Ристо Атанасов, Скопје

НЕРАВЕНСТВО НА ЈЕНСЕН

Докажувањето на неравенства претставува еден од поинтересните, но и потешките, проблеми во математиката. Често пати за нивно докажување се користат, веќе познати, неравенства. Во оваа статија ќе се задржиме на неравенството на Јенсен.

1. Конвексни и конкавни функции

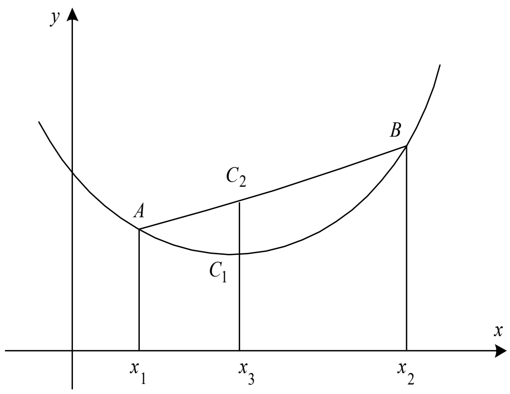
Функцијата $f:(a,b)\to R\ (a,b\in R)$ ја нарекуваме *конвексна* ако за произволни $x_1,x_2\in(a,b)$ важи

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2) \qquad (1)$$

каде што $\lambda_1+\lambda_2=1,\ \lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0.$

Ако за $x_1\ne x_2$ и $\lambda_1\lambda_2\ne 0$ наместо $\le$ важи знакот $<$, за функцијата f велиме дека е *строго конвексна*.

Геометриското значење на поимот конвексна функција може да се види од следните размислувања.



Да го разгледаме графикот на функцијата $y=f(x)$. Нека $x_1,x_2\in(a,b)$ се произволни точки $(x_1<x_2)$ и нека $x_3\in(a,b)$ така што $x_1<x_3<x_2$.

Понатаму, означуваме

$$\lambda_1=\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1},\ \lambda_2=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$$

$$y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$$

Броевите λ_1 и λ_2 се ненегативни и нивниот збир е 1. Бидејќи функцијата f е конвексна, од неравенството (1) добиваме

$$f(x_3)=f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)\le \lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2 \qquad (2)$$

Нека $C_1(x_3,f(x_3))$ и $C_2(x_3,\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)$. Точката C_1 е точка од графикот, а точката C_2 е точка од отсечката AB. Од неравенството (2) се гледа дека точката C_1 не е над точката C_2. Ако f е строго конвексна функција, тогаш точката C_2 е над точката C_1.

Значи, ако земеме било кои две точки A и B од графикот на конвексната функција f, тогаш графикот на f не е над отсечката AB.

Аналогно дефинираме конкавна функција.

Функцијата $f:(a,b)\to R$ ја нарекуваме *конкавна* ако за произволни $x_1,x_2\in(a,b)$ важи

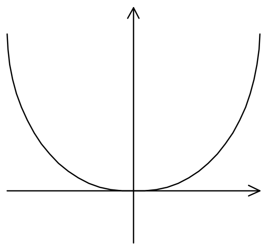
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad (3)$$

каде што $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$.

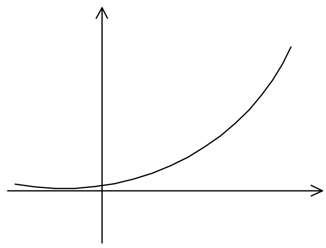
Ако за $x_1 \neq x_2$ и $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ наместо $\geq$ важи знакот $>$, за функцијата f велиме дека е *строго конкавна*.

Слично како кај конвексните функции, ако земеме било кои две точки A и B од графикот на конкавната функција f, тогаш графикот на f не е под отсечката AB.

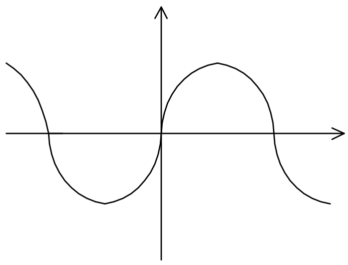
Функцијата f е конкавна ако и само ако функцијата $-f$ е конвексна.



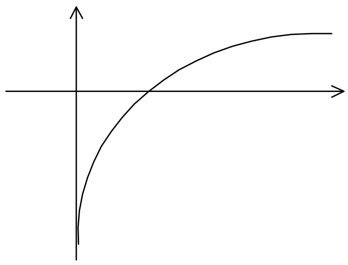
$f(x) = x^2$



$f(x) = e^x$



$f(x) = \sin x$



$f(x) = \ln x$

Примери

1. Функцијата $f : R \to R$ определена со $f(x) = x^2$ е строго конвексна на R. Навистина $x_1, x_2 \in R$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогаш

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lambda_1^2 x_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2^2 x_2^2 \\
&= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_1 x_1^2 - \lambda_2 x_2^2 + \lambda_1^2 x_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2^2 x_2^2 \\
&= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_1 x_1^2 (1 - \lambda_1) + 2\lambda_1 \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_2 x_2^2 (1 - \lambda_2) \\
&= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 x_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_1 \lambda_2 x_2^2 \\
&= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 (x_1 - x_2)^2 \\
&< \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)
\end{aligned}$$

Ваквиот начин на проверка на конвексноста (конкавноста) на дадена функција е комплициран. Ако знаеме како изгледа графикот на дадена функција, тогаш можеме да одговориме на прашањето дали функцијата е конвексна (конкавна).

Во следните три примери, врз основа на графикот, даден е одговор на ова прашање.

2. Функцијата $f(x)=e^x$ е конвексна на R.

3. Функцијата $f(x)=\sin x$ е конвексна на интервалите од облик

$$((2k+1)\pi, 2k\pi),\ k\in Z,$$

а конкавна на интервалите од облик

$$(2k\pi, (2k+1)\pi),\ k\in Z.$$

4. Функцијата $f:(0,\infty)\to R$ определена со $f(x)=\ln x$ е конкавна на интервалот $(0,\infty)$.

2. *Неравенство на Јенсен*

Неравенство на Јенсен. Нека $f:(a,b)\to R$ е конвексна функција. Тогаш за секој природен број n важи неравенството

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n)\le \lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+...+\lambda_nf(x_n)$$

каде што $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\ge 0$ и $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

Аналогно, ако $f:(a,b)\to R$ е конкавна функција, тогаш за секој природен број n важи неравенството

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n)\ge \lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+...+\lambda_nf(x_n)$$

каде што $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\ge 0$ и $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

Доказ. Неравенството ќе го докажеме со принципот на математичка индукција.

За $n=1$ имаме $f(x_1)\le f(x_1)$, што е точно.

Да претпоставиме дека неравенството е точно за $n=k$, односно, нека важи

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_kx_k)\le \lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+...+\lambda_kf(x_k) \qquad (4)$$

каде што $x_1,x_2,...,x_k\in(a,b)$, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k\ge 0$ и $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$.

Ќе покажеме дека неравенството важи за $n=k+1$.

Нека $x_1,x_2,\dots x_k,x_{k+1}\in(a,b)$, $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_k,\lambda_{k+1}\ge 0$ и $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$.

Ако $\lambda_{k+1}=0$, тогаш го добиваме неравенството (4), за кое што претпоставивме дека е точно.

Нека $\lambda_{k+1}\ne 0$. Тогаш $\lambda_k+\lambda_{k+1}>0$. Понатаму, нека

$$x=\frac{\lambda_kx_k+\lambda_{k+1}x_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}.$$

Јасно, $x \in (a,b)$. Од индуктивната претпоставка добиваме

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1}x_{k+1}) =$$
$$= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{k-1}x_{k-1} + (\lambda_k + \lambda_{k+1})x)$$
$$\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_{k-1} f(x_{k-1}) + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) f(x)$$
$$\leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_{k-1} f(x_{k-1}) + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) f\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_{k+1}\right).$$

Бидејќи функцијата f е конвексна, од последното неравенство и од неравенството (1) добиваме

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1}x_{k+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

Сега тврдењето следува од принципот на математичката индукција.

3. Примена

Пример 1. Неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина. Нека $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ и нека $x_i = \ln a_i$, $i = 1,2,...,n$. Функцијата $f(x) = e^x$ е конвексна функција на множеството реални броеви. Користејќи го неравенството на Јенсен, добиваме:

$$f\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + ... + \frac{x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f(x_1) + \frac{1}{n} f(x_2) + ... + \frac{1}{n} f(x_n)$$
$$e^{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)} \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1} + e^{x_2} + ... + e^{x_n}\right)$$
$$e^{\ln(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

односно

$$(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n).$$

Пример 2. Нека $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Да се докаже дека

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} ... a_n^{\lambda_n}.$$

Функцијата $f(x) = \ln x$ е конкавна на интервалот $(0, \infty)$. Значи

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n) \geq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + ... + \lambda_n f(a_n)$$

односно,

$$\ln(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n) \geq \lambda_1 \ln a_1 + \lambda_2 \ln a_2 + ... + \lambda_n \ln a_n$$
$$\ln(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n) \geq \ln a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} ... a_n^{\lambda_n}$$

а оттука, со антилогаритмирање, се добива

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} ... a_n^{\lambda_n}.$$

Последното неравенство е познато под името ***тежишно неравенство***.

Пример 3. Ако α, β и γ се агли во триаголник, докажи дека

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Функцијата $f(x)=\sin x$ е конкавна на интервалот $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Бидејќи $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, користејќи го неравенството на Јенсен за конкавна функција, добиваме

$$\sin\left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\frac{\beta}{2}}{3}+\frac{\frac{\gamma}{2}}{3}\right)\geq\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right).$$

Ако го логаритмираме последново неравенство, добиваме

$$\ln\sin\left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\frac{\beta}{2}}{3}+\frac{\frac{\gamma}{2}}{3}\right)\geq\ln\left(\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\right).$$

Бидејќи функцијата $g(x)=\ln x$ е конкавна на интервалот $(0,\infty)$, со повторна примена на неравенството на Јенсен, добиваме

$$\ln\sin\left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\frac{\beta}{2}}{3}+\frac{\frac{\gamma}{2}}{3}\right)\geq\ln\left(\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\ln\sin\frac{\alpha}{2}+\ln\sin\frac{\beta}{2}+\ln\sin\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1}{3}\ln\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

односно

$$\ln\sin\frac{\pi}{6}\geq\ln\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Со антилогаритмирање на последното неравенство добиваме

$$\sin\frac{\pi}{6}\geq\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

односно

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8}.$$

Задачи за самостојна работа:

1. Ако α,β и γ се агли во триаголник, докажи дека

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{3}{2}.$$

2. Нека a,b,λ и μ се позитивни реални броеви, така што $\lambda+\mu=1$. Докажи го неравенството $ab\leq a^{\frac{1}{\lambda}}+b^{\frac{1}{\mu}}$.

3. Ако a,b и c се позитивни реални броеви, докажи го неравенството

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\geq a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{c}{a+b+c}}.$$

Литература

[1] Н. Ивановски, *Математичка анализа I*, Универ. "Св. Кирил и Методиј" Скопје, 1981

[2] Д. Димовски, К. Тренчевски, Р. Малчески и Б. Јосифовски, *Практикум по елементарна математика*, "Просветно дело" Скопје, 1993