

XXV олимпијада

1. Нека x, y и z се ненегативни реални броеви за кои е исполнето равенството $x + y + z = 1$. Докажи ги неравенствата

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во облик

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \geq 0.$$

Неравенството е исполнето бидејќи броевите x, y, z се позитивни и $x + y + z = 1$.

Ако броевите $\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y$ и $\frac{1}{2} - z$ се ненегативни тогаш од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$\left[\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right)\right]^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2} - x\right) + \left(\frac{1}{2} - y\right) + \left(\frac{1}{2} - z\right)\right].$$

Значи,

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leq \left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - (x + y + z)\right)\right]^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3, \quad (1)$$

односно

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4}(x + y + z) + \frac{1}{2}(xy + yz + zx) - xyz \leq \frac{1}{216}$$

и конечно

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Ако еден од броевите $\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y$ и $\frac{1}{2} - z$ е негативен, тогаш неравенството (1) е исполнето. Два од трите броеви не може да се негативни, бидејќи збирот на два од броевите x, y, z не може да е поголем од 1.

2. Најди природни броеви a и b за кои:

(1) производот $ab(a + b)$ не е делив со 7,

(2) бројот $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ е делив со 7^7 .

Решение. Изразот $A = (a + b)^7 - a^7 - b^7$, го трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned} A &= 7ab[(a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2(a + b)] \\ &= 7ab(a + b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) \\ &= 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2. \end{aligned}$$

Бидејќи $ab(a + b)$ не е делив со 7 тогаш $7 | (a^2 + ab + b^2)$, односно

$$a^2 + ab + b^2 = 7^3 \cdot k.$$

За $k=1$ и $b=1$ добиваме $a^2+a+1=343$, т.е. $(a-18)(a+19)=0$, од каде што добиваме $a=18$. Парот $a=18$ и $b=1$ ги задоволува условите од задачата.

3. Во рамнината се дадени две различни точки O и A . За секоја точка X во рамнината, различна од O , со $\alpha(X)$ ја означуваме големината на аголот $\angle AOX$ изразена во радијани ($0 \leq \alpha(X) < 2\pi$ и аголот се мери од кракот AO во насока обратна од стрелките на часовникот) и со $C(X)$ ја означуваме кружницата со центар во O и радиус $\overline{OX} + \frac{\alpha(X)}{OX}$. Точките од рамнината се обоени со конечно многу бои. Докажи дека во рамнината постои точка Y за која $\alpha(Y) > 0$ и таква што на кружницата $C(Y)$ се наоѓа точка обоена со истата боја како и Y .

Решение. Разгледуваме произволни кружници $R=(O,r)$ и $S=(O,s)$, при што $0 < r < s < 1$. На кружницата R земаме точка X за која $\alpha(X)=r(s-r)$, $C(X)=S$, $0 < \alpha(X) < 1$. Ако претпоставиме дека бојата на точката X не се појавува на кружницата S , тогаш множеството бои кои се појавуваат на кружницата R ќе биде различно од множеството бои кои се појавуваат на кружницата S .

Значи, ако тврдењето не е точно, тогаш било кои две кружници со радиус помал од 1 имаат различни множества бои со кои се обоени. Но, такви кружници има бесконечно многу, а конечно множество може да има само конечен број на подмножества. Последното противречи на претпоставката, па затоа тврдењето на задачата е точно за било кои две кружници.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник, за кој правата CD е тангентата на кружница со дијаметар AB . Докажи дека правата AB е тангентата на кружница со дијаметар CD ако и само ако правите BC и AD се паралелни.

Решение. Нека правите AB и CD се сечат во точката O . На правата CD определуваме точки A' и B' , така што $\overline{OA}=\overline{OA'}$ и $\overline{OB}=\overline{OB'}$.

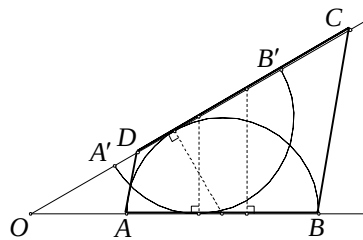
Заради симетрија, правата AB ја допира кружницата со дијаметар $A'B'$. Затоа е исполнето: правата AB е тангентата на кружницата со дијаметар CD

$\Leftrightarrow$ постои хомотетија таква што

$$\overline{OD}=k \cdot \overline{OA'} \text{ и } \overline{OC}=k \cdot \overline{OB'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{OD}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow AD \parallel BC.$$

Во случај кога правите AB и CD се пара-



Црп. 25.1.

лелни, четириаголникот е паралелограм.

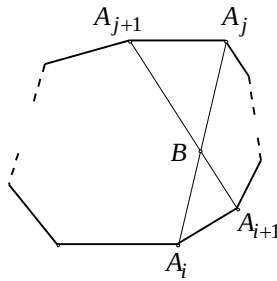
5. Со d да го означиме збирот на должините на дијагоналите на конвексен n -аголник, ($n > 3$), а со p неговиот периметар. Докажи дека

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n+1}{2} \right] - 2.$$

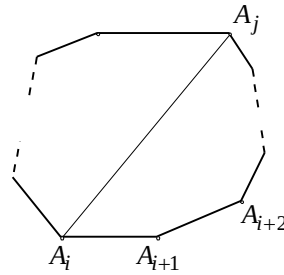
Решение. Темињата на n -аголникот ги означуваме со $A_1, A_2, \dots, A_n$. Нека B е пресек на $A_i A_j$ и $A_{i+1} A_{j+1}$. Од неравенството на триаголник следува (види црт. 25.2.)

$$\overline{A_i B} + \overline{B A_{i+1}} > \overline{A_i A_{i+1}}, \quad \overline{A_j B} + \overline{B A_{j+1}} > \overline{A_j A_{j+1}},$$

од каде што



Црт. 25.2.



Црт. 25.3.

$$\overline{A_i A_j} + \overline{A_{i+1} A_{j+1}} > \overline{A_i A_{i+1}} + \overline{A_j A_{j+1}}.$$

Последното неравенство важи за сите парови соседни темиња и ако ги собереме овие неравенства, добиваме $2d > (n-3)p$ односно $n-3 < \frac{2d}{p}$.

За секоја дијагонала го применуваме неравенството

$$\overline{A_i A_j} < \sum_{k=i}^{j-1} \overline{A_k A_{k+1}} \quad (2)$$

(види црт. 25.3.)

На десната страна од неравенството (2) секогаш ја земаме онаа половина на ликот која има помалку страни, а потоа сите ги собираме.

Ако $n = 2k + 1$ добиваме

$$d < (1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + (k-1))p = \left(\frac{k(k+1)}{2} - 1 \right) p,$$

односно

$$\frac{2d}{p} < k(k+1) - 2 = \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n+1}{2} \right] - 2.$$

Ако $n = 2k$, тогаш

$$d < (1 + 2 + 3 + \dots + (k-2) + (k-2) + \frac{k}{2})p = \left(\frac{k(k-1)}{2} - 1 + \frac{k}{2} \right)p = \left(\frac{k^2}{2} - 1 \right)p$$

т.е.

$$\frac{2d}{p} < k^2 - 2 = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

6. Нека a, b, c и d се непарни природни броеви за кои:

(1) $0 < a < b < c < d$,

(2) $ad = bc$ и

(3) $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ за некои природни броеви k и n .

Докажи дека $a = 1$.

Решение. Ќе докажеме дека $k > m$. Од $d(b - a) = b(d - c)$ и $b < d$ добиваме

$$d - c > b - a, \quad a + d > b + c \quad \text{т.е.} \quad 2^k > 2^m \quad \text{од што следува} \quad k > m.$$

Од условите (2) и (3) следува

$$a(2^k - a) = b(2^m - b) \quad \text{т.е.} \quad (b - a)(b + a) = 2^m(b - 2^{k-m}a).$$

Ако $b - a$ и $b + a$ се деливи со 4, тогаш $2b$ е делив со 4, што не е можно бидејќи b е непарен број. Значи, $2^{m-1} \mid (b - a)$ или $2^{m-1} \mid (b + a)$.

Во првиот случај имаме:

$$2^{m-1} \mid (b - a) \Rightarrow b - a \geq 2^{m-1} \Rightarrow$$

$$c - a \geq 2^{m-1} \Rightarrow b + c - 2^m > 2a \Rightarrow 0 > a$$

што противречи на условот на задачата.

Во вториот случај имаме:

$$2^{m-1} \mid (b + a) \quad \text{и} \quad b + a < b + c = 2^m \Rightarrow b + a = 2^{m-1}.$$

Бидејќи a и b се непарни природни броеви, добиваме дека $\text{NZD}(a, b) = 1$.

Од равенките $a + b = 2^{m-1}$ и $b + c = 2^m$ добиваме $c - a = 2^{m-1}$ односно $\text{NZD}(a, c) = 1$. Од $ad = bc$, добиваме $a = 1$.