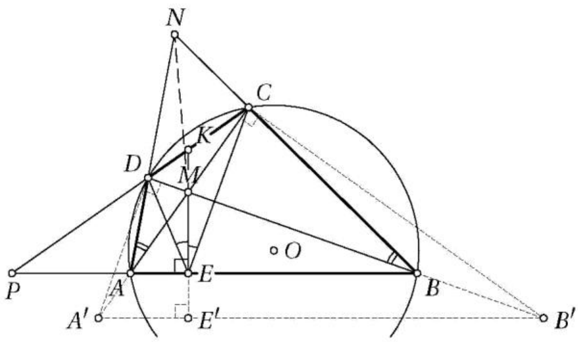
БМО 2018

1. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k, при што $\overline{AB} > \overline{CD}$ и правата AB не е паралелна со CD. Точката M е пресек на дијагоналите AC и BD, а подножјето на нормалата од M на AB е точката E, при што E лежи на отсечката AB. Ако EM е симетрала на $\measuredangle CED$, докажи дека AB е дијаметар на кружницата k.

   Решение. Нека претпоставиме дека AB не е дијаметар на кружницата и да избереме точка A' на полуправата CA и точка B' на полуправата DB такви што $\measuredangle A'DB = \measuredangle B'CA = 90^\circ$.



   Четириаголникот $A'B'CD$ е тетивен, па затоа $\measuredangle B'A'C = \measuredangle B'DC = \measuredangle BAC$, а оттука следува $A'B' \| AB$ и $ME \perp A'B'$. Нека правата ME ја сече $A'B'$ во точката E'. Од тетивните четириаголници $A'E'MD$ и $B'E'MC$ следува $\measuredangle DE'E = \measuredangle DA'M = \measuredangle CB'M = \measuredangle CE'E$, па како $\measuredangle DEE' = \measuredangle CEE'$, заклучуваме дека триаголниците CEE' и DEE' се складни. Затоа $\overline{CE} = \overline{DE}$. Конечно, симетралата EM на $\measuredangle CED$ е нормална на CD, па затоа $AB \| CD$, што противречи на условот на задачата.

2. Нека q е позитивен рационален број. Две мравки на почетокот се наоѓаат во иста точка X во рамнината. Во $n-$тата минута $(n=1,2,...)$ секоја од нив избира дали ќе се движи на север, исток, југ или запад, и притоа минува растојание од q^n метри. По цел број минути тие повторно се наоѓаат во иста точка во рамнината (не задолжително во точката X), а дотогаш изминатите патеки не им се потполно идентични. Определи ги сите можни вредности на бројот q.

   Решение. Со a_n да го означиме збирот на x и y координатата на првата мравка, а со b_n збирот на координатите на втората мравка по n минути. Од условот на задачата следува $|a_n - a_{n-1}| = |b_n - b_{n-1}| = q^n$, па затоа $a_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i q^i$ и

$b_n=\sum_{i=1}^{n}\eta_i q^i$ за некои коефициенти $\varepsilon_i,\eta_i\in\{-1,1\}$. Ако мравките се сретнале по n минути, тогаш

$$0=\frac{a_n-b_n}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i-\eta_i}{2}q^i=P(q)$$

при што коефициентите $\frac{\varepsilon_i-\eta_i}{2}$ на поиномот $P(q)$ се целобројни и припаѓаат на множеството $\{-1,0,1\}$. Според тоа, ако $q=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{N}$, тогаш $a\,|\,1, b\,|\,1$ и затоа $q=1$. Вредноста $q=1$ очигледно е можна, на пример, ако првата мравка оди на исток па на запад, а втората на север па на југ.

3. Ана и Бојан ја играат следнава игра. Пред нив се наоѓаат две непразни купчиња монети. Наизменично, почнувајќи од Ана, секој избира купче во кое има парен број монети и половина од монетите ги преместува од тоа купче во другото купче. Играта завршува ако играчот кој е на потез не може да одигра потез, во кој случај победува другиот играч. Определи ги сите парови (a,b) природни броеви такви што ако купчињата на почетокот имаат a и b монети, тогаш Бојан има победничка стратегија.

Решение. Со $v_2(n)$ да го означиме најголемиот ненегативен цел број r таков што $2^r\,|\,n$. За позицијата (a,b), т.е. две купчиња со a и b монети, ќе велиме дека е $k-$среќна ако $v_2(a)=v_2(b)=k$ за некој цел број $k\geq 0$, и $k-$несреќна ако $\min\{v_2(a),v_2(b)\}=k<\max\{v_2(a),v_2(b)\}$. Ќе докажеме дека Бојан има победничка стратегија ако и само ако почетната позиција е $k-$среќна за некој парен број k.

- Во случај на 0-среќна позиција играчот кој е на потез одма губи.
- Ако е дадена $k-$среќна позиција (a,b) со $k\geq 1$, играчот кој е на потез ја менува во една од позициите $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$ и $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, при што и двете се $(k-1)$-среќни бидејќи $v_2(a+\frac{1}{2}b)=v_2(\frac{1}{2}b)=v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$.

Според тоа, ако почетната позиција е $k-$среќна, по k потези се доаѓа до конечна 0-среќна позиција, при што Бојан ќе победи ако и само ако k е парен број.

- Ако е дадена $k-$несреќна позиција (a,b) со непарен k и $v_2(a)=k<v_2(b)=l$, Ана може да ја промени во позиција $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$. Бидејќи $v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$, новата позиција е $(k-1)-$среќна и $2\,|\,k-1$, па така Ана ќе победи.

- Ако е дадена $k-$несреќна позиција (a,b) со парен k и $v_2(a)=k<v_2(b)$ $=l$, Ана не смее да одигра во позиција $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, бидејќи таа е $(k-1)-$ среќна и Бојан ќе победи. На Ана и останува потез за позицијата $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$. Добиената позиција е исто така $k-$несреќна, бидејќи за $l>k+1$ имаме $v_2(a+\frac{1}{2}b)=k<v_2(\frac{1}{2}b)=l-1$, а додека за $l=k+1$ имаме $v_2(a+\frac{1}{2}b)>v_2(\frac{1}{2}b)=k$.

Според тоа, ако почетната позиција е $k-$ несреќна, тогаш Ана победува ако е k непарен, а нема победник ако е k парен број.

4. Определи ги сите прости броеви p такви што $3p^{q-1}+1$ е делител на 11^p+17^p .

Решение. За $p=2$ непосредно се проверува дека задачата нема решение. Понатаму, нека $p>2$.

Бидејќи $N=11^p+17^p\equiv 4(\bmod 8)$, следува дека $8\nmid 3p^{q-1}+1>4$. Да разгледаме некој непарен прост делител r на бројот $3p^{q-1}+1$. Јасно, $r\notin\{3,11,17\}$. Ако $n\in\mathbb{Z}$ е таков што $17n\equiv -1(\bmod r)$, тогаш $r\mid n^pN\equiv m^p-1(\bmod r)$, каде $m=11n$. Значи, редот на бројот m по модул r е делител на p, т.е. $\operatorname{ord}_r(m)\in\{1,p\}$. Притоа, ако $\operatorname{ord}_r(m)=1$, имаме $r\mid m-1\equiv(11+17)n(\bmod r)$, што како единствена можност дава $r=7$. Од друга страна, ако $\operatorname{ord}_r(m)=p$, тогаш $p\mid r-1$. Според тоа, канонична факторизација на бројот $3p^{q-1}+1$ има облик

$$3p^{q-1}+1=2^a7^b p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_k^{c_k}, \qquad (*)$$

каде $p_i\notin\{2,7\}$ се прости броеви такви што $p_i\equiv 1(\bmod p)$.

Видовме дека $a\le 2$. Според тоа, ако $p=7$, тогаш $b=0$, а во спротивно

$$\frac{11^p+17^p}{28}=11^{p-1}-11^{p-2}17+11^{p-3}17^2-...+17^{p-1}\equiv 4^{p-1}p(\bmod 7),$$

па 11^p+17^p не е делив со 7^2. Во двата случаја е $b\le 1$.

За $q=2$ од (*) добиваме $3p+1=2^a7^b p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_k^{c_k}$, па како важи $p_i\ge 2p+1$ ова е можно само ако $c_i=0$ за секој i, т.е. $3p+1=2^a7^b\in\{2,4,14,28\}$. Од овде не добиваме ниту едно решение.

Останува случајот $q>2$, а тогаш имаме $4\mid 3p^{q-1}+1$, т.е. $a=2$. Сега во (*) десната страна е конгруентна со 4 или 28 по модул p, од каде што следува

$p=3$. Во овој случај $3^q+1 | 6244$, што важи само за $q=3$. Навистина, парот $(p,q)=(3,3)$ е решение на задачата.