



Проблеми и решенија

Задача 1. Во $\triangle ABC$, $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$, отсечката AD , ($D \in BC$) е симетрала на внатрешниот агол $\angle A = 60^\circ$. Нека r_B, r_C и r се радиусите на впишаните кружници во триаголниците ABD , ADC и ABC , соодветно. Докажи дека

$$\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = 2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Решение. За должината на симетралата AD важи $\overline{AD} = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\angle A}{2} = \frac{bc\sqrt{3}}{b+c}$ **(1 п)**. Нека $h = \overline{AM}$ е должината на висината повлечена од темето A во $\triangle ABC$. Од теоремата за симетралата на агол во триаголникот следува $\overline{BD} = \frac{ac}{b+c}$ и $\overline{CD} = \frac{ab}{b+c}$ **(1 п)**. Нека $s = \frac{a+b+c}{2}$ и $s_{ABD} = \frac{\overline{BD} + \overline{DA} + \overline{AB}}{2}$ е полупериметарот на $\triangle ABD$. Имаме

$$r_B = \frac{P_{\triangle ABD}}{s_{ABD}} = \frac{h \cdot \overline{BD}}{2s_{ABD}} = \frac{h \cdot \overline{BD}}{\overline{BD} + \overline{AD} + \overline{AB}} = \frac{\frac{hac}{b+c}}{\frac{ac}{b+c} + \frac{bc\sqrt{3}}{b+c} + c} = \frac{ah}{2s + b\sqrt{3}}.$$

Аналогно се добива $r_C = \frac{ah}{2s + c\sqrt{3}}$ **(3 п)**. Сега, ако се искористи дека $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle A$ добиваме

$$\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{2s + b\sqrt{3}}{ah} + \frac{2s + c\sqrt{3}}{ah} = \frac{4s}{2P_{\triangle ABC}} + \frac{(b+c)\sqrt{3}}{2P_{\triangle ABC}} = \frac{2}{r} + \frac{(b+c)\sqrt{3}}{bc \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{r} + \frac{2(b+c)}{bc} = 2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \text{ **(2 п)}**$$

што и требаше да се докаже.



Медитеранска математичка олимпијада 24.04.2019

Mediterranean mathematical olympiad 24.04.2019

Задача 2. Нека $m_1 < m_2 < \dots < m_s$ е низа од $s \geq 2$ природни броеви такви што ниту еден од нив не може да се запише како збир на два или повеќе различни членови на низата. Докажи дека

$$rm_r + m_s \geq (r+1)(s-1)$$

за секој $r \in \{1, 2, \dots, s-1\}$.

Решение. За k, l такви што $0 \leq k \leq r$ и $k+1 \leq l \leq s$ ги разгледуваме збирите

$$T(k, l) = m_l + \sum_{i=1}^k m_i.$$

Ќе докажеме дека овие $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ зборови се по парови различни. Нека претпоставиме дека $T(k, l) = T(u, v)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $k \leq u$, па затоа последното равенство е еквивалентно со равенството

$$m_l = m_v + \sum_{i=k+1}^u m_i.$$

Но, според условот на задачата m_l не може да се запише како збир на два или повеќе различни членови на низата, па затоа од последното равенство следува $l = v$ и $k = u$, што значи дека збирите $T(k, l)$, $0 \leq k \leq r$ и $k+1 \leq l \leq s$ се по парови различни **(4 п)**. Бидејќи имаме $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ различни зборови, т.е. $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ различни природни броеви најголемиот од нив $T(r, s)$ мора да биде поголем или еднаков на $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$, **(1 п)**. Според тоа, ако земеме предвид дека од $m_1 < m_2 < \dots < m_s$ следува $m_r - m_i \geq r - i$, т.е. $m_r - r + i \geq m_i$ за секој $r \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ и за секој $i \leq r$ **(1 п)**, добиваме

$$\frac{1}{2}(r+1)(2s-r) \leq T(s, r) = m_s + \sum_{i=1}^r m_i \leq m_s + \sum_{i=1}^r (m_r - r + i)$$

т.е.

$$\frac{1}{2}(r+1)(2s-r) \leq m_s + rm_r - r^2 + \frac{r(r+1)}{2}$$
$$rs + s - r \leq m_s + rm_r$$

(1 п), што и требаше да се докаже.



Медитеранска математичка олимпијада 24.04.2019

Mediterranean mathematical olympiad 24.04.2019

Задача 3. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви x, y, z такви што збирот на цифрите на декадниот запис на бројот $4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz$ е помал или еднаков на 2.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz &= 4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - (z^2 - 4xyz + 4x^2y^2) \\ &= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy - z)^2 && \text{(2 п)} \\ &= (2x^2 + y^2 - 2xy + z)(2x^2 + y^2 + 2xy - z). \end{aligned}$$

За множителите $A = 2x^2 + y^2 - 2xy + z$ и $B = 2x^2 + y^2 + 2xy - z$ важи $A + B = 4x^2 + 2y^2$ **(1 п)**.

Според тоа, ако за x , y и z можеме да избереме вредности такви што ќе важи $A = 4x^2 = 4 \cdot 5^{2n+2}$ и $B = 2y^2 = 2 \cdot 2^{2n}$, тогаш ќе имаме $AB = 2 \cdot 10^{2n+2}$, па збирот на цифрите на производот ќе биде еднаков на 2 **(2 п)**. Последното може да се направи бидејќи од $4x^2 = A = 2x^2 + y^2 - 2xy + z$ добиваме $z = 2x^2 - y^2 + 2xy$ и за вака најдениот z важи

$$B = 2x^2 + y^2 + 2xy - z = 2x^2 + y^2 + 2xy - (2x^2 - y^2 + 2xy) = 2y^2 \quad \text{(1 п)}.$$

Сега за секој природен број n да земеме

$$x_n = 5^{n+1}, \quad y_n = 2^n \quad \text{и} \quad z_n = 2x_n^2 + 2x_ny_n - y_n^2 = 2 \cdot 5^{2n+2} + 10^{n+1} - 4^n.$$

Тогаш: $2x_n^2 + y_n^2 - 2x_ny_n + z_n = 4x_n^2 = 4 \cdot 5^{2n+2}$ и $2x_n^2 + y_n^2 + 2x_ny_n - z_n = 2y_n^2 = 2 \cdot 4^n$, па затоа за секој природен број n важи $4x_n^4 + y_n^4 - z_n^2 + 4x_ny_nz_n = 2 \cdot 10^{2n+2}$, т.е. за секој природен број n збирот на цифрите на цифрите на $4x_n^4 + y_n^4 - z_n^2 + 4x_ny_nz_n$ е еднаков на 2 **(1 п)**.



Медитеранска математичка олимпијада 24.04.2019

Mediterranean mathematical olympiad 24.04.2019

Задача 4. Нека P е внатрешна точка на рамностран триаголник со висина 1. Ако x, y, z се растојанијата од P до страните на триаголникот, тогаш

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz.$$

Докажи!

Решение. Познато е дека во рамностран триаголник збирот на растојанијата од секоја внатрешна точка P на триаголникот до страните на триаголникот е еднаков на висината на триаголникот. Според тоа, треба да докажеме дека ако x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$, тогаш важи

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz. \quad (1 \text{ п})$$

Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$. Тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$xy + yz + zx = (xy + yz + zx)(x + y + z) \geq 3\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 9xyz, \quad (*)$$

па затоа

$$xy + yz + zx - 3xyz \geq 6xyz. \quad (1,5 \text{ п})$$

Сега од последното неравенство следува

$$\begin{aligned} xy(1-z) + yz(1-x) + zx(1-y) &\geq 6xyz, \\ xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) - 6xyz &\geq 0. \end{aligned} \quad (1,5 \text{ п})$$

Понатаму, ако земеме предвид дека $(x + y + z)^2 = (x + y + z)^3 = 1$, тогаш од последното неравенство следува неравенството

$$(x + y + z)^2 + xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) - 6xyz \geq (x + y + z)^3 \quad (1 \text{ п})$$

кое последователно е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy(1-z) + 2yz(1-x) + 2zx(1-y) + xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) &\geq (x + y + z)^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 3xy(x+y) + 3yz(y+z) + 3zx(z+x) &\geq (x + y + z)^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &\geq x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz. \end{aligned} \quad (1 \text{ п})$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство во (*), т.е. ако и само ако $x = y = z = \frac{1}{3}$ и во овој случај точката P е тежиштето (ортоцентарот, центарот на опишаната и впишаната кружица) на триаголникот. (1 п)