{OA_1} = m = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$, од каде следува дека A_1=A, т.е. I(A′)=A. Значи I^2=E и како I е биекција имаме I=I^{-1}, т.е. инверзијата е инволуторна.☺

Теорема 2. Точката е неподвижна за инверзија ако и само ако припаѓа на кружницата $k_0(O, \sqrt{m})$.

Доказ. Ако точката е неподвижна за инверзијата т.е. I(A)=A′=A и бидејќи m>0, можеме да земеме $m=r^2$ (r>0) тогаш равенството (1) ќе премине во облик $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$, односно $\overline{OA}^2 = r^2$, или $\overline{OA} = r$, што значи множеството од точки во рамнината неподвижни за инверзијата I е кружница со центар во O и радиус r. Обратното тврдење се остава за вежба на читателите. ☺

Дефиниција 2. Кружницата $k_0(O, \sqrt{m})$ ја нарекуваме кружница на инверзијата (1).

Постоењето на кружницата k_0 е причина инверзијата со позитивен коефициент да ја нарекуваме уште и инверзија во однос на кружница, во рамнината постои уште инверзија во однос на две паралелни прави, во просторот инверзија во однос на сфера и др.

Одовде, а особено во делот со задачите заради поедноставено запишување, за инверзија со центар во O и коефициент m (= r^2) ќе пишуваме I(O, r).

Теорема 3. Секоја внатрешна точка на кружницата на инверзијата се пресликува во надворешна точка и обратно.

Доказ. Ако A е внатрешна точка за кружницата $k_0(O, \sqrt{m})$, тогаш $\overline{OA} < \sqrt{m}$, па ако I(A)=A′, тогаш од $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = m$ следува дека $\overline{OA'} > \sqrt{m}$, што значи дека A′ е надворешна точка за k_0. Обратното тврдење се докажува аналогно.☺

Основна конструкција. Сликата A′ на произволна точка A при инверзијата *I*, ако е позната кружницата k_0, може да се најде на следниот начин. Ако A лежи на кружницата k_0, тогаш A′=A.

(Црт. 2) (Црт. 3)

Нека сега A е надворешна точка за $к_0$ (црт. 2). Тогаш низ точката A повлекуваме тангента t кон $к_0$. Од допирната точка T повлекуваме нормала кон полуправата OA. Пресечната точка на OA со таа нормала е бараната слика A' на точката A при инверзијата I. И навистина триаголниците ΔOTA и $\Delta OA'T$ се правоаголни со заедничи агол кај темето O, па тие се слични, од каде што следува $OA':OT= OT:OA$, т.е. $OA\approx OA'=OT^2=m=r^2$. Ако A е внатрешна точка за $к_0$, ќе ја искористиме истата конструкција во обратен ред (тогаш A и A' си ги заменуваат местата).
**Да забележиме дека доколку точката A е поблизу до центарот на инвервијата (и е внатрешна за $к_0$), тоа нејзината слика A' е дотолку подалеку од центарот на инверзијата (и е надворешна за $к_0$) и обратно.

Теорема 4. Нека I е дадена инверзија со центар во O и коефициент m , A и B се произволни точки, додека A' и B' се нивни слики при инверзијата. Тогаш $\angle OBA=\angle B'A'O$ и $\angle OAB=\angle A'B'O$.

Доказ. Ако точките A, B и O се колинеарни, тогаш тврдењето е јасно. Затоа, да претпоставиме дека точките A, B и O не се колинеарни и нека се распоредени како на црт. 3. Од $I(A)=A'$ и $I(B)=B'$, имаме $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m$ и $\overline{OB}\cdot\overline{OB'}=m$, од каде што $OA\approx OA'=OB\approx OB'$, односно $OA:OB=OB':OA'$, ова значи дека ΔOAB и
$\Delta OB'A'$ се слични. Од овде следува дека $\angle OBA=\angle B'A'O$ и $\angle OAB=\angle A'B'O$.☺

Конструкција: Се сведува на основната за точките A и B.
Да забележиме дека директно од Т.4 следува $\Delta OAB\sim\Delta OB'A'$, од каде лесно се изведува дека: $\overline{A'B'}=\dfrac{\overline{AB}\cdot r^2}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}$, каде $r^2= m$. *(2)***

Теорема 5. Секоја права што минува низ центарот на инверзијата се пресликува во самата себе, а секоја права која не минува низ центарот на инверзијата се пресликува во кружница која што минува низ центарот на инверзијата.

Доказ. Нека I е дадена инверзија со кружница на инверзија $к_0(O, r)$, а p е произволна права од рамнината чија слика ја бараме.

Ако p минува низ центарот на инверзијата, согласно со дефиницијата за инверзија, сликата A' на произволна точка $A(\neq O)$ од p лежи исто така на p, и обратно, произволна точка $B'(\neq O)$ од p е слика на точката B од p. Значи $I(p)=p'=p$. При тоа само точките во кои таа права ја сече кружницата $к_0$ се неподвижни (Т.2**.**), останатите точки $(\neq O)$ се пресликуваат според (Т.3.)

Нека правата p не минува низ центарот на инверзијата и да го земеме најопштиот случај кога p не ја сече кружницата $к_0$ (црт.4). Најнапред да ја најдеме сликата M' на точката M која е пресек на правата p со нормалата на p низ O. Потоа на правата p избираме произволна точка $P(\neq M)$ и ја наоѓаме нејзината слика P'. Според (Т.4) $\angle OP'M'=\angle OMP$, но $\angle OMP=90^0$, значи и $\angle OP'M'=90^0$, т.е. P'

лежи на кружница $p^{/}$ чиј дијаметар е $OM^{/}$. И бидејки P е произволна точка од p следува дека сликата на секоја точка од p лежи на кружницата со дијаметар $OM^{/}$.

Црт. 4

Обратно, нека $N^{/}(\neq O)$ е произволна точка од кружницата $p^{/}$. Да ја означиме со N пресечната точка на правата $ON^{/}$ со p. За да констатираме дека $N^{/}$ е слика на N при инверзијата I , доволно е да докажеме дека $ON \approx ON^{/}=r^2$. Бидејки $\Delta\ OM^{/}N^{/} \sim \Delta\ ONM$ (правоаголни триаголници со заеднички агол во темето O), следува $ON^{/}:OM=OM^{/}:ON$, од каде имаме $ON\approx ON^{/}=OM\approx OM^{/}$, но $OM \approx OM^{/}=r^2$, тогаш и $ON\approx ON^{/}= r^2$. Значи $p^{/} =I(p)$. ☺

Конструкција: За да ја најдеме сликата $p^{/}$ на правата p што не минува низ центарот O на инверзијата, доволно е да ја најдеме сликата $M^{/}$ на точката M, тогаш сликата на правата p е кружницата со дијаметар $OM^{/}$.

Кружницата $p^{/}$ поедноставно се наоѓа во случаите кога p ја допира $к_0$ (Црт. 5), тогаш $M=M^{/}$ и кога p ја сече $к_0$ (Црт. 6). За да ја најдеме кружницата $p^{/}$ во случајот кога правата p ја сече $к_0$, ја бараме ортогоналната проекција на точката O врз правата p, и нека тоа биде точката P. Во еден од пресеците на кружницата на инверзијата $к_0$ со правата p повлекуваме тангента t. Пресекот на правата OP со t е сликата $P^{/}$ на точката P при инверзијата I. Бараната кружница (слика на правата p) е кружницата што минува низ пресечните точки на $к_0$ со p и низ точките O и $P^{/}$, таа има дијаметар $OP^{/}$.

Црт. 5 Црт. 6

**Да забележиме дека тангентата t на кружницата $p^{/}$ во точката O е нормална на OM, а бидејќи и правата p е нормална на OM, следува дека тангентата (t) кон кружницата-слика е паралелна со правата-оригинал (p).