Алекса Малчески
Ристо Малчески
Катерина Аневска
Самоил Малчески
Димитар Треневски

РЕПЕТИТОРИЈ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА – ЧЕТВРТ ДЕЛ

Скопје, 2020

Рецензенти

Слаѓана Брсаковска
Даниел Велинов
Сања Костадинова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

510.6(075.3)(076)
511.17(075.3)(076)
517.51(075.3)(076)

РЕПЕТИТОРИЈ по елементарна математика. Д. 4 / Алекса Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2020. - 179 стр. ; 25 см

Други автори: Ристо Малчески, Катерина Аневска, Самоил Малчески, Димитар Треневски. - Библиографија: стр. 173-179

ISBN 978-608-4904-67-0
1. Малчески, Алекса [автор] 2. Малчески, Ристо [автор] 3. Аневска, Катерина [автор] 4. Малчески, Самоил [автор] 5. Треневски, Димитар [автор]
а) Елементарна математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 112060170

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Книгава *Репетиториј по елементарна математика – четврт дел* е наменета за ученици од средното образование. Идејата на оваа серија од четири збирки задачи е да овозможи повторување на материјалот за кој авторите сметаат дека е неопходен за успешно продолжување на студиите на полето на математиката, физиката, информатиката, електротехничките, машинските и градежните науки. Книгава содржи 394 решени задачи. Како и во првите три дела од оваа серија, така и во оваа книга повеќето од задачите се на ниво на задачите кои се задаваат на општинските и регионалните натпревари по математика, но во книгава се поместени и задачи кои се со значително поголема тежина. Оттука, оваа збирка задачи може да им послужи и на учениците кои се подготвуваат за натпреварите по математика.

Во книгава пет одделни целини се обработени задачи од комбинаториката, равенките, нзите реални броеви, полиномите и реалните функции. Притоа, задачите се распределени по области. Така, на пример, задачите од низи се распределени во три дела, и тоа: Аритметичка профжгресија, Геометриска прогресија и Монотони, ограничени и конвергентни низи.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска, д-р Даниел Велинов и д-р Сања Костадинова, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје   Авторите
јануари, 2020 г.

I КОМБИНАТОРИКА

1. БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ. БИНОМНА ФОРМУЛА

1. Докажи ги равенствата

а) $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ б) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

Решение. а) Од дефиницијата на биномен коефициент $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, имаме

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k})$$

$$=\frac{(n-1)!n}{(n-k-1)!(k-1)!(n-k)k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}.$$

б) Имаме

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}\ .$$

2. Докажи дека

$$\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}\ .$$

Решение. Според претходната задача добиваме

$$\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}+\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}\,.$$

3. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n\ .$$

Решение. Во биноимната формула

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

ставаме $a=b=1$ и го добиваме бараното равенство.

4. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0\ .$$

Решение. Во биноимната формула

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

ставаме $a=11$ и $b=1$ и го добиваме бараното равенство.

5. Нека n е непарен природен број. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}\ .$$

Решение. Бараното равенство непосредно се добива ако од равенството во задача 3 го одземеме равенството во задача 4. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

6. Докажи дека

а) Ако n е парен број, тогаш

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...+\binom{n}{n-1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...+\binom{n}{n}.$$

б) Ако n е непарен број, тогаш

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...+\binom{n}{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...+\binom{n}{n-1}.$$

Решение. Бараните равенства следуваат од задача 4. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

7. Нека n е непарен природен број. Пресметај го збирот

$$S=\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+...+\frac{1}{(n-3)!3!}+\frac{1}{(n-1)!1!}.$$

Решение. Според задача 5 имаме

$$n!S=\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}+\frac{n!}{5!(n-5)!}+...+\frac{n!}{(n-3)!3!}+\frac{n!}{(n-1)!1!}=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1},$$

па затоа $S=\frac{2^{n-1}}{n!}$.

8. Пресметај го збирот:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k$, б) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+1)$, в) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$.

Решение. а) Бидејќи

$$\binom{n}{k}k=\frac{n!}{(n-k)!k!}k=n\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=n\binom{n-1}{k-1},(k>0) \text{ и } \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=2^{n-1}$$

добиваме $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=n2^{n-1}$.

б) Имаме:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n2^{n-1}+2^{n}=2^{n-1}(n+2).$$

в) Бидејќи

$$\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{k+1}=\frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!}\frac{1}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\frac{1}{n+1}$$

Добиваме

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-\binom{n+1}{0})=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

9. Пресметај го коефициентот пред $x^n y^n$ ако изразот $(1+x)^n(1+y)^n(x+y)^n$ се развие по биномната формула.

Решение. Бидејќи:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\ (1+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\ \text{ и }\ (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\ ,$$

членовите во развојот на $(1+x)^n(1+y)^n(x+y)^n$ во кои се јавува x^ny^n се од облик

$$\binom{n}{k}x^k\cdot\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\cdot\binom{n}{k}y^{n-k},\ \text{за }k=0,1,2,...,n\,.$$

Заради тоа бараниот коефициент е еднаков на збирот

$$\binom{n}{0}^3+\binom{n}{1}^3+...+\binom{n}{n}^3\,.$$

10. Докажи дека $\sqrt{10}[(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}]$ е природен број.

Решение. Со примена на биномната формула за изразите

$$(1+\sqrt{10})^{100}\ \text{ и }\ (1-\sqrt{10})^{100}$$

и ако ги замениме во дадениот израз, по средување на истиот, тој го добива обликот

$$20[\binom{100}{1}10^0+\binom{100}{3}10+\binom{100}{5}10^2+...+\binom{100}{99}10^{49}]\,.$$

Бидејќи биномните коефициенти се природни броеви, доказот е завршен.

Забелешка. На ист начин се докажува поопштото тврдење: Ако k,l и n се природни броеви тогаш и $\sqrt{k}[(l+\sqrt{k})^{2n}-(l-\sqrt{k})^{2n}$ е природен број.

11. Да се докаже дека производот на k последователни природни броеви е делив со $k!$.

Решение. Нека $n+1,n+2,...,n+k$ се k последователни природни броеви. Дека нивниот производ е делив со $k!$, следува од тоа што $\binom{n+k}{k}$ е природен број и од тоа што

$$\frac{(n+k)(n+k-1)...(n+2)(n+1)}{k!}=\frac{(n+k)!}{k!(n+k-k)!}=\binom{n+k}{k}\,.$$

12. На кои цифри завршува биномниот коефициент $\binom{n}{4}$, $n=4,5,6,...$.

Решение. Имаме

$$\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\,. \qquad (1)$$

Секој природен број може да се претстави во еден од облиците

$$5k\,,\,5k+1\,,\,5k+2\,,\,5k+3\,,\,5k+4\,.$$

Ако n е од облик $5k$ или $5k+1$ или $5k+2$ или $5k+3$, тогаш бројот

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

е делив со 5. Бидејќи 5 и 24 се заемно прости,, следува дека $\binom{n}{4}$ е делив со 5, па $\binom{n}{4}$ завршува на 0 или 5.

Ако n е од облик $5k+4$, тогаш, заменувајќи во (1), ќе добиеме дека

$$\binom{n}{4}=\frac{5m}{24}+1\,. \qquad (2)$$

користејќи дека 5 и 24 се заемно прости и дека $\frac{5m}{24}$ е природен број, следува дека $\frac{5m}{24}$ е делив со 5, т.е. тој завршува со 0 или 5. Според тоа, бројот $\frac{5m}{24}$, $n \geq 5$ ќе завршува на 1 или 6.

13. Определи ги сите парови (a,b) природни броеви, такви што за секој природен број n бројот $a^n + b^n$ е точен $n+1$-ви степен на природен број.

Решение. Ќе претпоставиме дека за парот природни броеви (a,b) е исполнет условот од задачта. Со $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ ќе ја означиме низата за која $a^n + b^n = c_n^{n+1}$.

Ќе покажеме дека $c_n \leq a+b$. Навистина, ако претпоставиме дека $c_n > a+b$, тогаш

$$c_n^{n+1} > (a+b)^{n+1} > (a+b)^n > a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n > a^n + b^n,$$

што е противречност. Според тоа, барем еден од броевите од множеството $\{1,2,3,...,a+b\}$ во низата $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ се повторува бесконечно многу пати. Значи, за некој $c \in \{1,2,3,...,a+b\}$ равенката $a^n + b^n = c^{n+1}$ има бесконечно многу решенија. Истата ќе ја запишеме во облик

$$(\tfrac{a}{c})^n + (\tfrac{b}{c})^n = c. \tag{1}$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \geq b$. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $a > c$. Бидејќи $\frac{a}{c} = 1+d$ од неравенството на Бернули, добиваме $(\frac{a}{c})^n = (1+d)^n > 1+nd$. Но тогаш за секој $n > \frac{c}{d}$ имаме

$$(\tfrac{a}{c})^n + (\tfrac{b}{c})^n > (\tfrac{a}{c})^n > 1 + \tfrac{c}{d}d = 1+c > c.$$

Значи, равенката (1) не може да има бесконечно многу решенија.

Случај 2. $a \leq c$. Во овој случај $\frac{a}{c} \leq 1, \frac{b}{c} \leq 1$. Но, тогаш $(\frac{a}{c})^n \leq 1, (\frac{b}{c})^n \leq 1$ од каде добиваме $(\frac{a}{c})^n + (\frac{b}{c})^n \leq 1+1 = 2$. Според тоа, $c=1$ или $c=2$.

Ако $c=1$, тогаш $(\frac{a}{c})^n < (\frac{a}{c})^{n+1}$, $(\frac{b}{c})^n < (\frac{b}{c})^{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, па равенката не може да има бесконечно многу решенија.

Ако $c=2$, тогаш равенство е можно ако и само ако $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = 1$, односно $a=b=c=2$ е единствено решени на равенката (1).

Според тоа единствен пар е $(a,b) = (2,2)$.

14. Нека x е позитивен цел број. Докажи дека

$$\tfrac{1}{x}\binom{n}{0} - \tfrac{1}{x+1}\binom{n}{1} + ... + (-1)^n \tfrac{1}{x+n}\binom{n}{n} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}.$$

Решение. Ќе го примениме методот на математичка индукција. За $n=1$ равенството е очигледно. Да претпоставиме дека тоа е точно за природниот број n. Бидејќи x не е негативен цел број или нула, претпоставуваме дека важи и равенството:

$$\tfrac{1}{x+1}\tbinom{n}{0}-\tfrac{1}{x+2}\tbinom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\,\tfrac{1}{x+n+1}\tbinom{n}{n}=\tfrac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}\ .$$

Ако го одземеме добиеното равенство од равенството кое важи за природниот број n и ги искористиме познатите равенства

$$\tbinom{n}{0}=\tbinom{n}{n}=\tbinom{n+1}{0}=\tbinom{n+1}{n+1}=1 \quad \text{и} \quad \tbinom{n+1}{k+1}=\tbinom{n}{k}+\tbinom{n}{k+1}\,,$$

добиваме:

$$\tfrac{1}{x}\tbinom{n}{0}-\tfrac{1}{x+1}(\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{0})+\ldots+\tfrac{(-1)^n}{x+n}(\tbinom{n}{n}+\tbinom{n}{n-1})-\tfrac{(-1)^n}{x+n+1}\tbinom{n}{n}=\tfrac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x+n+1})$$

$$\tfrac{1}{x}\tbinom{n+1}{0}-\tfrac{1}{x+1}\tbinom{n+1}{1}+\ldots+\tfrac{(-1)^n}{x+n}\tbinom{n+1}{n}+\tfrac{(-1)^{n|1}}{x+n+1}\tbinom{n+1}{n+1}=\tfrac{(n+1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

што и требаше да се докаже.

15. Нека $n\in\mathbb{N}$. Провери ја точноста на равенството:

$$\sum_{k=1}^{n}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{n}{k}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}\ .$$

Решение. Равенството ќе го докажеме со принципот на математичка индукција. Ќе воведеме ознака $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{n}{k}$. Имаме, $x_{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{n-1}{k}$.

Тврдењето е точно за $n=1$. Навистина

$$x_1=\sum_{k=1}^{1}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{1}{k}=(-1)^{1+1}\tbinom{1}{1}=1\ .$$

Нека тврдењето е точно за $n-1$, т.е. нека е точно равенството

$$x_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{n-1}{k}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n-1}\ .$$

Од равенството $\tbinom{n}{k}=\tbinom{n-1}{k}+\tbinom{n-1}{k-1}$, за $k=1,2,\ldots,n-1$, за природниот број n, заради индуктивната претпоставка имаме

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{n}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{n}{k}=x_n=\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{n}{k}+\tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\tbinom{n}{n}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}[\tbinom{n-1}{k}+\tbinom{n-1}{k-1}]+\tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\tbinom{n}{n}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{n-1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\tbinom{n-1}{k-1}+\tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\tbinom{n}{n}\\
&=x_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{(-1)^{k+1}}{n}\tbinom{n}{k}+\tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\tbinom{n}{n}\\
&=x_{n-1}+\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\tbinom{n}{k}=x_{n-1}+\tfrac{1}{n}(-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\tbinom{n}{k}+1)\\
&=x_{n-1}+\tfrac{1}{n}[1-(1-1)^n]=x_{n-1}+\tfrac{1}{n}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Сега, според принципот на математичка индукција добиваме дека равенството

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

е точно за секој природен број n.

16. Докажи дека $\sum_{k=0}^{2m}\frac{1}{C_{2m}^{k}}=\frac{2m+1}{m+1}$, каде $m\in\mathbb{N}$.

Решение. Јасно е дека C_{2m}^{k} можеме да го запишеме во вид $C_{2m}^{k}=\frac{(2m)!}{k!(2m-k)!}$.

Според тоа равенството можеме да го запишеме на следниот начин:

$$\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k}{\frac{(2m)!}{k!(2m-k)!}}=\frac{2m+1}{m+1},$$

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k(m+1)k!(2m-k)!=(2m+1)!,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k(2m+2)k!(2m-k)!=(2m+1)!. \qquad (1)$$

Последното равенство е еквивалентно со даденото равенство. Од друга страна, за $k=0,1,2,...,2m$ имаме

$$\begin{aligned}(2m+1)(2m-k)!k! &= [(2m-k+1)+(k+1)](2m-k)!k!\\ &= (2m-k+1)(2m-k)!+(k+1)(2m-k)!k!\\ &= (2k-k+1)!k!+(2m-k)!(k+1)!\end{aligned}$$

Сега за левата страна на равенството (1) имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k(2m+2)k!(2m-k)! &= \frac{1}{2}[(2m+1)!0!+(2m)!1!-(2m)!1!-(2m-1)!2!+\\ &\quad +(2m-1)!2!+2m-2)!3!-....-(2m-1)!2!-\\ &\quad -(2m)!1!+(2m)!1!+(2m+1)!0!]\\ &= \frac{1}{2}[(2m+1)!+(2m+1)!]=(2m+1)!\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

17. Да се определи коефициентот пред x^3 во развиената форма (по извршените степенувања) на изразот

$$(1+x)^3+(1+x)^4+...+(1+x)^{1995}.$$

Решение. Според формулата за сума на геометриска прогресија, добиваме:

$$(1+x)^3+(1+x)^4+...+(1+x)^{1995}=\frac{(1+x)^3[(1+x)^{1993}-1]}{x}=\frac{(1+x)^{1996}-(1+x)^3}{x}.$$

Бидејќи во именителот се наоѓа x, за определување на бараниот коефициент доволно е да се определи коефициентот пред x^4 во броителот. Но, x^4 не се јавува во $(1+x)^3$, па доволно е да се определи коефициентот пред x^4 во $(1+x)^{1996}$.

Значи, бараниот коефициент е $\binom{1996}{4}$.

18. Најди го коефициентот пред x^2 во развојот $(1+x+x^2)^9$.

Решение. Да ставиме $x+x^2=x(1+x)=y$. Тогаш дадениот израз го добива обликот $(1+y)^9$, а општиот член е: $T_{k+1}=\binom{9}{k}y^k$, $0\le k\le 9$. Но, $y^k=x^k(1+x)^k$, па ако општиот член на биномот $(1+x)^k$ го означиме со L_{m+1} добиваме $L_{m+1}=\binom{k}{m}x^m$, $0\le m\le k$. Сега, општиот член на развојот $(1+x+x^2)^9$ е:

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}x^k\binom{k}{m}x^m=\binom{9}{k}\binom{k}{m}x^{k+m},\ 0\le k\le 9,\,0\le m\le k\,.$$

Бидејќи го бараме коефициентот пред x^2 следува дека $k+m=2$, па од $0\le m\le k$ добиваме $0\le 2-k\le k$, т.е. $k\ge 1$ и $k\ge 2$, што е можно за $k=1,2$. Соодветните вредности за m ги добиваме од условот $k+m=2$, т.е. $m=1,0$.

Според тоа, постојат два члена во развојот на изразот $(1+x+x^2)^9$ кои содржат x^2 и збирот на нивните коефициенти е:

$$\binom{9}{1}\binom{1}{1}+\binom{9}{2}\binom{2}{0}=45\,.$$

19. Најди го членот со најголем коефициент во развојот на биномот

$$(\sqrt{2}+x)^{50}\,.$$

Решение. Да разгледаме два последователни члена на развојот

$$T_{k+1}=\binom{50}{k}\sqrt{2^k}\,x^{50-k}=A_{k+1}x^{50-k},\ T_k=\binom{50}{k-1}\sqrt{2^{k-1}}\,x^{50-k+1}=A_kx^{50-k+1}\,.$$

Да видиме за кои вредности на k односот меѓу коефициентите A_{k+1} и A_k е помал од 1. Од $\frac{\binom{50}{k}\sqrt{2^k}}{\binom{50}{k-1}\sqrt{2^{k-1}}}<1$ следува $\frac{51-k}{k}\sqrt{2}<1$, а оттука $k>51(2-\sqrt{2})\approx 29{,}875$. Почнувајќи од $30-$тиот член односот $A_{k+1}:A_k$ е помал од 1, па значи $A_{31}<A_{30}$. Ако $k<30$ односот $A_{k+1}:A_k$ е поголем од $D=4k^2-4(k^2-1)=4$, па

$$A_{30}>A_{29}>A_{28}>\dots\,.$$

Значи триесеттиот член има најголем коефициент.

20. Најди го членот што не содржи x во развојот на $(\frac{1}{x}+3x)^n$, ако коефициентот пред степенот на x во десеттиот по ред собирок е најголем.

Решение. За $k+1$-от член во развојот добиваме

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{x}\right)^{n-k}(3x)^k=\binom{n}{k}3^k\,x^{2k-n}\,,$$

па коефициентот пред x е $A_{k+1}=\binom{n}{k}3^k$. Според условот на задачата имаме $A_{10}>A_9$ и $A_{10}>A_{11}$. Од $A_{10}>A_9$ имаме $\binom{n}{9}3^9>\binom{n}{8}3^8$, па $\frac{n!}{(n-9)!9!}3^9>\frac{n!}{(n-8)!8!}3^8$, односно $\frac{3}{9}>\frac{1}{n-8}$. Оттука $3n-24>9$, т.е. $n>11$. Од $A_{10}>A_{11}$ добиваме $\binom{n}{9}3^9>\binom{n}{10}3^{10}$ и постапувајќи на сличен начин како претходно $n<12\frac{1}{3}$.

Според тоа $n=12$.

Сега $x^{2k-12}=x^0$, па $2k-12=0$, односно $k=6$. Значи бараниот член е седмиот и тој изнесува $T_6=\binom{12}{6}3^6=673596$.

21. Најди го членот кој не го содржи x во развојот на $(2x+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x})^n$ ако збирот на сите биномни коефициенти во тој развој е 256.

Решение. Збирот на сите биномни коефициенти е

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n \text{, па } 2^n=256=2^8.$$

Според тоа $n=8$. Натаму, $k+1-$ от член во развојот е

$$\binom{8}{k}(2x)^{8-k}(x^{\frac{2}{3}-1})^k=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k-\frac{k}{3}},$$

па не го содржи x ако и само ако $8-k-\frac{k}{3}=0$. Оттука добиваме дека $k=6$. Значи бараниот член е седмиот и е еднаков на $\binom{8}{6}2^{8-2}=112$.

22. Колку рационални членови има во развојот на биномот $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{100}$?

Решение. Општиот член во развојот на биномот е $T_{k+1}=\binom{100}{k}3^{\frac{100-k}{2}}2^{\frac{k}{3}}$, $k\in\{0,1,...,100\}$. За да биде членот рационален треба $\frac{100-k}{2}$ и $\frac{k}{3}$ да се цели броеви. Бидејќи $\frac{100-k}{2}$ е цел број ако 2 е делител на k, а $\frac{k}{3}$ е цел број ако 3 е делител на k добиваме дека k треба да е цел број делив со 6. Значи рационални членови има колку што има цели броеви деливи со 6 од 0 до 100, а нив ги има вкупно $[\frac{100}{6}]+1=17$.

23. Најди го средниот член во развојот на биномот

$$(a^{-2}\sqrt{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}})^n$$

ако коефициентот на петтиот член спрема коефициентот на третиот член се однесува како $14:3$.

Решение. Бидејќи биномот не содржи константи добиваме дека коефициентот на петтиот член е $\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ а коефициентот на третиот член е $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$\binom{n}{4}:\binom{n}{2}=14:3,$$

која е еквивалентна на равенката

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}:\frac{n(n-1)}{2}=14:3,\quad n\in\mathbb{N},$$

т.е. на равенката $n^2-5n-50=0,\ n\in\mathbb{N}$. Решенијата на равенката $n^2-5n-50=0$ се $n_1=-5$ и $n_2=10$ и како $n\in\mathbb{N}$ добиваме дека степенот на биномот е $n=10$. Според тоа, развојот содржи 11 члена и треба да го определиме шестиот.

Значи, бараниот член е

$$T_{5+1} = \binom{10}{5}(a^{-2}\sqrt{a})^5(-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}})^5 = -252a^{-10} .$$

24. Провери ја точноста на равенството:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} ,$$

каде $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Равенството ќе го докажеме со принципот на математичка индукција.

Ќе воведеме ознака $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}$. Јасно $x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k}$.

Тврдењето е точно за $n = 1$. Навистина

$$x_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{1}{k} = 1 \ .$$

Нека тврдењето е точно за $n-1$, т.е. нека е точно равенството

$$x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1} .$$

Од равенството $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, за $k = 1,2,\ldots,n-1$, за природниот број n, заради индуктивната претпоставка имаме

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n} = x_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}$$

$$= x_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k} = x_{n-1} + \frac{1}{n}\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{n}\binom{n}{k} + 1\right) = x_{n-1} + \frac{1}{n}[1-(1-1)^n]$$

$$= x_{n-1} + \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

(да забележиме дека збирот $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{n}\binom{n}{k}$ според биномната формула е еднаков на нула, односно

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = \frac{1}{n}(1+(-1))^n = 0 \text{).}$$

Сега, според принципот на математичка индукција добиваме дека равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

е точно за секој природен број n.

25. Да се пресмета збирот

$$S = 1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\ldots+n^2\binom{n}{n} .$$

Решение. Имаме:

$$k^2\binom{n}{k}=k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}=k^2\frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=nk\binom{n-1}{k-1}.$$

Заради тоа, бараниот збир можеме да го запишеме во облик

$$S=1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+...+n^2\binom{n}{n}=n\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}.$$

Според тоа,

$$2S=2n\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}(k\binom{n-1}{k-1}+(n-k+1)\binom{n-1}{n-k})$$
$$=n(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}=n(n+1)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=n(n+1)2^{n-1}.$$

Според тоа, $S=n(n+1)2^{n-2}$.

26. Да се пресмета збирот

$$S=\frac{2^2}{2}\binom{n}{1}+\frac{2^3}{3}\binom{n}{2}+...+\frac{2^n}{n}\binom{n}{n-1}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}.$$

Решение. Имаме:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i+1}}{i+1}\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i+1}}{i+1}\frac{n!}{i!(n-i)!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i+1}}{n+1}\frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{i+1}\binom{n+1}{i+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}(\sum_{i=0}^{n+1}2^i\binom{n+1}{i}-\binom{n+1}{0}2^0-\binom{n+1}{1}2^1)=\frac{1}{n+1}((2+1)^{n+1}-1-2(n+1))$$
$$=\frac{3^{n+1}-2n-3}{n+1}.$$

27. Ако $n\geq 2$ и $|x|<1$, докажи дека

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

Решение. Имаме:

$$(1+x)^n+(1-x)^n=2(1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+...+a(x))$$

каде $a(x)=\binom{n}{n}x^n$ ако n е парен и $a(x)=\binom{n}{n-1}x^{n-1}$ ако n е непарен. Да означиме $A(x)=2(1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+...+a(x))$. Бидејќи $|x|<1$, следува дека $\binom{n}{2k}x^{2k}<\binom{n}{2k}$ за секој природен број k. Значи изразот $A(x)$ ќе биде најголем ако $x=\pm 1$ и во тој случај неговата вредност е 2^n. Според тоа

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

28. Докажи го неравенството

$$\sqrt{\binom{n}{0}\binom{n}{1}}+\sqrt{\binom{n}{1}\binom{n}{2}}+...+\sqrt{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}}<2^n-1.$$

Решение. Ако искористиме дека $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$ добиваме

$$\binom{n+1}{k+1}>2\sqrt{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k}}.$$

Ако во последното неравенство ставеме $k=0,1,...n-1$ и ги собереме добиените неравенства ќе добиеме

$$\sqrt{\tbinom{n}{0}\tbinom{n}{1}}+\sqrt{\tbinom{n}{1}\tbinom{n}{2}}+...+\sqrt{\tbinom{n}{n-1}\tbinom{n}{n}}<\tfrac{1}{2}(\tbinom{n+1}{1}+\tbinom{n+1}{2}\,|\,...+\tbinom{n+1}{n})$$

$$=\tfrac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n+1}\tbinom{n+1}{k}-2)=2^n-1.$$

29. Дадени се три позитивни броеви a,b,c такви што за секој $k\in\mathbb{N}$ од должините a^k,b^k,c^k може да се формира триаголник. Докажи дека меѓу броевите a,b,c има барем два еднакви.

Решение. Нека $a\neq b\neq c\neq a$ и $a<b<c$. Од условот a^k,b^k,c^k се должини на страните на триаголник следува

$$c^k<a^k+b^k,\ k=1,2,3. \qquad (1)$$

Но

$$\begin{aligned}c^k&=(b+(c-b))^k=b^k+kb^{k-1}(c-b)+\tbinom{k}{2}b^{k-2}(c-b)^2+...+(c-b)^k\\&\geq b^k+kb^{k-1}(c-b).\end{aligned}.$$

Последново неравенство важи за секој $k\in\mathbb{N}$. Постои $k_0\in\mathbb{N}$ таков што $k_0(c-b)>b$. За k_0 важи

$$c^{k_0}\geq b^{k_0}+k_0b^{k_0-1}(c-b)>b^{k_0}+b^{k_0-1}(k_0(c-b))>b^{k_0}+b^{k_0}>b^{k_0}+a^{k_0},$$

што противречи на (1). Значи меѓу броевите a,b,c има барем два еднакви.

2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. Дадени се пет произволни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат барем два броја такви што нивната разлика е делива со 4.

Решение. Секој природен број при делење со 4 дава остаток 0, 1, 2 или 3. Значи постојат само четири можности. Според тоа, меѓу пет природни броеви мора да има барем два кои имаат ист остаток при делење со 4. Јасно, разликата на овие два броја е делива со 4.

2. Дали може броевите $-1,0,1$ да се распоредат во квадратна 5×5 таблица така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала да биде различен.

Решение. Збирот на пет броеви од множеството $\{-1,0,1\}$ може да биде број a таков што $-5\leq a\leq5$, што значи дека збирот може да прими најмногу 11 различни вредности. Но, квадратната 5×5 таблица има вкупно 12 колони, редови и дијагонали, па од принципот на Дирихле (теорема 8.2) следува дека барем два збира на броевите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала мораат да бидат еднакви.

3. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се цели броеви. Докажи дека постојат $p, q \in \{0,1,2,...,n\}$, $p < q$ такви што $n \mid (a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_q)$.

Решение. Ги формираме збировите

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_1 + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n &= a_1 + a_2 + ... + a_n. \end{aligned}$$

Ако еден од овие збирови е делив со n, да кажеме b_k, тогаш земаме $p = 0, q = k$ и задачата е решена. Нека ниеден од овие збирови не е делив со n. Од теоремата за делење со остаток имаме $b_i = ns_i + r_i$, $0 < r_i < n$ за секој $i = 1,2,...,n$. Бидејќи имаме n остатоци $r_1, r_2, ..., r_n$ и тие примаат $n-1$ вредности $1,2,...,n-1$, според принципот на Дирихле заклучуваме дека барем два од овие остатоци се еднакви, т.е. постојат p и q такви што $r_p = r_q$ и тоа е бараното решение, бидејќи

$$a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_q = b_q - b_p = n(s_q - s_p).$$

4. Во едно одделение 40 ученици правеле три писмени задачи. Никој не добил оценка помала од 3 и секој добил по три различни оценки. Харалампие забележал дека во одделението има најмалку 7 ученици кои имаат иста оценка на секоја од трите писмени задачи. Дали Харалампие е во право?

Решение. За секој ученик постојат 6 можности, т.е. секој ученик ја добил следната подредена тројка оценки:

(3, 4, 5), (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4) и (5, 4, 3).

Затоа, учениците според добиените оценки можеме да ги поделиме на 6 групи. Во одделението има 40 ученици, а според добиените оценки се поделени во 6 групи. Од принципот на Дирихле следува дека постои група во која има најмалку 7 ученици, што значи дека Харалампие е во право.

5. Дадени се 10 различни природни броеви помали од 26. Докажи дека меѓу сите можни разлики на паровите различни броеви од дадените 10 броеви, постојат барем три еднакви разлики.

Решение. Дадените 10 броеви да ги подредиме по големина, т.е. нека $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 < n_7 < n_8 < n_9 < n_{10} < 26$.

Ќе докажеме дека меѓу следните девет разлики

$$n_2 - n_1, n_3 - n_2, n_4 - n_3, n_5 - n_4, n_6 - n_5, n_7 - n_6, n_8 - n_7, n_9 - n_8, n_{10} - n_9$$

има барем три еднакви броеви, со што задачата ќе биде решена. Ако меѓу овие 9 разлики нема барем три еднакви, тогаш меѓу нив има најмногу 2 единици, 2 двојки, 2 тројки, 2 четворки и 2 петки. Одовде добиваме дека

$$\begin{aligned} n_{10} - n_1 &= (n_{10} - n_9) + (n_9 - n_8) + (n_8 - n_7) + (n_7 - n_6) + (n_6 - n_5) \\ &\quad + (n_5 - n_4) + (n_4 - n_3) + (n_3 - n_2) + (n_2 - n_1) \\ &\geq 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 25, \end{aligned}$$

т.е. дека $n_{10} \geq n_1 + 25 \geq 26$, што му противречи на фактот дека $n_{10} < 26$. Значи, меѓу посочените 9 разлики мора да има барем три еднакви.

6. Да се докаже дека постои природен број кој завршува на 2008 и кој е делив со 2009.

Решение. Ќе покажеме дека меѓу броевите $2008, 20082008, \ldots, 2008\ldots2008, \ldots$ постои број кој се дели со 2009.

Од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја од облик $2008\ldots2008$ кои даваат ист остаток при делење со 2009. Па нивната разлика е делива со 2009 и е од облик

$$20082008\ldots0000 = 2008\ldots2008\cdot 10^k = A\cdot 10^k .$$

Бидејќи $\mathrm{NZD}(10^k, 2009) = 1$ следува $2009 \mid A$ каде A е од облик $2008\ldots2008$, што и требаше да се докаже.

7. Дадена е аритметичката прогресија $1, 4, 7, \ldots, 100$. Да се докаже дека од произволно избрани 20 броеви секогаш постојат два од нив чиј збир е 104.

Решение. Да ги разгледаме множествата $\{1\}$, $\{4,100\}$, $\{7,97\}$, ...,$\{49,55\}$, $\{52\}$. Овие множества се 19 на број, а бидејќи имаме 20 броеви од принципот на Дирихле следува дека мора да постојат барем два броја од исто множество. Со ова задачата е решена.

8. Дали за некој природен број n, бројот 3^n може да завршува на 000001?

Решение. Да ги разгледаме 10^6 различни степени на бројот 3:

$$3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{10^6}$$

и остатоците при делењето на секој степен со 10^6. Секој од овие броеви при делење со 10^6 дава остаток различен од нула. Значи, бројот на различни остатоци е еднаков на $10^6 - 1$, а броеви има 10^6. Според тоа, постојат два различни степени 3^m и 3^n, $m > n$ со ист остаток. Нивната разлика $3^m - 3^n = 3^n(3^{m-n} - 1)$ е делива со 10^6. Но, броевите 3^n и 10^6 немаат заеднички делител, па затоа бројот $3^{m-n} - 1$ се дели со 10^6, т.е. $3^{m-n} - 1 = 10^6 k$, односно

$$3^{m-n} = 10^6 k + 1 = \overline{\ldots a000001}.$$

9. Докажете дека за секој природен број n кој не е делив ниту со 2 ниту со 5, постои природен број N чии цифри се сите единици и кој е делив со n.

Решение. Да ги разгледаме броевите

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots,\ \underbrace{111\ldots11}_{n+1}.$$

Во оваа низа постојат два броја кои при делењето со n даваат ист остаток, па затоа нивната разлика се дели со n. Според тоа, постои природен број

$$\underbrace{111\ldots11}_{h}\underbrace{000\ldots00}_{s} = \underbrace{111\ldots11}_{h}\cdot 10^s = \underbrace{111\ldots11}_{h}\cdot 2^s 5^s$$

кој се дели со n. Но, n не се дели со 2 и со 5, па затоа бројот $N = \underbrace{111\ldots11}_{h}$ се дели со n.

10. Да се докаже дека во произволен конвексен четириаголник со плоштина P и периметар L може да се смести круг со радиус P/L.

Решение. Над секој страна на четириаголникот да впишеме правоаголник со висина P/L. Вкупната плоштина што ја зафаќаат овие правоаголници е P, но некои од нив се препокриваат или излегуваат надвор од четириаголникот, па затоа останува непокриен дел од четириаголникот.

Било која точка од овој непокриен дел може да биде центар на бараниот круг.

11. Секоја точка од рамнината е обоена во една од две бои, сина или црвена. Да се докаже дека во таа рамнина постои рамностран триаголник чии темиња се обоени во една иста боја.

Решение. Прво ќе докажеме дека постои отсечка чии крајни точки се обоени во иста боја. Имено, во дадената рамнина конструираме рамностран триаголник, тогаш според принципот на Дирихле меѓу трите темиња постојат две кои се обоени во иста боја, според ова во дадената рамнина постои отсечка чии крајни точки се обоени во иста боја.

Понатаму ќе покажеме дека постои отсечка чии крајни точки и средишна точка се обоени во иста боја.

Нека AB е отсечка чии крајни точки се обоени на пример во сина боја (таква отсечка постои според претходното). Нека D и E (од различни страни на A и B) се точки такви што $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{BE}$. Тогаш ако некоја од точките D и E е обоена во сина боја , задачата е решена. Затоа нека точките D и E се обоени во црвена боја. Средишната точка F на AB е средишна и на отсечката DE, и јасно F е обоена или во сина или во црвена боја. Со ова тврдењето е докажано.

Сега да разгледаме три сини точки A, B, C такви што B е средина на AC, (такви постојат според претходното). Нека D, E и F се трети темиња на рамностраните триаголници конструирани над AC, AB, BC , соодветно од иста страна на правата AC.

Тогаш ако барем една од E, F и D е сина , задачата е решена.

Ако пак сите три точки E, F и D се црвени тогаш бараниот триаголник е EFD (тој е рамностран и сите негови темиња се обоени црвено).

12. Дадени се n различни реални броеви, $n>4$. Докажи дека може да се изберат два од нив, x и y, така што

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<1.$$

Решение. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се дадените реални броеви. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$a_1<a_2<...<a_n.$$

Бројот на точки не е помал од 5, па затоа можеме да ги избереме првите пет точки

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5.$$

Од особините на функцијата $y=\operatorname{tg}x$, постојат единствени пет реални броја

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4<\alpha_5<\frac{\pi}{2},$$

такви што

$$\operatorname{tg}\alpha_1=a_1,\operatorname{tg}\alpha_2=a_2,\operatorname{tg}\alpha_3=a_3,\operatorname{tg}\alpha_4=a_4,\operatorname{tg}\alpha_5=a_5.$$

Интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ќе го разделиме на четири интервали на следниот начин:

$$(-\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{4}],(-\tfrac{\pi}{4},0],(0,\tfrac{\pi}{4}],(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{2}).$$

Според принципот на Дирихле, постојат барем две точки α_i и α_j, $\alpha_i < \alpha_j$ кои припаѓаат на еден од овие интервали, при што $\operatorname{tg}\alpha_j = x, \operatorname{tg}\alpha_i = y$.Тогаш јасно е дека

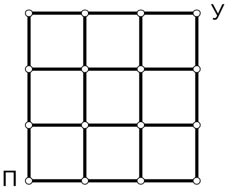
$$0 < \alpha_j - \alpha_i < \tfrac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{tg}0 < \operatorname{tg}(\alpha_j - \alpha_i) < \operatorname{tg}\tfrac{\pi}{4}$$

$$0 < \frac{\operatorname{tg}\alpha_j - \operatorname{tg}\alpha_i}{1+\operatorname{tg}\alpha_j \operatorname{tg}\alpha_i} < 1$$

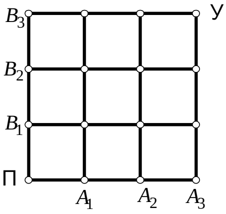
$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1..$$

13. На цртежот е дадена квадратна шема од патишта, плоштад *П* и училиште *У*. Од плоштадот *П* тргнале k ученици кои треба да стигнат до училиштето *У*. Притоа тие може да се движат нагоре и во десно.



Ако секој од нив може слободно да ја избира патеката на своето движење, кој е најмалиот број k на ученици за да има двајца кои одат по иста патека.

Решение. Не е тешко да се провери дека постојат 20 различни начини да се дојде од плоштадот *П* до училиштето *У*. Навистина, тие се



$П A_1 A_2 A_3 B_1 B_2$ У

$П A_1 A_2 B_1 A_3 B_2$ У

$П A_1 A_2 B_1 B_2 A_3$ У

$П A_1 A_2 B_1 B_2 B_3$ У

$П A_1 B_1 A_2 A_3 B_2$ У

$П A_1 B_1 A_2 B_2 A_3$ У

$П A_1 B_1 A_2 B_2 B_3$ У

$П A_1 B_1 B_2 A_2 A_3$ У

$П A_1 B_1 B_2 A_2 B_3$ У

$П A_1 B_1 B_2 B_3 A_2$ У

$П B_1 B_2 B_3 A_1 A_2$ У

$П B_1 B_2 A_1 B_3 A_2$ У

$П B_1 B_2 A_1 A_2 B_3$ У

$П B_1 B_2 A_1 A_2 A_3$ У

$П B_1 A_1 B_2 B_3 A_2$ У

$П B_1 A_1 B_2 A_2 A_3$ У

$П B_1 A_1 B_2 A_2 B_3$ У

$П B_1 A_1 A_2 B_2 B_3$ У

$П B_1 A_1 A_2 B_2 A_3$ У

$П B_1 A_1 A_2 A_3 B_2$ У

Според принципот на Дирихле треба да има најмалку 21 пат за да од *П* до *У* има двајца ученици кои ќе одат по ист пат.

14. Најди ги сите природни броеви n, за кои во единечнитге квадратчиња на квадратна шема со димензии $n \times n$ може да се запише еден од броевите $-1, 0$ или 1, така што два збира од $2n$-те збирови на броевите по колони и по редици не се еднакви меѓу себе.

Решение. Одговор: за секој парен број таков распоред е можен.

Нека е дадена квадратна шема со димензии $n\times n$ така што во секое нејзино поле е запишан еден од броевите $-1,0$ или 1, т.е. нека $[a_{ij}]_{n\times n}$ е квадратната шема при што $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$, која го исполнува условот од задачата. Најголем збир кој може да се појави во некоја колона или редица е n а најмал која може да се појави е $-n$. Според тоа можни збирови се сите броеви од множеството

$$\{-n,-(n-1),-(n-2),...,-2,-1,0,1,2,...,n-2,n-1,n\}.$$

Според принципот на Дирихле некој од овие броеви не е збир, бидејќи сите $2n$ збирови се меѓу себе различни. Нека $r_1,r_2,...,r_n$ се збирови по редици а $c_1,c_2,...,c_n$ се збирови по колони. Нека бројот на ненегативни збирови во редиците е k. Тогаш според условот на задачата бројот на ненегативни збирови по колони е еднаков на $n-k$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $r_1,r_2,...,r_k$ се ненегативни,т.е. во првите k редици збировите се ненегативни, и дека $c_1,c_2,...,c_{n-k}$ се исто така позитивни, т.е. во првите $n-k$ колони збировите се ненегативни. Ако тоа не е така ќе извршиме преместување на редиците и потоа преместување на колоните за да биде исполнет тој услов. При тоа, со таквото преместување збировите ни по редици ни по колони нема да се промени. За таквиот распоред имаме

$$\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|c_j|\geq\sum_{r=-n}^{n}|r|-n=-n+2\frac{n(n+1)}{2}=n^2. \qquad (1)$$

Од друга страна

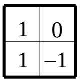
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|c_j| &= \sum_{i=1}^{k}r_i-\sum_{i=k+1}^{n}r_i+\sum_{j=1}^{n}c_j-\sum_{j=n-k+1}^{n}c_j\\ &=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\\ &=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=n-k+1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=n-k+1}^{n}a_{ij}+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=1}^{k}a_{ij} \qquad (2)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij}\\ &=2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}-2\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij}\leq 2k(n-k)+2k(n-k)=4k(n-k)\end{aligned}$$

Од (1) и (2) добиваме $n^2\leq 4nk-4k^2$, кое е еквивалентно со $(n-2k)^2\leq 0$. При тоа, последното равенство е можно ако и само ако $n=2k$.

Со помош на математичка индукција може да се докаже дека за секој парен природен број $n=2k$ таков распоред е можен. На цртеж 1 и цртеж 2 дадени се такви распореди. За индуктивниот чекор на цртеж 3 е даден начинот на кој треба да се дополни квадратната шема со со димензии $2k\times 2k$ со две нови редици и две нови колони за да се добие барaниот резултат. При тоа распоредот на броеви во квадратната шема со димензии $(2k)\times(2k)$ е даден со

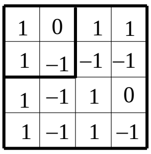
$$c_1=n,c_2=-n+1,c_3=n-2,c_4=-n+3,....c_{n-2}=-3,c_{n-1}=2,c_n=-1$$

$$r_1 = n-1, r_2 = -n+2, r_3 = n-3, r_4 = -n+4, ..., r_{n-2} = -2, r_{n-1} = 1, r_n = 0 .$$



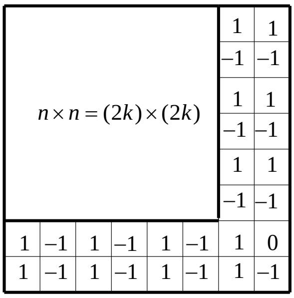
1	0
1	–1

цртеж 1



1	0	1	1
1	–1	–1	–1
1	–1	1	0
1	–1	1	–1

цртеж 2



						1	1
						–1	–1
$n \times n = (2k) \times (2k)$						1	1
						–1	–1
						1	1
						–1	–1
1	–1	1	–1	1	–1	1	0
1	–1	1	–1	1	–1	1	–1

цртеж 3

3. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПРИНЦИПИ

1. На колку начини на тројца студенти може да им се поделат 8 исти моливи, така што секој од нив да добие барем еден молив?

Решение. *Прв начин.* Осумте моливи ќе ги наредиме во низа и на празните места меѓу нив, кои ги има 7, ќе поставуваме две “прегради” како на следниов цртеж.

$$\bullet^1 \quad \bullet^2| \quad \bullet^3 \quad \bullet^4 \quad \bullet^5 \quad \bullet^6| \quad \bullet^7 \quad \bullet$$

Празните места да ги означиме со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Поделбата на цртежот е определена со броевите 2 и 6, т.е. со бројот 26. Сите поделби се определени со следниве броеви:

12	13	14	15	16	17
23	24	25	26	27	
34	35	36	37		
45	46	47			
56	57				
67					

Вакви двоцифрени броеви има 21, па од принципот на еднаквост следува дека бројот на поделбите на 8 исти моливи на тројца студенти така што секој од нив да добие барем по еден молив е 21.

Втор начин. Нека сите поделби на моливите на тројца студенти го формираат множеството A. Ова множество ќе го разбиеме на подмножества A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, при што подмножеството A_1 ги содржи поделбите при кои првиот студент добива еден молив, A_2 поделбите при кои првиот студент добива два молива итн. Така, за множествата $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ја имаме следнава табела

i	A_i	$\|A_i\|$
1	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	6
2	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	5
3	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4
4	(1,3), (2,2), (3,1)	3
5	(1,2), (2,1)	2
6	(1,1)	1
Вкупно		21

Сега од принципот на збир имаме

$$|A|=|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|+|A_6|=21.$$

2. Меѓу градовите *A* и *B* има три директни патишта, меѓу градовите *B* и *C* има два директни пата, а меѓу градовите *C* и *D* има пет директни патишта. На колку различни начини може да се стигне од градот *A* во градот *D*, ако треба само по еднаш да се влезе во секој од градовите *B* и *C*?

Решение. Со X, Y, Z да ги означиме множествата патишта меѓу градовите *A* и *B*, *B* и *C*, *C* и *D* соодветно. Тогаш, секоја можност за патување од *A* до *D* при наведените услови е елемент на множеството $X\times Y\times Z$ и елементите на ова множество ги даваат сите можности за патување. Од принципот на производ следува дека бараниот број е

$$|X\times Y\times Z|=|X|\cdot|Y|\cdot|Z|=3\cdot2\cdot5=30.$$

3. Во една студиска група има 35 студенти. Од нив, десет студенти имаат оценка осум по алгебарски структури, 20 студенти имаат оценка осум по калкулус, додека 27 студенти имаат барем една оценка осум по предметите алгебарски структури и калкулус. Колку студенти имаат оценка осум по двата предмети?

Решение. Нека A е множеството студенти кои што имаат оценка осум по алгебарски структури и B е множеството студенти кои што имаат оценка осум по калкулус. Од условите на задачата имаме $|A|=10, |B|=20$ и $|A\cup B|=27$, а се бара $|A\cap B|$. Од принципот на вклучување имаме

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,$$

односно $27=10+20-|A\cap B|$, па затоа $|A\cap B|=3$.

4. Најди го бројот на природните броеви помали од 100 кои не се деливи ниту со 2, ниту со 3, ниту со 7.

Решение. Нека $M=\{n\,|\,1\le n<100, n\in\mathbf{N}\}$ и со A, B и C да ги означиме множествата од природните броеви помали од 100 кои се деливи со 2, 3 и 7 соодветно. Тогаш,

$|A|=49$, $|B|=33$, $|C|=14$, $|A\cap B|=16$, $|A\cap C|=7$, $|B\cap C|=4$, $|A\cap B\cap C|=2$

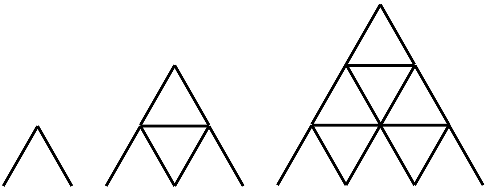
Прво од принципот на исклучување, а потоа од принципот на вклучување имаме

$$\begin{aligned}|M\setminus(A\cup B\cup C)|&=|M|-|A\cup B\cup C|=\\&=|M|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|\\&=99-49-33-14+16+7+4-2=28.\end{aligned}$$

Според тоа, природни броеви кои се помали од 100 и не се деливи ниту со 2, ниту со 3, ниту со 7 има вкупно 28.

5. За кула од карти оде ден кат потребни се две карти, за два ката потребни се 7 карти, а за кула од три ката потребни се 15 карти (види цртеж). Колку карти се потребни за кула од n ката?

Решение. За првиот кат (броено од горе) се потребни една карта накосена на десно, една накосена на лево и ниту една хоризонтална, за вториот две накосени надесно, две налево и една хоризонтално поставена, за третиот кат три накосени надесно, три налево и две хоризонтално поставени и се така до n-тиот кат, за кој се потребни n карти накосени надесно, n налево и $n-1$ хоризонтално поставена. Значи, вкупниот број на потребни карти е:



$$(1+1+0)+(2+2+1)+...+[n+n++(n-1)]=2(1+2+3+...+n)+(1+2+3+..+n-1)$$

$$=\frac{2n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n(3n+1)}{2}$$

6. Од коцки со рабови $1\,\mathrm{cm}$ направен е правоаголен паралелопипед со рабови a cm, b cm, c cm (a,b,c се природни броеви поголеми од 1). Вака добиениот паралелопипед однадвор е обоен црвено. Колку коцки од кои е направен паралелопипедот, имаат:

а) точно три ѕидови обоени црвено;

б) точно два ѕида обоени црвено;

в) точно еден ѕид обоен црвени;

г) ниту еден ѕид не е обоен црвено.

Решение. а) само три ѕидови обоено црвено имаат осум коцки, коишто се наоѓаат во темињата на паралелопипедот.

б) Само два црвено обоени ѕида имаат оние коцки, коишто се наоѓаат на рабовите на паралелопипедот, исклучувајќи ги коцките од темињата, а нивниот број е

$$4(a-2)+4(b-2)+4(c-2)\,.$$

в) Само еден црвено обоен ѕид имаат коцките, чијашто само една страна се наоѓа на површината на паралелопипедот. Нивниот број ќе го добиеме ако од бројот на сите коцки што се наоѓаат на површината на паралелопипедот го извадиме бројот на коцките со по два или три обоени ѕидови. Тој број изнесува

$$2[(a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2)]\,.$$

г) Ниту еден црвено обоен ѕид имаат коцките, коишто се наоѓаат во внатрешноста на паралелопипедот. Нив ги има на број $(a-2)(b-2)(c-2)$ (тие образуваат паралелопипед со рабови $a-2,b-2,c-2$).

7. Множеството природни броеви е разбиено на множества на следниот начин:

$$\{1\},\ \{\ 2,3\},\ \{\ 4,5,6\},\ \{\ 7,8,9,10\},\ ...$$

Нека S_k е збирот на броевите во k -тото множество (множество со k елементи). Докажи дека $S_1+S_3+S_5+...+S_{2n-1}=n^4$.

Решение. Пред најмалиот природен број во k -тото множество има

$$1+2+3+...+(k-1)=\frac{(k-1)k}{2}$$

броеви, па, значи, најмалиот број во k -тото множество е $\frac{(k-1)k}{2}+1$. Сумата S_k може да се добие како сума на k членови на аритметичка прогресија со разлика 1 и прв член $\frac{(k-1)k}{2}+1$. Добиваме:

$$S_k=\frac{k}{2}[2(\frac{(k-1)k}{2}+1)+(k-1)]=\frac{k^3+k}{2}.$$

Ќе го докажеме даденото тврдење со помош на принципот на математичка индукција.

За $n=1$ тврдењето важи, бидејќи $S_1=1=1^4$.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $n=m$, т.е.

$$S_1+S_3+S_5+...+S_{2m-1}=m^4.$$

Тогаш, за $n=m+1$, добиваме:

$$\begin{aligned}S_1+S_3+S_5+...+S_{2m-1}+S_{2(m+1)-1}&=S_1+S_3+S_5+...+S_{2m-1}+S_{2m+1}\\&=m^4+\frac{(2m+1)^3+(2m+1)}{2}\\&=m^4+4m^3+6m^2+4m+1=(m+1)^4\end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција, тврдењето важи за секој природен број n.

8. Од непарните природни броеви ги формираме множествата

$$A_1=\{1\},\qquad A_2=\{3,5\},\qquad A_3=\{7,9,11\},\qquad A_4=\{13,15,17,19\},\dots$$

Да се пресмета збирот на броевите на множеството A_n.

Решение. Да го најдеме првиот број во множеството A_n. Множествата A_1, A_2, ..., A_{n-1} се попарно дисјунктни, па бројот на елементите во нивната унија е

$$1+2+3+4+...+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Значи, последниот број во множеството A_{n-1} е $n(n-1)-1$. Според тоа, првиот број во множеството A_n ќе биде $n(n-1)+1$, а последниот $n(n+1)-1$.

Броевите во множеството A_n формираат аритметичка прогресија со прв член $a_1=n(n-1)+1$, со последен член $a_n=n(n+1)-1$ и разлика $d=2$. Според тоа, нивниот збир ќе биде:

$$S_n=\frac{n}{2}(n(n-1)+1+(n(n-1)-1)=n^3.$$

9. Да се најдат сите можности за запишување на бројот 1985 како збир од 1973 непарни природни броеви.

Забелешка: Распоредот на броевите во збирот не е битен; на пример $3+1$ и $1+3$ е една можност.

Решение. Нека $1985=a_1+a_2+...+a_{1973}$, каде што $a_1\geq a_2\geq a_3\geq ...\geq a_{1973}$ се непарни природни броеви. Лесно се докажува дека $a_7=a_8=...=a_{1973}$. Според тоа бараните можности се всушност можности за запишување на бројот 18 како збир од 6 непарни природни броеви. Бидејќи $4\cdot 5=20>18$ и $15+5>18$, се добива дека a_4,a_5,a_6 можат да бидат 1 или 3, а $3\leq a_1\leq 13$. Со комбинирање на броевите $1,3,5,7,9,11$ и 13 се добиваат бараните можности:

$3+3+3+3+3+3$, $5+3+3+3+3+1$, $5+5+3+3+1+1$

$5+5+5+1+1+1$, $7+3+3+3+1+1$, $7+5+3+1+1+1$

$7+7+1+1+1+1$, $9+3+3+1+1+1$, $9+5+1+1+1+1$,

$11+3+1+1+1+1$, $13+1+1+1+1+1$.

10. Нека A,B,C,D и E се пет точки, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи дека тие определуваат една, седум или десет рамнини.

Решение. Можни се следните случаи:

(i) Точките се компланарни, т.е. сите точки припаѓаат на една рамнина,

(ii) Четири од точките се компланарни, а петтата не припаѓа на рамнината определена со нив.

(iii) Кои било четири од дадените пет точки не се компланарни.

Во случајот (i) точките определуваат една рамнина.

Во случајот (ii), нека A,B,C,D се компланарни, т.е. $A,B,C,D\in\Sigma_1$ и $E\notin\Sigma_1$. Тогаш точките A,B,C,D,E ги определуваат рамнините

Σ_1; $\Sigma_2=ABE$, $\Sigma_3=ACE$, $\Sigma_4=ADE$, $\Sigma_5=BCE$, $\Sigma_6=BDE$ и $\Sigma_7=CDE$.

Потребно е да се докаже дека Σ_1 до Σ_7 се различни рамнини. Јасно е дека $\Sigma_1\neq\Sigma_i$, за секој $i=2,3,4,5,6,7$. Ќе докажеме дека $\Sigma_2\neq\Sigma_3$, а другите неедначности се докажуваат на ист начин. Бидејќи $\Sigma_1\neq\Sigma_2$ и $A,B\in\Sigma_1$ и $A,B\in\Sigma_2$, следува дека $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ е правата AB. Ако $\Sigma_2=\Sigma_3$, тогаш од $C\in\Sigma_3=\Sigma_2$ и $C\in\Sigma_1$ следува дека $C\in\Sigma_1\cap\Sigma_2=AB$, но тоа е спротивно со претпоставката A,B и C да не се колинеарни.

Во случајот (iii), која било тројка од точките определува една рамнина. Такви тројки има 10. Две различни тројки определуваат две различни рамнини, затоа што кои било четири од дадените пет точки се некомпланарни. Значи, во овој случај точките определуваат 10 рамнини.

11. На една кружница се нанесени 1993 точки при што една од нив е обоена црвено, а сите други сино. Дадените точки определуваат разни многуаголници, впишани во кружницата, при што ако едно од темињата на многуаголникот е црвената точка, многуаголникот е црвен, а ако сите темиња на многуаголникот се сини и многуаголникот е син. Дали постојат повеќе црвени или сини многуаголници и зошто? (При решавањето да не се земаат предвид многуаголниците кај кои што постои сечење на несоседни страни.)

Решение. Да разгледаме еден син многуаголник. Темињата на овој многуаголник заедно со црвеното теме определуваат црвен многуаголник. На овој начин на секој син n-аголник му придружуваме еден црвен $(n+1)$-аголник. При тоа, различни сини многуаголници определуваат различни црвени многуаголници, бидејќи добиените црвени многуаголници се разликуваат во своите сини темиња. Значи, постојат барем онолку црвени многуаголници колку што постојат сини. Од друга страна, црвените триаголници не соодветствуваат на наведениот начин на ниту еден син многуаголник, па значи, постојат повеќе црвени многуаголници отколку сини.

12. Нека n е природен број. Колку различни решенија $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ има неравенката $|x|+|y|\leq n$.

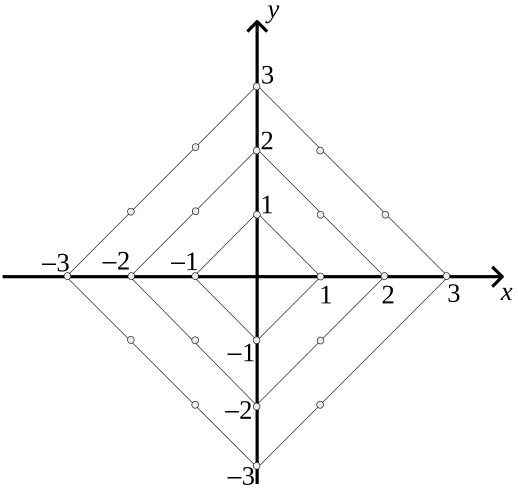
Решение. Графикот на функцијата $|x|+|y|=n$ е квадрат со темиња $(n,0)$, $(-n,0)$, $(0,n)$ и $(0,-n)$ (види цртеж). Да видиме колку целобројни решенија има ова равенка за конкретни вредности на n.

За $n=0$, таа има 1 решение.

За $n=1$ таа има 4 целобројни решенија.

За $n=2$ таа има 8 целобројни решенија.

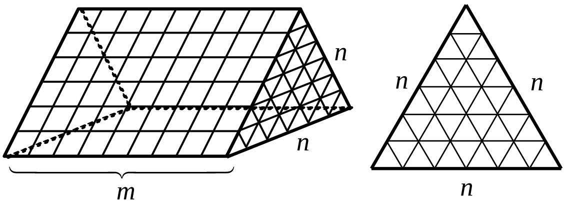
За $n=3$ таа има 12 целобројни решенија итн. Очигледно, за $n=k$ равенката $|x|+|y|=k$ има $4k$ целобројни решенија.



Од досега изнесеното е јасно дека бројот нацелобројни решенија на неравенката $|x|+|y|\leq n$ е еднаков на збирот на целобројните решенија на Равенките $|x|+|y|=k$, $k=1,2,3,...,n$ и истиот изнесува

$$1+4+8+12+...+4n=1+4(1+2+3+...+n)=1+4\frac{n(n+1)}{2}=1+2n+n^2 .$$

13. Правилна тристрана призма со основен раб n и бочен раб m (m и n се природни броеви) прво е обоена а потоа разделена на слични призми со основен раб и бочен раб со должини 1 (како на цртежот). Пресметај колку призми ќе останат на кои сите ѕидови им се необоени.



Решение. Во триаголникот со страна n има n^2 мали триаголници. Навистина, тргнувајќи од основата кон врвот има

$$n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

триаголници свртени со врвот кон внатрешноста и

$$(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

триаголници свртени со врвот на надвор. Според тоа, призмата е разделена на

$$p_{vk}=m\cdot[\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}]=m\cdot n^2$$

мали призми. Од сите мали призми, барем еден обоен ѕид ќе имаат оние што се наоѓаат на двете основи и на на бочните страни на призмата т.е.

$$p_{ob}=2n^2+(m-2)\cdot n+(m-2)(n-1)+(m-2)(n-2)=2n^2+(m-2)(3n-3)$$

Според тоа, бројот p на необоените призми е

$$p=p_{vk}-p_{ob}=(m-2)(n^2-3n+3).$$

4. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ КОНФИГУРАЦИИ

1. Реши ја равенката

а) $V_n^2=380$, б) $V_{2n+4}^3:V_{n+4}^4=2:3$

Решение. а) Од формулата (2) следува дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$n(n-1)=380,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решенија на квадратната равенка

$$n^2-n-380=0$$

се $n_1=20$ и $n_2=-19$. Но, $n\in\mathbb{N}$, па затоа решение на дадената равенка е само $n_1=20$.

б) Од формулата (2) следува дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2n+4)(2n+3)(2n+2):(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)=2:3,\ n\in\mathbb{N},$$

т.е. на равенката

$$n^2-5n-6=0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решенија на квадратната равенка $n^2-5n-6=0$ се $n_1=6$ и $n_2=-1$. Но, $n\in\mathbb{N}$, па затоа решение на дадената равенка е само $n_1=6$.

2. Реши ја равенката: $9V_n^3=5\overline{V}_n^3$.

Решение. Ако ги искористиме формулите (2) и (3) добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$9n(n-1)(n-2)=5n^3,\ n\in\mathbb{N},$$

т.е. на равенката

$$4n^2-27n+18=0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решенијата на равенката $4n^2-27n+18=0$ се $n_1=6$ и $n_2=\frac{3}{4}$ и како n е природен број добиваме дека решение на почетната равенка е $n_1=6$.

3. а) Докажи дека $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \in \mathbb{N}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

б) Пресметај ги n и k ако $C_n^k = 4$ и $V_n^k = 24$.

Решение. а) Нека $n \in \mathbb{N}$ и да разгледаме произволно множеството A со $2n$ елементи. Јасно, бројот на сите $n-$елементни подмножества на множеството A е природен број и ако ја искористиме формулата (7) добиваме

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = C_{2n}^n \in \mathbb{N}.$$

б) Од формулата (5) наоѓаме $P_k = \frac{V_n^k}{C_n^k} = \frac{24}{4} = 6$, што значи $6 = P_k = k!$ и како $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ добиваме дека $k = 3$. Понатаму,

$$24 = V_n^3 = n(n-1)(n-2)$$

и како бројот 24 како производ на три последователни природни броја може да се запише на единствен начин и тоа $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$, добиваме дека $n = 4$.

4. Колку трицифрени броеви, кај кои цифрите не се повторуваат, можат да се состават од цифрите $1, 2, 3, 4, 5$ и 7?

Решение. Очигледно, бидејќи сите цифри се различни од цифрата 0, за да го определиме бројот на трицифрените броеви, кај кои цифрите не се повторуваат и кои можат да се состават од цифрите $1, 2, 3, 4, 5$ и 7, треба да го најдеме бројот на варијациите без повторување од 6 елементи од класа 3 (зошто?). Ако ја искористиме формулата (2), за бараниот број добиваме

$$V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

5. Колку Морзеови знаци може да се формираат од двата елементарни знака $-$ и $\bullet$ ако еден знак се состои од најмногу четири елементарни знаци?

Решение. Имаме множество $A = \{-, \bullet\}$ од два елементи и можеме да формираме Морзеови знаци од $1, 2, 3$ и 4 елементарни знаци. Според тоа, елементарните знаци ќе бидат варијации со повторување од 2 елемента од класа $1, 2, 3$ и 4, соодветно. Значи, бројот на Морзеовите знаци кои во случајот можеме да ги формираме е:

$$\overline{V}_2^1 + \overline{V}_2^2 + \overline{V}_2^3 + \overline{V}_2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30.$$

6. Во јазикот на едно племе има само две букви. Познато е дека ниту еден збор од тој јазик не е почеток на друг збор. Дали може речникот на ова племе да има:

3 збора со четири букви,
10 збора со пет букви,
30 збора со шест букви и
5 збора со седум букви?

Решение. Ќе покажеме дека одговорот е „не“. Да земеме кои било пет збора со со должина 7. Од условот на задачата треба да имаме $30 \cdot 2^1 = 60$ збора со должина 6 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7. Од условот на задачата исто така се добива дека треба да имаме $10 \cdot 2^2 = 40$ збора со должина

5 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7 и треба да имаме $3\cdot 2^3=24$ зборови со должина 4 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7. Затоа, доколку одговорот на задачата е позитивен, тогаш постојат барем $5+60+40+24=129$ збора со должина7. Но ова е противречност бидејќи зборови со должина 7 има точно $128=2^7$.

7. Колку петцифрени броеви можат да се формираат од цифрите $1,3,5,7$ и 9?

Решение. Бидејќи секоја од цифрите $1,3,5,7$ и 9 е различна од 0, бројот на петцифрените броеви е еднаков на бројот на пермутациите од 5 елементи, т.е. тој е еднаков на $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$.

8. На колку начини можат да се распоредат броевите $1, 2, 3, ..., 2n-1, 2n$, така што секој парен број се наоѓа на непарно место?

Решение. Меѓу дадените броеви има n парни и n непарни броеви. Според тоа, треба да распоредиме n парни броеви на n непарни места, па затоа секое вакво распоредување е пермутација без повторување од n елементи и нивниот број $P_n=n!$. Понатаму, при секое распоредување на парните броеви на непарните места ни остануваат празни парните места, кои ги има n и на нив треба да распоредиме n непарни броеви, па затоа секое вакво распоредување е пермутација без повторување од n елементи и нивниот број $P_n=n!$. Конечно, бидејќи распоредувањето на парните и распоредувањето на непарните броеви не зависи едно од друго добиваме дека вкупниот број на распоредувања на броевите

$$1,2,3,...,2n-1,2n$$

така што секој парен број се наоѓа на непарно место е еднаков на

$$P_n\cdot P_n=n!\cdot n!=(n!)^2.$$

9. Колку пермутации без повторување од елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 почнуваат со:

а) 5, б) 123, в) 8642.

Решение. а) Бидејќи пермутациите треба да почнуваат со цифрата 5, секоја од бараните пермутации може да се добие ако останатите седум цифри произволно се распоредат на останатите седум места. Според тоа, бројот на бараните пермутации е еднаков на бројот на пермутациите од 7 елементи, т.е. тој е еднаков на $P_7=7!=5040$.

На потполно ист начин наоѓаме:

б) $P_5=5!=120$ и в) $P_4=4!=24$.

10. Во една паралелка има 35 ученици. На колку начини може да се избере нејзиното раководство кое брои 3 члена?

Решение. Јасно, секое раководство на паралелката е подмножество од множеството ученици, па затоа вкупниот број на начини на избори на раководството на паралелката е еднаков на бројот на комбинациите без повторување од 35 елементи од класа 3, т.е. тој е еднаков на $C_{35}^3=\frac{35\cdot34\cdot33}{3\cdot2\cdot1}=6545$.

11. Во еден сад се наоѓаат 7 топчиња означени со броевите од 1 до 7. На колку начини можат да се извлечат 5 топчиња, ако топчињата се влечат одеднаш и без гледање?

Решение. Имаме 7 топчиња и одеднаш без гледање влечеме 5. Очигледно станува збор за комбинации без повторување од 7 елементи од класа 5, па затоа тоа може да се направи на $C_7^5=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=21$ начини.

12. На колку начини може да се разместат 8 гости во три хотелски соби: еднокреветна, трикреветна и четирикреветна.

Решение. Сместувањето во еднокреветната соба да го означиме со a, во трикреветната со b и во четирикреветната со c. Според тоа, секое сместување определува подредена $8-$торка во која a се јавува еднаш, b се јавува трипати и c се јавува четири пати, на пример со (a,b,b,b,c,c,c,c) и обратно. Значи станува збор за пермутации од 8 елементи од тип $(1,3,4)$, па од теорема 9.23 следува дека бројот на сместувањата е еднаков на $P_8^{1,3,4}=\frac{8!}{1!3!4!}=280$.

13. Колку различни низи од букви може да се направат со разместување на буквите на зборот „*математика*“? (Низите не мора да имаат значење.)

Решение. Во зборот математика вкупно има 10 букви, при што буквата *м* се повторува двапати и $k_1=2$, буквата *а* се повторува трипати и $k_2=3$, буквата *т* се повторува двапати и $k_3=2$ пати, буквата *е* се повторува еднаш и $k_4=1$, буквата *и* се повторува еднаш и $k_5=1$ и буквата *к* се повторува еднаш и $k_6=1$. Затоа бројот на низите од букви кои можат да се направат од зборот „*математика*“ е еднаков на

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1}=\frac{10!}{3!2!2!1!1!1!}=151200.$$

14. Колку пермутации од елементите

$$1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4$$

почнуваат со:

а) 22, б) 313, в) 1234?

Решение. а) Имаме пермутации од 11 елементи од тип $(1,3,4,3)$ и како елементите 2 и 2 се фиксирани на првите две места, за да го определиме бараниот број на пермутации потребно е да го определиме бројот на пермутациите од 9 елементи од тип $(1,1,4,3)$ и тој е еднаков на

$$P_9^{1,1,4,3}=\frac{9!}{1!1!4!3!}=2520.$$

б) $P_8^{3,2,3}=\frac{8!}{3!2!3!}=560$ и в) $P_7^{2,3,2}=\frac{7!}{2!3!2!}=210$.

15. На колку различни начини, без да се користат загради, може да се запише $a^3b^2c^3$ како производ од 8 множители?

Решение. Очигледно станува збор за пермутации од 8 елементи од тип $(3,2,3)$, па затоа бараниот број на запишувања е $P_8^{3,2,3}=\frac{8!}{3!2!3!}=560$.

16. На колку начини може да се изберат три од дванаесетте букви

$$a,a,a,t,t,t,g,g,g,c,c,c\,?$$

Решение. Во случајов имаме множество $A=\{a,t,g,c\}$ со четири елементи. Според условот на задачата, секој елемент на множеството A може да биде избран најмногу три пати, па затоа бројот на начините на избор на три од наведените дванаесет букви е еднаков на бројот на комбинациите со повторување од 4 елементи од класа 3, т.е. е еднаков на

$$\overline{C}_4^3=C_{4+3-1}^3=C_6^3=\tfrac{6!}{3!3!}=20\,.$$

17. Колку елементи се потребни за да се добијат 276 комбинации од втора класа со повторување?

Решение. Од условот на задачата ја добиваме равенката $\overline{C}_n^2=276$, која е еквивалентна на равенката $C_{n+2-1}^2=276$, т.е. на равенката

$$\tfrac{n(n+1)}{2}=276,\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Решенијата на равенката $\frac{n(n+1)}{2}=276$ се $n_1=23$ и $n_2=-24$ и како $n\in\mathbb{N}$ добиваме дека за да се добијат 276 комбинации од втора класа со повторување се потребни 23 елементи.

18. Нека е $\{p_1,p_2,...,p_n\}$ произволна пермутација на множеството $\{1,2,...,n\}$. Ако n е непарен број, докажи дека производот

$$(p_1-1)(p_2-2)...(p_n-n)$$

е парен број.

Решение. Доволно е да се докаже дека за некој $k\in\{1,2,3,...,n\}$ бројот p_k-k е парен. Ќе претпоставиме спротивно, т.е. дека за секој $k\in\{1,2,3,...,n\}$ бројот p_k-k е непарен број. Бидејќи n е непарен број, бројот

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k-k)=\sum_{k=1}^{n}p_k-\sum_{k=1}^{n}k=0$$

треба да е непарен, што е противречност.

19. На колку начини може кралот на шаховската табла 8×8 да стигне од долниот лев агол до горниот десен агол движејќи се само десно и напред?

Решение. За да стигне кралот од долниот лев агол до горниот десен агол треба да се движи седум пати десно и седум пати напред. Движењето десно да го означиме со Д, а движењето напред со П. Задачата се сведува на следното: на колку начини може да се распоредат седум букви Д и седум букви П. Значи се работи за пермутации од 14 елементи од кои 7 се повторуваат и другите седум се повторуваат. Тој број изнесува $\frac{14!}{7!7!}=3432$.

20. Нека се $a_1,a_2,...,a_n$ ненегативни цели броеви. Докажи дека

$$a_1!a_2!...a_n!\le(a_1+a_2+...+a_n)!\,.$$

Решение. Бројот на пермутациите од $a_1+a_2+...+a_n$ елементи од тип $(a_1,a_2,...,a_n)$ е поголем или еднаков на еден. Според тоа, точно е неравенството $\frac{(a_1+a_2+...+a_n)!}{a_1!a_2!...a_n!}\geq 1$, кое е еквивалентно со бараното неравенство.

21. Колку нули има во записите на броевите $1,2,3,...,10^9$.

Решение. k-цифрени броеви има $10^k-10^{k-1}=9\cdot 10^{k-1}$. Во нивниот запис има $9k\cdot 10^{k-1}$ цифри. Бројот на нулите во записите на сите k-цифрени броеви е еднаков на $(9k\cdot 10^{k-1}-9\cdot 10^{k-1})/10=9(k-1)\cdot 10^{k-2}$. Според тоа, бројот на нулите во записите на броевите $1,2,3,...,10^9$ е

$$\sum_{k=1}^{9} 9(k-1)\cdot 10^{k-2}+9, \text{ (зошто?)}.$$

22. Дадени се $3n+1$ предмети, така да n од овие предмети не се разликуваат меѓу себе, а сите останати предмети се разликуваат и меѓу себе и од првите n предмети. На колку начини можат да се изберат n предмети?

Решение. Бројот на изборите на n предмети, кај кои се избрани точно k од множеството од n исти предмети, е еднаков на $\binom{2n+1}{n-k}$. Значи, бројот на сите избори на n предмети е:

$$\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n-1}+...+\binom{2n+1}{0}=\frac{1}{2}[\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+...+\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n}+...+\binom{2n+1}{2n+1}]$$

$$=\frac{1}{2}(1+1)^{2n+1}=2^{2n}.$$

23. Во сенатот има 30 сенатори. Секој од сенаторите е скаран со точно шест други сенатори. На колку начини може да биде формирана трочлена комисија така да секои два члена на комисијата се скарани меѓу себе или никои два члена на комисијата не се скарани.

Решение. Нека x е бројот на трочлените комисии за кои важи условот на задачата (таквите комисии ќе ги нарекуваме добри), а y е бројот на трочлените комисии за кои условот не важи. Тогаш

$$x+y=\binom{30}{3}=4060.$$

Да претпоставиме дека секој сенатор прави список од сите комисии чиј член е, но така што тој е скаран со секој од останатите два члена или не е скаран со ниту еден од останатите два члена. Тогаш, секој таков список содржи $\binom{23}{2}+\binom{6}{2}=268$ комисии. Според тоа, секоја добра комисија ќе биде запишана точно во три списоци, а секој комисија која не е добра ќе биде запишана само во еден од тие списоци. Затоа важи

$$3x+y=30\cdot 268=8040.$$

Така, го добивме системот

$$\begin{cases} x+y=4060 \\ 3x+y=8040 \end{cases}$$

од каде наоѓаме $x = 1990$.

24. На колку начини n особи можат да застанат во редица, а притоа две фиксирани лица да не бидат една до друга?

Решение. Нека се воочени лицата a и b. Прво ќе го определиме бројот на распоредите (пермутациите) во кои лицата a и b се една до друга. Во овој случај постојат две можности: лицето a да е лево од лицето b и лицето a да е десно од лицето b. Во двата случаи бројот на пермутациите е $(n-1)!$, бидејќи парот од двете лица може да се смета како еден елемент во пермутација од $n-1$ елементи. Според тоа, вкупниот број пермутации во кои лицата a и b се една до друга е $2(n-1)!$. Конечно, бараниот број распоредувања е

$$n! - 2(n-1)! = n \bullet (n-1)! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2).$$

25. На колку начини може да се потполни правоаголна таблица со m редици и n колони (вкупно mn полиња) со броевите $+1$ и -1 така што производот на броевите во секој ред и секоја колона да биде еднаков на 1?

Решение. Сите таблици кои го имаат саканото својство можат да се состават на следниов начин. Во сите полиња со исклучок на последниот ред и последната колона на произволен начин ќе ги запишеме броевите $+1$ и -1. Јасно, тоа може да се направи на $2^{(m-1)(n-1)}$ начини. Сега со p да го означиме производот на сите запишани броеви. Понатаму, во секој од првите $m-1$ редови, во пресекот со $n-$тата колона ќе запишеме $+1$ или -1 така да производот во секој ред да биде еднаков на 1. Сега во пресекот на секоја од првите $n-1$ колона со $m-$от ред ќе запишеме $+1$ или -1 така да производот на броевите во секоја колона да биде еднаков на 1. Нека b е производот на броевите запишани во $m-$тата редица и a е производот на броевите запишани во $n-$тата колона.

Бидејќи $pa = 1$ и $pb = 1$ добиваме $p^2ab = 1$, т.е. $ab = 1$. Значи, броевите a и b се со ист знак, па затоа ако во пресекот на $m-$тата редица и $n-$тата колона го запишеме бројот $a = b$, добиваме дека вака конструираната таблица ги има саканите својства. Според тоа, имаме $2^{(m-1)(n-1)}$ таблици со саканите својства.

26. Најди го бројот на подмножествата на множеството $\{1, 2, ..., 2n\}$ во кои равенката $x + y = 2n+1$ нема решение?

Решение. Елементите на множеството $\{1, 2, ..., 2n\}$ ќе ги поделиме на n парови, така што збирот на броевите во секој пар е $2n+1$. При формирањето на подмножествата во кои равенката $x + y = 2n+1$ нема решение, за секој од овие парови постојат три можности: ниеден не е во подмножеството, само помалиот е во подмножеството и само поголемиот е во подмножеството. Според тоа, бараниот број е 3^n.

27. Најди го бројот на пермутациите на цифрите $1, 2, ..., 9$ такви што единицата не е на првото место, двојката не е на првите две места и тројката не е на првите три места.

Решение. Тројката може да се стави на едно од последните 6 места, двојката на едно од последните 7 места на кои не е тројката (6 можности) и единицата на едно од последните 8 места на кои не е ниту двојката ниту тројката (6 можности). Останатите 6 цифри се распоредуваат на 6 слободни места. Значи, бројот на бараните пермутации е $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6!=155520$.

28. Најди го збирот на сите четирицифрени броеви коишто се добиваат од цифрите 1, 2, 3 и 4, при што цифрите не се повторуваат.

Решение. Од начинот на формирањето на четирицифрените броеви воочуваме дека станува збор за пермутации без повторување и нивниот вкупен број е $4!=24$. На прво место, односно второ, трето, четврто место во четирицифрените броеви, цифрата 1 се јавува $3!=6$ пати. Истото се однесува и за цифрите 2, 3 и 4. Имајќи го предвид ова, за збирот S имаме:

$$S=6\cdot 1000(1+2+3+4)+6\cdot 100(1+2+3+4)+6\cdot 10(1+2+3+4)=66660\,.$$

29. На колку различни начини можат да се распоредат n-жени и n-мажи така што било било кои два соседи да не бидат од ист пол и тоа:

а) во една редица,

б) на еден рингишпил кој има $2n$ седишта.

Решение. Нека со $a_1,a_2,...,a_n$ ги означиме жените, а со $b_1,b_2,...,b_n$ мажите.

а) Ги разгледуваме низите од облик $a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_n,b_n$ (кога жена е на прво место). За еден фиксен распоред на $a_1,a_2,...,a_n$ се добиваат $n!$ распореди на $b_1,b_2,...,b_n$. Значи, има $n!n!=(n!)^2$ распореди од ваков облик. Исто толку распореди има од облик $b_1,a_1,b_2,a_2,...,,b_n,a_n$ (кога маж е на прво место). Значи, вкупниот број на вакви распореди е $2(n!)^2$.

б) Да фиксираме еден елемент од множеството $b_1,b_2,...,b_n$. Преостанатите елементи од ова множество може да се распоредат на $(n-1)!$ нажини. При секој ваков распоред $a_1,a_2,...,a_n$ може да се распоредат на $n!$ начини. Значи, бараниот број на распореди е $(n-1)!n!$.

30. На колку различни начини може да бидат наредени n книги на една полица, така што однапред нумерирани k од тие книги се во растечки или опаѓачки редослед.

Решение. Секој избор на местата на кои се наоѓаат нумерираните книги е комбинација на n елементи од класа k без повторување. Бројот на такви комбинации е $A=\binom{n}{k}$. Во секој од A-те избори на местата за нумерираните книги, преостанатите $n-k$ книги се разместуваат произволно, со што се добиваат $(n-k)!$ начини на редење на книгите. Нумерираните книги можат да бидат наредени само на два начини, т.е. во опаѓачки или растечки редослед.

Според тоа, бараниот број на начини на редење на книгите е: $2A(n-k)!=2\frac{n!}{k!}$.

31. Колку природни броеви меѓу 1000 и 3000 може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 ако:

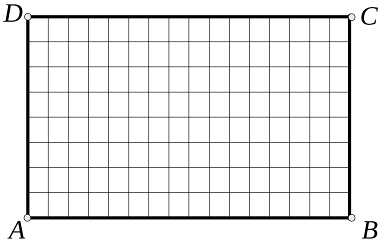
а) е дозволено повторување на цифрите;
б) не е дозволено повторување на цифрите?

Решение. Според условот на задачата, треба да се најде бројот на сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$, каде што $a=1$ или $a=2$, $a,b,c,d\in\{1,2,3,4,5\}$, т.е. доволно е да го најдеме бројот на сите трицифрени броеви $\overline{bcd}$, каде што $b,c,d\in\{1,2,3,4,5\}$ во двата случаја.

а) Бројот на сите трицифрени броеви од цифрите $1,2,3,4,5$ каде што е дозволено повторување на цифрите, се совпаѓа со бројот $\bar{V}_5^3$ од сите варијации со повторување од класа 3 над множество од 5 елементи. Тој број е $\bar{V}_5^3=5^3$, па постојат точно $2\cdot5^3=250$ природни броеви со бараното својство.

б) Ако не е дозволено повторување на цифрите, тогаш бројот на сите трицифрени броеви од цифрите $2,3,4,5$ ($1,3,4,5$) е еднаков на $\binom{4}{3}3!=4!$. Значи, бараниот број е $2\cdot4!=48$.

32. Правоаголник $ABCD$ е пресечен со m прави паралелни со страната AB и m прави паралелни со страната BC. Најди го бројот на добиените правоаголници.



Решение. Хоризонтални прави заедно со AB и CD има $m+2$, исто колку и вертикални прави. Секои две хоризонтални прави определуваат еден правоаголник, па бројот на така добиените правоаголници е $\binom{m+2}{2}$. Бројот на правоаголниците определени од вертикалните прави е исто така $\binom{m+2}{2}$. Значи вкупниот број на правоаголници е

$$\binom{m+2}{2}^2=\frac{(m+2)^2(m+1)^2}{4}.$$

33. За даден број ќе велиме дека е „шарен“ ако е запишан со еднаков број парни и непарни цифри. Определи го бројот на сите четирицифрени „шарени“ броеви запишани со различни цифри?

Решение. Имаме 5 парни цифри 0, 2, 4, 6 и 8; а 5 непарни цифри 1, 3, 5, 7 и 9. Два парни броја од 5 можеме да избереме на $C_5^2=10$ начини. На исто толку начини може да се изберат два од 5-те непарни цифри.

За секои два пара (еден пар парни и еден пар непарни броеви) постојат вкупно $4!=24$ начини за формирање на низа од четири цифри. Па вкупно имаме $10\cdot10\cdot24=2400$ четирицифрени низи, кои се состојат од две парни и две непарни цифри.

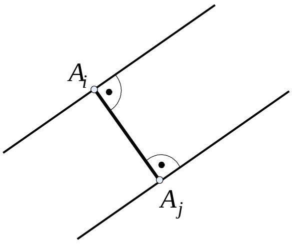
Останува да ги преброиме оние каде на прво место се наоѓа 0. Ако во некој пар составен од парни броеви се наоѓа 0 тогаш бројот на четирицифрени броеви кои започнуваат со 0 е $3!=6$. Бидејќи имаме четири парни пара, во кои се наоѓа 0, следува дека бројот на сите „шарени“ четирицифрени низи кои започнуваат со 0 е $4\cdot10\cdot6=240$.

Според тоа бројот на сите четирицифрени „шарени“ броеви запишани со различни цифри е $2400-240=2160$.

34. Дадени се 2010 точки во рамнина така што секои три од нив формираат тапоаголен триаголник.

Докажи дека може да се додаде уште една точка така што повторно секои три од добиените 2011 точки формираат тапоаголен триаголник.

Решение. Од тие точки можеме да формираме $\binom{2010}{2}$ ленти (види цртеж). За дадени две точки од дадените повлекуваме две прави кои минуваат низ крајните точки на отсечката формирана со нив, и се нормални на таа отсечка. Бидејќи бројот на точки е конечен, тие ленти не ја покриваат целата рамнина. Ако избереме точка надвор од унијата на $\binom{2010}{2}$-те ленти, таа ќе ги задоволува наведените услови.



35. Дадени се $n\geq 5$ рамнини, такви што било кои три имаат точно една заедничка точка и не постојат четири рамнини кои минуваат низ една точка. Докажи дека помеѓу деловите на кои е просторот разделен со дадените рамнини има барем $\frac{2n-3}{4}$ тетраедри.

Решение. Секој дел од просторот заграден со рамнини од дадените n рамнини, а кој не е пресечен со рамнина од преостанатите рамнини го нарекуваме клетка на поделбата. Според условите од задачата било кои четири рамнини од дадените n рамнини определуваат единствен тетраедар. Бројот на тетраедри определени со овие n рамнини е еднаков на $\binom{n}{4}$. Ако секој од овие тетредри е делбена клетка на просторот, тогаш задачата е решена, бидејќи за $n\geq 5$ важи $\binom{n}{4}>\frac{2n}{4}$. Меѓутоа може да се случи некој од овие тетраедри определен со четири рамнини, петта рамнина да го дели на два дела при што и двата дела да не се тетредри, а да се делбени клетки на простор (нацртај цртеж).

Единствената заедничка точка на три рамнини избрани од дадените n рамнини ќе ја нарекуваме врв. За секоја рамнина α од дадените n рамнини ќе го разгледаме врвот A кој е најмало растојание до неа. Таквиот врв е определен со три рамнини кои заедно со дадена рамнина α определуваат тетраедар $ABCD$ ($B,C,D\in\alpha$).

Ако некоја рамнина β различна од дадените четири рамнини го сече тетраедарот $ABCD$, тогаш тоа сече некое од ребрата AB, AC, AD со што би добиле врв S кој е поблиску до α од врвот A. Тоа е во спротивност со изборот на точката A. Значи, таква рамнина β не постои. Според тоа $ABCD$ е делбена клетка.

Рамнината α го дели просторот на два полупростори. Ако точката A припаѓа на еден од полупросторите, тогаш постои точка W која е врв и е на најмало растојание од сите врвови кои се наоѓаат во полупросторот во кој не лежи A. Трите рамнини кои го определуваат W заедно со рамнината α определуваат тетраедар $WXYZ$ кој не го сече ниту една од преостанатите рамнини. Според тоа и тој тетраедар е делбена клетка.

Ако се случи во некој од полупросторите определен со рамнина од дадените n -рамнини да нема врв, тогаш таа рамнина ќе ја нарекуваме крајна

Не е можно да има повеќе од три крајни рамнини. Ако има четири крајни рамнини, тогаш тие определуваат единствен тетраедар кој ќе го наречеме “краен”. Било која друга рамнина од n -те рамнини различна од четирите крајни рамнини, не може сите шест ребра на “крајниот” тетраедар да ги пресече во точки кои ќе лежат на иста страна од крајните рамнини како и најблискиот врв до неа. Според тоа, барем една од крајните рамнини нема да е крајна. Значи, може да има најмногу три крајни рамнини.

Значи, секоја рамнина генерира два тетраедри кои се клетки на просторот, освен трите крајни рамнини кои генерираат по еден. Секој од нив го броиме по четири пати (за секоја рамнина која го определува по еднаш). Според тоа, бројот на тетраедри е еднаков на $\frac{2n-3}{4}$.

36. Колку разместувања на броевите 0,1,...,9 постојат така што првата цифра е поголема од 8, а последната е помала од 8.

Решение. Нека означиме

A - „множеството броеви со прва цифра 0 или 1“,

B - „множеството броеви со последна цифра 8 или 9“.

Треба да определиме $|(A\cup B)^c|$. Лесно се добива дека

$$|A|=2\cdot 9!,\ |B|=2\cdot 9!\ \text{и}\ |A\cap B|=2\cdot 2\cdot 8!.$$

Па од принципот на вклучување имаме

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=4\cdot 9!-4\cdot 8!,$$

и бидејќи вкупно имаме $10!$ разместувања добиваме дека

$$|(A\cup B)^c|=10!-4\cdot 9!+4\cdot 8!=8!(90-36+4)=58\cdot 8!\,.\,5^6$$

37. Колку шестцифрени броеви чии цифри имаат иста парност?

Решение. Шестцифрени броеви кои се запишуваат со непарни цифри има $\overline{V}_5^6=5^6$, додека шестцифрени низи кои се запишуваат со парни цифри има , но оние кои започнуваат со 0 се 5^5. Па значи имаме $5^6-5^5=4\cdot 5^5$ шестцифрени броеви кои се запишуваат со парни цифри.

Значи, бројот на шестцифрени броеви чии цифри се со иста парност е ч

$$5^6+4\cdot 5^5=9\cdot 5^5=28125.$$

38. Да се определи збирот на сите 6-цифрени броеви, чии формирани од цифрите $4,5,5,6,6,6$.

Решение. Бројот на 6-цифрени броеви формирани од овие цифри е $\frac{6!}{2!\cdot 3!}=60$. Цифрата 4 на прво место се јавува во $\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ броеви, аналогно 4 се наоѓа на секое место по 10 пати. Цифрата 5 се наоѓа на секое од местата по $\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!}=20$ пати. Цифрата 6 се јавува на секое место по $\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$ пати.

Според ова бараниот збир е

$$10^5(4\cdot 10+20\cdot 5+30\cdot 6)+...+10^0(4\cdot 10+20\cdot 5+30\cdot 6)=320\cdot 111111.$$

39. Колку n -цифрени записи во кои учествуваат цифрите 0, 1 и 2 постојат, така што цифрите 0, 1 и 2 се јавуваат барем по еднаш.

Решение. Нека означиме

A_0 - „множеството на сите записи во кои не учествува цифрата 0“,

A_1 - „множеството на сите записи во кои не учествува цифрата 1“,

A_2 - „множеството на сите записи во кои не учествува цифрата 2“.

Тогаш бројот на записи во кои секоја од цифрите 0, 1 и 2 се јавува барем еднаш е $|(A_0 \cup A_1 \cup A_2)^c|$. Имаме

$$|A_0|=|A_1|=|A_2|=2^n\,,\ |A_0 \cap A_1|=|A_0 \cap A_2|=|A_1 \cap A_2|=1 \text{ и } |A_0 \cap A_1 \cap A_2|=0$$

па следува дека

$$|A_0 \cup A_1 \cup A_2|=3\cdot 2^n-3+0=3\cdot 2^n-3\,,$$

и бидејќи вкупно имаме 3^n записи добиваме дека бараниот број е

$$|(A_0 \cup A_1 \cup A_2)^c|=3^n-3\cdot 2^n+3\,.$$

40. Адресирани се 8 пликоа и исто толку писма. А потоа писмата се сместуваат во пликоата. Колку разместувања на писмата постојат:

а) ниту едно.

б) најмалку едно.

в) најмалку две писма се наоѓаат во своите пликоа.

Решение. Нека за означиме A_i -”множеството разместувања така што i -тото писмо се наоѓа во своето плико “.

Тогаш важат

$$|A_{i_1}|=7!\,,\ |A_{i_1} \cap A_{i_2}|=6!\,,\ ...,\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_8}|=0!\,.\ i=1,2,...,8$$

а) Треба да се пресмета $|(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)^c|$. Од принципот на вклучување имаме

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_8|=\binom{8}{1}\cdot 7!-\binom{8}{2}\cdot 6!+\binom{8}{3}\cdot 5!-\binom{8}{4}\cdot 4!+\binom{8}{5}\cdot 3!-\binom{8}{6}\cdot 2!+\binom{8}{7}\cdot 1!-\binom{8}{8}\cdot 0!=25487$$

од каде следува дека бараниот број е

$$|A|=|(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)^c|=8!-25487=14833\,.$$

б) Нека B -„множеството разместувања така што најмалку едно писмо се наоѓа во своето плико“ тогаш јасно $|B|=|A^c|=8!-14833=25487$.

в) Нека C -„е множеството разместувања така што најмалку две писма се наоѓаат во своите пликоа“ и нека D -”множеството на сите разместувања така што точно едно се наоѓа во своето плико”.

Тогаш

$$|D|=8\cdot(7!-\binom{7}{1}\cdot 6!+\binom{7}{2}\cdot 5!-\binom{7}{3}\cdot 4!+\binom{7}{4}\cdot 3!-\binom{7}{5}\cdot 2!+\binom{7}{6}\cdot 1!-\binom{7}{7}\cdot 0!)=14832$$

од каде следува дека

$$|C|=8!-(|A|+|D|)=40320-(14833+14832)=10655\,.$$

41. Секоја страна на триаголникот ABC е разделена на 8 еднакви дела. Колку триаголници со темиња во дадените делбени точки (A,B,C неможат да бидат темиња на триаголник) постојат, така што ниедна страна на триаголниците не е паралелна со страните на триаголниккот ABC .

Решение. Нека со N_a го означиме бројот на триаголници, кај кои една од старните на триаголниците е паралелна со страната $a=BC$ на триаголникот ABC .

Аналогно дефинираме N_b, N_c, $N_{a,b}$, $N_{a,c}$, $N_{b,c}$ и N_{abc}.

Нека N е бројот на сите триаголници со темиња во дадените точки. Тогаш имаме

$$N=6^3,\ N_a=N_b=N_c=6^2,\ N_{a,b}=N_{a,c}=N_{b,c}=6 \text{ и } N_{abc}=1.$$

Сега од принципот на вклучување бројот на триаголници со барем една страна паралелна со страните на триаголникот е $3\cdot 6^2-3\cdot 6+1=91$, па бараниот број на триаголниви е $6^3-91=125$.

42. Бројот на решенија на равенката $x_1+x_2+...+x_k=n$ во множеството природни броеви е C_{n-1}^{k-1}.

Решение. Да разгледаме n единици наредени во ред, при што распоредуваме $k-1$ знаци “+” меѓу $k-1$ парови единици.

Ова разместување на знаците “+” може да се направи на C_{n-1}^{k-1} начини при што секоја ваква можност ги распоредува единиците во k непразни подмножества.

Нека бројот на единиците во секое од овие подмножества е m_1, m_2,..., m_k (јасно $m_i>0$ за секој $i=1,2,...,k$). Тогаш $x_i=m_i$, $i=1,2,...,k$ е решение на почетната равенка и сите решенија може да се добијат на овој начин.

Со ова тврдењето е докажано.

43. Бројот на решенија на равенката

$$x_1+x_2+...+x_k=n \tag{1}$$

во множеството ненегативни цели броеви ($\mathbb{N}_0$) е C_{n+k-1}^{k-1}, т.е. C_{n+k-1}^{n}.

Решение. Ставаме смени $x_i=y_i-1$, $i=1,2,...,k$. Тогаш равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$y_1+y_2+...+y_k=n+k \tag{2}$$,

при што јасно за секој $i=1,2,...,k$ важи $y_i=x_i+1\geq 1$ т.е. броевите y_i се природни броеви за секој $i=1,2,...,k$.

Бидејќи на секое решение $(x_1,x_2,...,x_k)$ на равенката (1) му одговара единствено решение $(y_1,y_2,...,y_k)$ на равенката (2) и обратно добиваме дека бројот на решенија на равенката (1) во множеството ненегативни цели броеви е еднаков на бројот на решенија на равенката (2) во множеството природни броеви кој според задача 42 е еднаков на $C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k-1}^{n}$.

44. Колку природни броеви има меѓу 100 и 1000000 кои имаат збир на цифри еднаков на 5.

Решение. Јасно бројот може да биде троцифрен, четирицифрен, петцифрен и шестцифрен.

Ако бараниот број е трицифрен т.е. $\overline{x_1x_2x_3}$, треба да го определиме бројот на решенија на равенката $x_1+x_2+x_3=5$ во множеството ненегативни цели броеви при што $x_1>0$.

Ставаме $x_1=y_1$, $x_2=y_2-1$, $x_3=y_3-1$ тогаш дадената равенка е еквивалентна со равенката $y_1+y_2+y_3=7$ и јасно $y_1,y_2,y_3\in\mathbb{N}$.

Бројот на решенија на последнава равенка е $C_6^2=15$.

Аналогно се добива дека бројот на четирицифрени броеви со збир на цифри еднаков на 5 се $C_7^3=35$ на број, петцифрени има $C_8^4=70$ и шестцифрени се $C_9^5=126$ на број.

Според ова бараниот број е $15+35+70+126=246$.

45. На воениот совет на индијанските племиња учествувале поглавиците на Команчите, Сијуксите, Кајовите, Чеените, Шошоните и Апачите, и уште двајца воини на Апачите. Сите присутни биле рамноправни и зборувале само по еднаш, еден по еден, во произволен редослед, при што ниту еден од воините на Апачите не можел даземе збор пред својот поглавица. На колку различни начини може да се одвива разговорот меѓу нив.

Решение. Ако поглавицата на Апачите прв земе збор, тогаш воините на Апачите збор може да земат на $2\binom{7}{2}$ начини. Ако пак поглавицата на Апачите втор земе збор, тогаш воините на Апачите збор може да земат на $2\binom{6}{2}$ начини. Општо, ако поглавицата на Апачитеземе збор k-ти по ред, тогаш воините на Апачите може да земат збор на $2\binom{8-k}{2}$ начини. Значи, поглавицата на Апачите и воините на Апачите збор може да земат на

$$2(\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2})$$

начини. За секој начин на земање на збор на Апачите, останатите поглавици збор може да земат на $5!$ начини.

Значи, на воениот совет присутните збор може да земат на

$$2(\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2})5!=13440$$

начини.

46. На еден шаховски турнир учествувале само мајстори и велемајстори. Секои два учесници меѓусебно одиграле по точно една партија Ако секој учесник на турнирот точно половина од своите поени ги освоил во партиите со мајсторите, докажи дека бројот на учесници на турнирот е полн квадрат.

Решение. Нека бројот на велемајстори е v а бројот на мајстори е m. Нека велемајсторите во игра со мајсторите освоиле a поени а мајсторите во игра против против велемајсторите освоиле b поени.

Мајсторите и велемајсторите меѓусебно одиграле mv партии и во тие партии се освоиле и толку поени. Тогаш $a+b=mv$. Но бројот на поени кои ги освоиле велемајсторите во игри против мајсторите е еднаков на бројот на поени кои велемајсторите ги освоиле меѓу себе. Според тоа

$$a=\frac{v(v-1)}{2}.$$

Бројот на поени кои мајсторите ги освоиле против велемајсторите е еднаков на бројот на поени кои тие го освоиле меѓу себе, т.е.

$$b=\frac{m(m-1)}{2}.$$

Значи,

$$\frac{v(v-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}=mv$$

$$m+v=(v-m)^2,$$

т.е. бројот на учесниците е полн квадрат.

47. Триангулација на конвексен многуаголник е разделување на многуаголникот на триаголници со повлекување на негови дијагонали кои не се сечат во негова внатрешна точка.

Определи го бројот на триангулации на конвексен n-аголник, така што секој делбен триаголник има заедничка страна со n-аголникот.

Решение. Нека дадениот многуаголник е $A_1A_2...A_n$, $n\geq 3$. Ќе ги разгледаме триангулациите кои за свој делбен триаголник го имаат триаголникот $A_1A_2A_t$. Притоа имаме два случаи.

Случај 1. $t\neq 3$ и $t\neq n$. Со други зборови A_t не е соседна точка со A_1 и A_2. Бидејќи секој триаголник од триангулацијата има заедничка страна со многуаголникот, во многуаголникот $A_sA_{s+1}...A_r$ е повлечена една од дијагоналите A_sA_{r+1} или $A_{s+1}A_r$. Оттука следува дека бројот на триангулации кои ги исполнуваат условите од задачата а во кои $A_1A_2A_t$ е еден делбен триаголник е еднаков на $2^{t-4}2^{n-t-1}=2^{n-5}$. Но за t имаме $n-4$ можности, па според тоа бројот на сите триангулации во овој случај е еднаков на $(n-4)2^{n-5}$.

Случај 2. $t=n$ или $t=3$. Аналогно на првиот случај добиваме дека бројот на триангулации во овој случај е 2^{n-3}.

Конечно, бараниот број е

$$(n-4)2^{n-5}+2^{n-3}=n2^{n-5}.$$

48. На едно купче имало N алки. Мирјана даденото купче го разделила на две купчиња, ги пребројала алките во секое од двете купчиња, добиените броеви ги помножила и добиениот производ го запишала на табла. Од двете добиени купчиња избрала едно и ја повторила претходната постапка, при што бројот што го добила исто така го запишала на табла. Од трите добиени купчиња повторно избрала едно и ја повторила постапката во претходните два чекори итн. На крај добила N купчиња со по една алка.

Сите добиени производи што ги запишала на табла ги собрала и го добила бројот S. Колку е S?

Решение. Секои две алки ќе ги поврземе со по една врвка. Секогаш кога разбиваме едно купче на две нови купчиња, мораме да ги пресечеме сите врвки што ги поврзуваат алките од едното со алките од другото делбено купче. На пример, ако разделуваме купче со $m+k$ алки на купчиња со m и k алки, тогаш треба да пресечеме mk врски, а тоа е бројот кој треба да го запишеме на табла.

За да се раздели купчето со N алки со купчиња од по една алка, треба да се пресечат сите врвки, а збирот S е еднаков на бројот на сите врвки. Значи, тој број е $S=\frac{N(N-1)}{2}$.

49. Докажи дека од кои било 10 двоцифрени броеви секогаш може да избереме две дисјунктни подмножества броеви чии суми на елементи се еднакви.

Решение. Од 10-елементно множество можеме да формираме $2^{10}=1024$ подмножества.

Збирот на броевите во било кое подмножество не е поголем од $10\cdot 99=990$. Според принципот на Дирихле следува дека постојат две подмножества S_1 и S_2 чии суми на елементи се еднакви.

Ако $S_1\cap S_2=\varnothing$, задачата е решена.

Ако пак $S_1\cap S_2\neq\varnothing$, тогаш ги отстрануваме нивните заеднички елементи и пак добиваме две дисјунктни подмножества, чии суми на елементи се еднакви.

50. Дадени се 8 различни природни броеви, сите помали од 16. Докажи дека меѓу позитивните разлики на секои два од нив, постојат барем 3 меѓусебно еднакви.

Решение. Нека броевите се $a_1,a_2,...,a_8$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $1\leq a_1<a_2<...<a_8<16$. Вкупниот број позитивни разлики што ги даваат овие броеви е $\binom{8}{2}=28$, додека од $1\leq a_i<a_j<16$ следува дека $1\leq a_j-a_i\leq 14$, односно a_j-a_i може да прими најмногу 14 различни вредности **.** Бидејќи 28 разлики примаат вредности од множество со 14 елементи и бидејќи неможе да се случи две разлики да се 14 ($a_j-a_i=14$ ако и само ако $a_j=15$, $a_i=1$), од принципот на Дирихле следува дека најмалку 3 разлики се еднакви меѓусебе.

51. Точките со целобројни координати во рамнината се означени со еден од броевите $1,2,...,n$. Докажи дека постои правоаголник чии темиња се означени со ист број.

Решение. Нека

$$S=\{(i,j)\,|\,i=0,1,2,...,n^{n+1},\ j=0,1,2,...,n\}.$$

Секоја од правите $x=i$, каде $i\in\{0,1,2,...,n^{n+1}\}$, содржи ($n+1$)-на точка од S. Бројот на такви прави кои имаат заеднички точки со S е $n^{n+1}+1$.

На секоја точка од S, што припаѓа на правата $x=i$ и е придружен еден од броевите од множеството $\{1,2,3,...,n\}$. Бидејќи има ($n+1$)-на точка и n броеви за ознака, добиваме дека тие можат да се означат на

$$V_n^{n+1}=n^{n+1}$$

начин . Бидејќи има $n^{n+1}+1$ права, според принципот на Дирихле има две прави $x=i<j=x$ кои се означени на ист начин. Со други зборови, точките од правата $x=i$:

$$(i,0)\,,\qquad (i,1)\,,\qquad (i,2)\,,\ldots,\qquad (i,n)$$

и точките од правата $x=j$, а што се во S ,

$$(j,0)\,,\qquad (j,1)\,,\qquad (j,2)\,,\ldots,\qquad (j,n)$$

се означени со броевите од множеството $\{1,2,3,...,n\}$.

Бројот на точки на секоја од правите е $n+1$ а се означени со n различни ознаки. Значи, постојат две кои се означени на ист начин, т.е. со иста бројка и нека тоа се точките (i,k_1) и (i,k_2) , и (j,k_1) и (j,k_2) . Тоа се темиња на четириаголникот кој е правоаголник чии темиња се означени со еден ист број.

52. Нека T е конвексна фигура во рамнина, која содржи барем три неколинеарни точки. Секоја точка од фигурата е обоена во една од p различни бои (секоја точка е обоена во една од p-те дадени бои). Докажи дека за $n\geq 3$ постојат бесконечно многу складни n-аголници такви што сите нивни темиња се обоени со една иста боја.

Решение. Нека A,B,C се три неколинеарни точки кои припаѓаат на конвексното множество S . Според тоа, секоја точка од триаголникот ABC припаѓа на множеството P . Впишаната кружница k припаѓа на множеството S . Во кружницата k може да се впишат бесконечно многу различни $N=(n-1)p+1$ многуаголници кои се правилни. Според принципот на Дирихле, за еден фиксен N-аголник постојат барем n-темиња кои се обоени во иста боја, една од p-те бои.

Бидејќи множеството од N-аголници е бесконечно, постојат бесконечно многу n-аголници кои се обоени во иста боја, една од p-те бои.

Значи, постојат бесконечно многу n-аголници, сите обоени во иста боја. Од еден N-аголник може да се издвојат $\binom{N}{n}=\binom{(n-1)p+1}{n}$ различни n-аголници. Бидејќи множеството од n-аголници чии темиња се и темиња на $N=(n-1)p+1$ аголни е бесконечно и бидејќи $\binom{N}{n}=\binom{(n-1)p+1}{n}$ е конечен број, добиваме дека постојат бесконечно многу складни n-аголници кои се обоени во иста боја.

53. Нека n е природен број. Докажи дека бројот на триаголници со целобројни страни чии должини не се поголеми од $2n$ е еднаков на $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

Решение. Со (a,b,c) ќе го означиме триаголникот чии должини на страни се $a,b,c\in\mathbb{N}$ такви што $a\geq b\geq c$.

За $n=1$, такви триаголници се $(1,1,1)$, $(2,2,1)$ и $(2,2,2)$. Бидејќи $\frac{1\cdot 2\cdot 9}{6}=3$, тврдењето е точно за $n=1$.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број n , т.е. триаголници со должини на страни природни броеви не поголеми од $2n$ е

$$\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Со a_n ќе го означиме бројот на триаголници кои имаат должина на страна $2n+1$. Тој број е еднаков на сите тројки $(2n+1, 2n+1-k, x)$ такви што

$$2n+1-k \geq x$$
$$2n+1-k+x \geq 2n+1,$$

односно

$$k \leq x \leq 2n+1-k,$$

за вредности на $k = 0,1,2,3,...,n$. За фиксно k тој број е $2n+1-k-k = 2n+1-2k$. Вкупниот број на такви триаголници е еднаков на

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (2n+1-2k) = (n+1)(2n+1) - n(n+1) = (n+1)^2.$$

Со b_n ќе го означиме бројот на триголници кои имаат должина на страна $2n+2$. Тој број е еднаков на сите тројки $(2n+2, 2n+2-l, y)$, такви што

$$2n+2-l \geq y$$
$$2n+2-l+y \geq 2n+2$$

за вредности на l од 0 до $n+1$. Од претходните неравенства добиваме

$$l \leq y \leq 2n+2-l,$$

а за фиксно l нивниот број е еднаков на $2n+2-2l$. Такви триаголници има

$$b_n = \sum_{n=0}^{n+1} (2n+2-2l) = (n+2)(2n+2) - (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2).$$

Според индуктивната претпоставка бројот на триаголници чии должини на страни не се поголеми од $2n+2$ е еднаков на

$$\frac{n(n+1)(4n+5)}{6} + (n+1)^2 + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(4n^2+17n+18)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(4n+9)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)[4(n+1)+5]}{6}$$

Според принципот на математичка индукција, такви триаголници има

$$\frac{n(n+1)(4n+5)}{6},$$

за секој природен број n.

5. ИНВАРИЈАНТИ

1. Во еден чекор дадена тројка цели броеви (a,b,c) може да се трансформира во тројката $(a-b, b-c, c-a)$. Докажи дека при било која почетна тројка (a,b,c), после најмалку четири чекори никогаш не може во добиените тројки да се појават броевите 2009 или -2009.

Решение. Нека е дадена тројката (a,b,c), $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Тогаш по еден чекор ја имаме тројката $(a-b, b-c, c-a)$.

Третата тројка е $(a-2b+c, b-2c+a, c-2a+b)$, додека четвртата тројка е $(3(c-b), 3(a-c), 3(b-a))$.

Може да се забележи дека сите броеви кои учествуваат во наредните тројки ќе бидат деливи со 3, меѓутоа броевите 2009, -2009 не се деливи со 3.

Со ова задачата е решена.

2. На еден остров живеат 1995 камелеони, меѓу кои има сини, црвени и жолти. Ако се сретнат два камелеони со различна боја, тие истовремено ја менуваат својата боја во преостанатата боја. Во еден момент имало 1000 сини, 395 црвени и 600 жолти камелеони. Дали после извесно време може сите камелеони да бидат во една иста боја.

Решение. Нека во даден момент имаме a - сини, b - црвени и c - жолти камелеони. Тогаш тројката (a,b,c) може да премине во некоја од следниве тројки $(a-1, b-1, c+2)$, $(a-1, b+2, c-1)$ или $(a+2, b-1, c-1)$.

Во секој од овие случаи, при секој чекор разликите $a-b$, $b-c$, $c-a$ се инваријантни по $\bmod 3$.

На почетокот ја имаме тројката $(1000, 395, 600)$. Тогаш

$$1000-395 \equiv 2 (\bmod 3),\ 1000-600 \equiv 1 (\bmod 3) \text{ и } 600-395 \equiv 1 (\bmod 3).$$

Додека во тројките $(1995, 0, 0)$, $(0, 1995, 0)$, $(0, 0, 1995)$ соодветните разлики се конгруентни 0 по $\bmod 3$.

Значи во ниту еден момент, камелеоните не можат да бидат во една иста боја.

3. Компјутер ги врши следниве операции:

1° Парот (a,b) го трансформира во парот $(a+1, b+1)$.

2° Ако a и b се парни тогаш парот (a,b) го трансформира во $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

3° Од паровите (a,b) и (b,c) може да го добие парот (a,c).

Дали е можно компјутерот со комбинација на претходно опишаните операции, од парот $(5,19)$ да го добие парот $(17, 2009)$. (Компјутерот ги има на располагање сите добиени парови до тој момент)

Решение. При првата операција $(a,b) \to (a+1, b+1)$, имаме

$$(a+1)-(b+1) = a-b \tag{1}$$

При втората $(a,b) \to (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ имаме

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} \tag{2}$$

И при третата операција (a,b), (b,c) $\to$ A имаме

$$a-c = (a-b)+(b-c) \tag{3}$$

Нека сега $p \neq 2$ е прост делител на разликата на даден пар (x,y), т.е. $p \mid x-y$. Тогаш поради (1), (2) и (3) имаме дека $p \mid a-b$ каде (a,b) е било кој новодобиен пар со помош на парот (x,y).

Сега бидејќи $7 \mid 5-19$ мора $7 \mid 17-2009$, што не е точно.

Според ова од парот $(5,19)$ не може да се добие парот $(17, 2009)$.

4. Дадена е тројката реални броеви (a,b,c). Во еден чекор два од броевите, на пример, a и b се заменуваат со броевите $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$, т.е. даената тројка може да се трансформира во тројката $(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}},c)$. Дали со вакви трансформации од тројката $(2,\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ може да се добие тројката $(1,\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

Решение. Нека почетната тројка реални броеви е (a,b,c), тогаш втората тројка е на пример $(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}},c)$, (може да се добијат три тројки). Да го разгледаме збирот $x^2+y^2+z^2$ на секоја тројка (x,y,z). Имаме, $S_1=a^2+b^2+c^2$ и

$$S_2=(\tfrac{a+b}{\sqrt{2}})^2+(\tfrac{a-b}{\sqrt{2}})^2+c^2=\tfrac{a^2+2ab+b^2}{2}+\tfrac{a^2-2ab+b^2}{2}+c^2=a^2+b^2+c^2=S_1.$$

Значи, овој збир не ја менува својата вредност при дозволената трансформација. Сега бидејќи

$$2^2+(\sqrt{2})^2+(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2\neq 1^2+(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2$$

следува дека од тројката $(2,\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ не може да се добие тројката $(1,\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

5. Дадена е шаховска табла 8×8, обоена на стандарден начин. Во еден чекор можеме да ги обоиме во спротивните бои:

а) Сите квадратчиња на произволно избран ред или колона.

б) Сите квадратчиња на призволно избран квадрат 2×2.

Дали по конечен број на чекори, на таблата може да остане само едно црно квадратче.

Решение. а) Со пребојување на ред (колона) со x црни и $8-x$ бели квадратчиња добиваме $8-x$ црни и x бели квадратчиња, бројот на црни квадратчиња се менува за $|(8-x)-x|=|8-2x|$, т.е. за парен број. Според ова при било кој чекор парноста на бројот на црни квадратчиња не се менува.

На почетокот имаме 32 црни квадратчиња , што значи по било кој чекор ќе има парен број црни квадратчиња, па затоа на таблата не може да остане само едно црно квадртаче.

б) Слично како под а).

6. Во секој чекор еден триаголник можеме да го разделиме на 5 помали триаголници. Дали по конечен број чекори, даден триаголник може да биде разделен на 2010 помали триаголници.

Решение. Бројот на триаголници по секој чекор се зголемува за 4, т.е после k чекори ќе имаме $4k+1$ триаголници. Но, бројот 2010 е од облик $4k+2$, па затоа дадениот триаголник не може да се раздели на 2010 помали триаголници.

7. Дали е можно меѓу броевите 1, 2, 3, .., 10 да се распоредат знаците $+$ и $-$ така што вредноста на добиениот израз да е еднаква на 0.

Решение. Имаме:

$$1+2+...+10=55.$$

При промена на еден знак $+$ во $-$ вредноста на изразот се намалува за парен број.

Последното значи дека при секоја промена на знак од + во – вредноста на изразот ќе биде непарен број. Според тоа, бараното разместување на знаците не е можно.

8. Ламјата Огненка има 100 глави. Крали Марко при едно замавнување може да пресече 15, 17, 20 или 5 глави. Во секој од овие случаи на Огненка ѝ растат 24, 2, 14 или 17 нови глави, соодветно. Ако Крали Марко во некој момент ѝ ги пресече сите глави на Огненка, таа умира. Дали Крали може да го победи змејот?

Решение. Разликата на „постоечките“ и „новите“ глави е инавријантен по $\mathrm{mod}\,3$. Бидејќи $100 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ добиваме дека на змејот во било кој случај му останува барем една глава т.е. витезот никогаш неможе да го победи змејот.

9. На табла се поставени a бели, b црни и c црвени топчиња. Во еден чекор , можеме да изберем било кои две топчиња со различна боја и секое од нив да го замениме со топче обоено во преостанатата боја. Да се најде условот кој треба да го задоволуваат a, b и c така што после конечен број чекори, сите топчиња на таблата да бидат обоени во една иста боја.

Решение. По првиот чекор од тројката (a,b,c) може да се добие една од следниве тројки $(a+2,b-1,c-1)$, $(a-1,b+2,c-1)$ или $(a-1,b-1,c+2)$. Во било кој случај разликата $a-b$ е инваријанта по модул 3, т.е.

$$(a+2)-(b-1)=a-b+3\equiv a-b(\mathrm{mod}\,3)$$

$$(a-1)-(b+2)=a-b-3\equiv a-b(\mathrm{mod}\,3)$$

$$(a-1)-(b-1)=a-b\equiv a-b(\mathrm{mod}\,3)\,.$$

Исто така $b-c$ и $c-a$ се инваријанти по модул 3. Нека на крајот сите топчиња се обоени во бела боја односно нека е добиена тројката $(a+b+c,0,0)$.Тогаш според претходно изнесеното имаме

$$b-c\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\,,\ a-b\equiv a+b+c(\mathrm{mod}\,3)\ \text{ и }\ c-a\equiv a+b+c(\mathrm{mod}\,3)\,,$$

т.е.

$$2(a+b+c)\equiv c-b\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$$

односно

$$a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\,.$$

Значи $b\equiv c(\mathrm{mod}\,3)$ и $a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ е условот кој треба да го задоволуваат a, b и c за постигнување на бараната состојба.

10. На табла се напишани броевите $\frac{49}{k}$, каде $k=1,2,...,97$. Во еден чекор можеме да избришеме два од дадените броеви a, b и наместо нив на таблата да го запишеме бројот $2ab-a-b+1$ и.тн. Оваа постапка ја повторуваме се додека на таблата не остане само еден број. Да се определат сите можни вредности што може да ги прими последниот добиен број.

Решение. Да забележиме дека

$$2(2ab-a-b+1)-1=(2a-1)(2b-1)\,. \qquad \mathbf{(1)}$$

Да го разгледаме производот $(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_n-1)$, каде $a_1,a_2,...,a_n$ се броевите кои во даден момент се наоѓаат на таблата.

Заради равенството (1) овој производ е инваријантен при секој чекор. Имено ако при некој чекор ги избришеме броевите a_1 и a_2 тогаш на нивно место го запишуваме бројот $2a_1a_2-a_1-a_2+1$, па според (1) производот по овој чекор е

$$(2(2a_1a_2-a_1-a_2+1)-1)(2a_3-1)...(2a_n-1)=(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_n-1).$$

Според ова ако бројот што ќе остане на таблата го означиме со N имаме

$$2N-1=(\tfrac{2\cdot49}{1}-1)(\tfrac{2\cdot49}{2}-1)...(\tfrac{2\cdot49}{97}-1)=\tfrac{97}{1}\cdot\tfrac{96}{2}\cdot...\cdot\tfrac{1}{97}=1$$

од каде добиваме дека $N=1$.

11. Даден е квадратниот полином ax^2+bx+c, каде $a,b,c\in\mathbb{R}$. Дозволени се следниве операции:

1° a и c да ги заменат местата.

2° Променливата x може да се замени со $x+t$, каде t е било кој реален број. Дали со помош на овие операции од полиномот x^2-x-2 може да се добие полиномот x^2-2x-1?

Решение. Нека е даден полиномот ax^2+bx+c, тогаш неговата дискриминанта е $D=b^2-4ac$. По првата операција го добиваме полиномот cx^2+bx+a чија дискриминанта е $D=b^2-4ac$. Значи D е инваријанта при првата операција. Нека на полиномот ax^2+bx+c ја примениме втората операција. Тогаш се добива полиномот

$$a(x+t)^2+b(x+t)+c=ax^2+(2at+b)x+at^2+bt+c,$$

каде t е призволен реален број, и имаме

$$D=(2at+b)^2-4a(at^2+bt+c)=b^2-4ac.$$

Значи D и при втората операција останува инваријанта. Според тоа, при двете операции D е инваријанта. Бидејќи x^2-x-2 има дискриминанта $D_1=9$, а x^2-2x-1 има $D_2=8$ следува дека од полиномот x^2-x-2 не може да се добие полиномот x^2-2x-1.

12. На табла се напишани неколку знаци "$+$" и неколку знаци "$-$". Во еден чекор дозволено е да избришеме два знака, а наместо нив на таблата запишуваме $+$, ако знаците се истородни и $-$ ако избраните знаци се разнородни. Да се докаже дека знакот што останува на крајот на таблата не зависи од редоследот на бришење на знаците.

Решение. Знаците $+$ и $-$ да ги замениме со $+1$ и -1, соодветно. Нека на таблата имаме a броеви еднакви на $+1$, и b броеви еднакви на -1. Производот на броевите е $P=(-1)^b$. После првиот чекор тој производ може да биде

$$1^{a-1}(-1)^b=(-1)^b,\ 1^{a+1}(-1)^{b-2}=(-1)^{b-2}=(-1)^b \text{ или } 1^{b-1}(-1)^{b-1}(-1)=(-1)^b$$

т.е. знакот на производот на броевите на таблата не се менува по било кој чекор.

Со ова задачата е решена.

II РАВЕНКИ

1. Определи ги вредностите на k за кои равенката

$$x^3-(k^2-k+7)x-(3k^2-3k-6)=0$$

има корен -1. За така најдените вредности на k реши ја равенката.

Решение. За $x=-1$ равенката се сведува на $k^2-k-6=0$, која има корени $k_1=-2$ и $k_2=-3$. Заменувајќи го k со $k_1=-2$ или со $k_2=-3$ добиваме една иста равенка

$$x^3-13x-12=0\,.$$

Оваа равенка има корен $x_1=-1$, па делејќи ја со $x+1$, добиваме

$$x^3-13x-12=(x+1)(x^2-x-12)\,.$$

Решавајќи ја равенката

$$x^2-x-12=0$$

се добиваат другите две решенија на равенката

$$x^3-13x-12=0\,,$$

а тоа се $x_2=-3$ и $x_3=4$.

2. Ако решенијата на равенката $x^3+ax^2+3x-1=0$ се позитивни реални броеви, тогаш тие се меѓусебно еднакви и притоа $a=-3$. Докажи!

Решение. Од Виетовите формули за равенката добиваме:

$$x_1+x_2+x_3=-a\,,\qquad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3\,,\qquad x_1x_2x_3=1\,.$$

Ако второто равенство го поделиме со $x_1x_2x_3$ добиваме

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=3\,.$$

Од неравенството меѓу хармониска и геометриска средина за позитивните броеви x_1,x_2,x_3 добиваме

$$\frac{3}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}}\le\sqrt[3]{x_1x_2x_3}=1,\text{ т.е.}\qquad 3\le\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\,.$$

Но, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=3$, што значи дека меѓу овие две средини важи знак за равенство, а тоа е можно ако и само ако $x_1=x_2=x_3$.

3. Дадени се полиномите $f(x)=x^3+ax+b$ и $g(x)=x^3+a^2x^2+b^2$, каде a и b се реални параметри. Определи ги сите вредности на a и b за кои точно еден од броевите $-2,-1$ и 1 е заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$.

Решение. Од $g(1)=1+a^2+b^2>0$ следува дека заедничкиот корен не може да биде 1. Нека претпоставиме дека -2 е заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$. Тогаш

$$f(-2)=-8-2a+b=0\ \text{ и }\ g(-2)=-8+4a^2+b^2=0\,,$$

од каде добиваме

$$b=2(a+4),\ 4a^2+4(a+4)^2=8, \text{т.е. } a^2+4a+7=0.$$

Последната равенка нема реални решенија, па затоа -2 не може да биде заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$.

Ако -1 е заеднички корен, тогаш

$$f(-1)=-1-a+b=0 \text{ и } g(-1)=-1+a^2+b^2=0,$$

па затоа

$$b=a+1 \text{ и } a^2+(a+1)^2=1, \text{т.е. } 2a^2+2a=0,$$

од каде добиваме $a=0$ или $a=-1$ и соодветно $b=1$ или $b=0$.

4. Збирот на два корени на равенката $x^3+ax^2+bx+c=0$ е еднаков на 0. Докажи дека $c=ab$. Дали е точно обратното тврдење?

Решение. Нека претпоставиме дека $x_1,-x_1,x_2$ се корени на равенката. Тогаш

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)(x+x_1)(x-x_2)=x^3-x_2x^2-x_1^2x+x_1^2x_2$$

Од последното равенство следува

$$a=-x_2,\ b=-x_1^2,\ c=x_1^2x_2$$

Сега,

$$ab=(-x_2)(-x_1^2)=x_2x_1^2=c.$$

Обратно, нека претпоставиме дека $c=ab$. Тогаш равенката го добива обликот

$$x^3+ax^2+bx+ab=0$$
$$x^2(x+a)+b(x+a)=0$$
$$(x+a)(x^2+b)=0.$$

Според тоа, решенија на равенката се $x_1=a$, $x_2=\sqrt{-b}$ и $x_2=-\sqrt{-b}$. Јасно,

$$x_2+x_3=\sqrt{-b}+(-\sqrt{-b})=0,$$

т.е. точно е обратното тврдење.

5. Определи ги сите парови реални броеви (x,y) такви што

$$x^5-y^5=x^3-y^3=x-y.$$

Решение. *Случај 1.* Јасно е дека за $x=y$ се точни сите три равенства. Според тоа решенија се сите подредени парови (t,t), $t\in\mathbb{R}$.

Случај 2. Ако $x\neq y$, тогаш $x-y\neq 0$ па дадениот систем е еквивалентен со

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=x^2+xy+y^2=1.$$

Јасно,

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=x^2(x^2+y^2)+y^2(x^2+y^2)+xy(x^2+y^2)-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)-x^2y^2$$

Бидејќи $x^2+xy+y^2=1$, имаме $x^2+xy+y^2-1=0$, па затоа

$$(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)-x^2y^2=(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2-1)+x^2+y^2-x^2y^2$$
$$=x^2+y^2-x^2y^2$$

Но, од

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=1$$

добиваме

$$x^2+y^2-x^2y^2=1$$

т.е.

$$(x^2-1)(y^2-1)=0$$

а) $x^2=1$. Тогаш од $x^2+xy+y^2=1$ добиваме $y(x+y)=0$, па според тоа $y=0$ или $y=-x$. Во овој случај решенија се

$$x_1=1, y_1=0;\ x_2=1, y_2=-1,\ x_3=-1, y_3=0;\ x_4=-1, y_4=1.$$

б) $y^2=1$. Тогаш од $x^2+xy+y^2=1$ добиваме $x(x+y)=0$. Според тоа $x=0$ или $x=-y$. Во овој случај решенија се

$$x_1=0, y_1=1;\ x_2=-1, y_2=1,\ x_3=1, y_3=-1;\ x_4=0, y_4=-1.$$

Конечно, решенија на системот се

$$\{(t,-t)/t\in\mathbb{R}\}\cup\{(1,0),(1,-1),(-1,0),(-1,1)(0,1),(0,-1)\}.$$

6. Равенката $ax^5+bx^4+c=0$ има точно три реални (различни) корени. Колку корени има равенката $cx^5+bx+a=0$.

Решение. Јасно е дека $a\neq 0$ бидејќи во спротивен случај равенката би била линеарна равенка која има најмногу еден корен. Исто така, ниту еден од корените на дадената равенка не е нула. Навистина, ако претпоставиме дека $x=0$ е решение на дадената равенка, тогаш $c=0$ и равенката го добива обликот

$$ax^5+bx^4=0,$$

$$x^4(ax+b)=0 \qquad (1)$$

Бидејќи $a\neq 0$, равенката (1) нема повеќе од два реални различни корени. Ако $b=0$, равенката има еден корен. Ако $b\neq 0$, равенката има два реални различни корени. Секој од овие случаи е спротивен на почетната претпоставка.

Од претходната дискусија добивме дека $a\neq 0$ и $c\neq 0$.

Нека $t\neq 0$ е корен на дадената равенка. Тогаш

$$at^5+bt^4+c=0,$$

$$t^5(a+b\tfrac{1}{t}+c(\tfrac{1}{t})^5)=0,$$

$$a+b\tfrac{1}{t}+c(\tfrac{1}{t})^5=0.$$

Значи, $\frac{1}{t}$ е корен на равенката $cx^5+bx+a=0$. Според тоа, бројот на корени на $cx^5+bx+a=0$ не е помал од бројот на корени на равенката $ax^5+bx^4+c=0$.

Со потполно аналогна дискусија, се докажува дека бројот на корени на равенката $ax^5+bx^4+c=0$ не е помал од бројот на корени на $cx^5+bx+a=0$. Значи, и двете равенки имаат ист број корени.

7. Да се определат сите парови на цели броеви (s,t) за кои равенките

$$x^n + sx - 2010 = 0$$

$$x^n + tx - 2011 = 0$$

имаат заеднички корен (n е природен број поголем од 1).

Решение. Нека x е заеднички корен на двете равенки. Тогаш од

$$x^n = 2010 - sx$$

$$x^n = 2011 - tx,$$

добиваме

$$2010 - sx = 2011 - tx.$$

Ако $s = t$, тогаш $2010 = 2011$ што не е можно. Значи $s \neq t$ и $x(t-s) = 1$, т.е. $x = \frac{1}{t-s}$. Ако замениме во првата равенка, добиваме

$$\frac{1}{(t-s)^n} + \frac{s}{t-s} - 2010 = 0$$

$$(t-s)^{n-1}[s - 2010(t-s)] = -1.$$

Последната равенка треба да ја решиме во множеството цели броеви. Имаме два случаи.

Случај 1. $t - s = 1$ и $s - 2010(t-s) = -1$. Во овој случај решенија се $s = 2009$ и $t = 2010$ а заедничкиот корен е $x = 1$.

Случај 2. $t - s = -1$ и $s - 2010(t-s) = 1$. Сега

$$(-1)^{n-1}[s + 2010] = -1$$

од каде добиваме

$$s = (-1)^n - 2010 \quad \text{и} \quad t = (-1)^n - 2011.$$

Заедничкото решение е $x = -1$.

8. Нека c и d се различни цели броеви такви што

$$c^2 + ac + b = 0 \text{ и } d^2 + ad + b = 0.$$

Докажи дека равенката

$$x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 + ax + 1 = 0$$

има четири реални различни решенија.

Решение. Броевите a, b, c, d ги задоволуваат равенствата

$$c^2 + ac + b = 0 \text{ и } d^2 + ad + b = 0,$$

па ако од првото равенство го одземеме второто равенство, добиваме

$$c^2 - d^2 + ac - ad = 0$$

$$(c-d)(c+d+a) = 0.$$

Заради тоа што $c - d \neq 0$, добиваме $c + d + a = 0$, т.е. $a = -(c+d)$. Со замена во $c^2 + ac + b = 0$, добиваме

$$c^2 - c(c+d) + b = 0$$

$$b = cd.$$

Сега ако замениме во равенката добиваме

$$x^4 - (c+d)x^3 + (cd-2)x^2 + (c+d)x + 1 = 0,$$

која можеме да ја запишеме во облик

$$(x^2-cx-1)(x^2-dx-1)=0.$$

Решението на ова равенка е севкупност на решенијата на равенките

$$\left[\begin{array}{l} x^2-cx-1=0 \\ x^2-dx-1=0 \end{array}\right.$$

Нивни решенија се $x_{1/2}=\frac{c\pm\sqrt{c^2+4}}{2}$ и $x_{3/4}=\frac{d\pm\sqrt{d^2+4}}{2}$, кои заради условот $c\neq d$ се различни меѓу себе.

9. Определи ги корените на равенката

$$x^5-55x+21=0,$$

ако се знае дека $x_1x_2=1$.

Решение. Бидејќи x_1 и x_2 се нули на полиномот $x^5-55x+21$, тој е делив со полиномот

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+px+1,$$

каде $-p=x_1+x_2$. Заради тоа,

$$x^5-55x+21=(x^2+px+1)(x^3+ax^2+bx+c)=$$

$$=x^5+(p+a)x^4+(pa+b+1)x^3+(a+pb+c)x^2+(b+pc)x+c.$$

Според тоа,

$$\begin{cases} p+a=0 \\ pa+b+1=0 \\ a+pb+c=0 \\ b+pc=-55 \\ c=21 \end{cases}$$

По средување на овие равенки, добиваме

$$p^3-2p+21=0$$

$$p^2+21p+54=0.$$

Заедничко решение на овие две равенки е $p=-3$. Така, сега имаме

$$x_1x_2=1 \qquad \text{и} \qquad x_1+x_2=3,$$

а x_1,x_2 се решенија на равенката

$$x^2-3x+1=0.$$

Решенија на ова равенка се $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, па значи,

$$(x_1,x_2)\in\{(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2},\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}),(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2},\tfrac{3+\sqrt{5}}{2})\}.$$

10. Да се реши равенката

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x)=(1+x+x^2)^2.$$

Решение. Очигледно е дека $x=1$ не е решение на равенката. Ако равенката ја помножиме со $(1-x)^2$, добиваме

$$\begin{aligned}&(1-x)(1+x+x^2+x^3)(1-x)(1+x)=[(1+x+x^2)(1-x)]^2\\&(1-x^4)(1-x^2)=(1-x^3)^2\\&1-x^2-x^4+x^6=1-2x^3+x^6\\&x^4-2x^3+x^2=0\\&x^2(x^2-2x+1)=0\\&x^2(x-1)^2=0\,.\end{aligned}$$

Последната равенка има решенија $x_{1/2}=0$ и $x_{3/4}=1$. Бидејќи $x=1$ не е решение на равенката, добиваме дека единствено решение на равенката е $x=0$.

11. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases}a^3+3ab^2+3ac^2-6abc=1\\b^3+3ba^2+3bc^2-6abc=1\,.\\c^3+3ca^2+3cb^2-6abc=1\end{cases}$$

Решение. Левите страни на дадените равенки ќе ги означиме со A, B и C. Тогаш не е тешко да се провери дека

$$\begin{cases}-A+B+C=(-a+b+c)^3\\ \;\;A-B+C=\;(a-b+c)^3\\ \;\;A+B-C=\;(a+b-c)^3\end{cases}$$

Сега, почетниот систем е еквивалентен на системот равенки

$$\begin{cases}(-a+b+c)^3=1\\(a-b+c)^3\;=1\,.\\(a+b-c)^3\;=1\end{cases}$$

Од особините на кубната парабола $y=x^3$, последниот систем, пак, е еквивалентен на системот равенки

$$\begin{cases}-a+b+c=1\\ \;\;a-b+c=1\,.\\ \;\;a+b-c=1\end{cases}$$

Решение на последниот систем, а со тоа и на почетниот систем е $(a,b,c)=(1,1,1)$.

12. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\binom{x}{2}\binom{x}{x-1}=24\,.$$

Решение. Бидејќи $\binom{x}{x-1}=\binom{x}{1}=x$, равенката е еквивалентна со равенката

$$x^2(x-1)=48.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$(x-4)(x^2+3x+12)=0\,,$$

чие единствено реално решениие е $x_1=4$.

13. Најди ги сите реални решенија на равенката

$$(\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}})^{x-4}+(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}})^{x-4}=2x.$$

Решение. Изразот на левата страна е дефиниран за $x \geq 1$. Бидејќи

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}$$

дадената равенка се сведува на

$$\frac{1}{(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}})^{x-4}}+(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}})^{x-4}=2x, (x \geq 1).$$

Ако воведеме ознака $t=(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}})^{x-4}$ добиваме $\frac{1}{t}+t=2x$ од каде

$$t=x \pm \sqrt{x^2-1}.$$

Ќе ги разгледаме следните три случаи:

1° $t=x+\sqrt{x^2-1},\ (x>1)$. Тогаш $x+\sqrt{x^2-1}=(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{x-4}{2}}$, па според тоа $\frac{x-4}{2}=1$, т.е. $x=6$.

2° Нека $t=x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=(x+\sqrt{x^2-1})^{-1}$, $(x>1)$. Тогаш

$$(x+\sqrt{x^2-1})^{-1}=(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{x-4}{2}}.$$

Одовде добиваме $x=2$.

3° $x=1$ ја задоволува дадената равенка.

Значи, множеството решенија на равенката е $\{1,2,6\}$.

14. Ако α,β,γ се корени на равенката $x^3-x+1=0$, докажи дека

$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=-5$$

Решение. Според Виетовите правила, за корените на оваа равенка, имаме:

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-1.$$

Со квадрирање на првото равенство и со примена на второто равенство добиваме $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2$. Освен тоа, од почетната равенка добиваме

$$\alpha^3=\alpha-1,\ \text{т.е.}\ \alpha^5=\alpha^3-\alpha^2=-\alpha^2+\alpha-1.$$

Слично,

$$\beta^5=-\beta^2+\beta-1\ \text{и}\ \gamma^5=-\gamma^2+\gamma-1.$$

Со собирање на последните три равенства и користење на претходните, го добиваме бараното равенство.

15. Реши ја равенката

$$x^4-4x-1=0.$$

Решение. Имаме:

$$x^4=4x+1 \Leftrightarrow x^4+2x^2+1=2x^2+4x+2 \Leftrightarrow (x^2+1)^2=2(x+1)^2.$$

Со коренување на последната равенка добиваме

$$x^2+1=\pm\sqrt{2}(x+1).$$

Останува уште да се решат добиените две квадратни равенки. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

16. Реши ја равенката

$$(x+1)^2+(2x+1)^2+...+(99x+1)^2=99\,.$$

Решение. По квадрирање на биномите на левата страна и собирање на сличните членови, дадената равенка се сведува на равенката

$$(1^2+2^2+...+99^2)x^2+2(1+2+...+99)x=0\,.$$

Со користење на познатите формули за збир на првите 99 природни броеви и за збир на нивните квадрати ги добиваме решенијата $x=0$ и $x=-\frac{6}{99}$.

17. *Реши ја равенката* $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.

Решение. Производот на левата страна ќе го запишеме во облик

$$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=3 \Leftrightarrow$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3\,.$$

Со смената $t=x^2+5x$ добиваме равенка

$$(t+4)(t+6)=3\,.$$

Нејзините решенија се $t=-3$ и $t=-7$. Потоа, треба да ги решиме квадратните равенки

$$x^2+5x=-3 \text{ и } x^2+5x=-7\,.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

18. Реши ја (по x) равенката

$$x^3-(a+1)x^2-(a-1)x+a^2-1=0\,.$$

Решение. Лесно се гледа дека дадената равенка може да се запише во облик

$$x^2[x-(a+1)]-(a-1)[x-(a+1)]=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[x-(a+1)][x^2-(a-1)]=0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1=a+1,\; x_{2/3}=\pm\sqrt{a-1}$$

19. Докажи дека равенката

$$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$$

нема реални решенија.

Решение. Левата страна на равенката може да се трансформира така што дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x^2(x-2)^2+4(x-1)^2+4(x-2)^2+4=0\,.$$

Бидејќи левата страна на оваа равенка е строго позитивна за секој x , почетната равенка нема реални решенија.

20. Најди ги реалните решенија на равенката

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+x+x^2+x^3=6\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x^3+\frac{1}{x^3})+(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})=6\,.$$

Со смената $x+\frac{1}{x}=t,$ добиваме $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2,\ x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$ па зададената равенка се сведува на равенката:

$$t^3+t^2-2t-8=0$$

$$t^3-8+t^2-2t=0$$

$$(t-2)(t^2+3t+4)=0.$$

Единствено реално решение на оваа равенка е $t=2$, па според тоа единствено реално решение на почетната равенка е $x=1$.

III НИЗИ

1. АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

1. Пресметај го збирот на првите n членови на аритметичката прогресија $a, 2a-b, 3a-2b, 4a-3b, ...$.

Решение. Од условот на задачата, за разликата d на прогресијата наоѓаме $d=a_2-a_1=2a-b-a=a-b$. Понатаму, за збирот на првите n членови на оваа прогресија наоѓаме

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)(a-b)]=\frac{n}{2}[2a+(n-1)a]-\frac{n(n-1)}{2}b=\frac{n(n+1)}{2}a-\frac{n(n-1)}{2}b .$$

2. Најди ја аритметичната прогресија за која се знае дека $a_7=21$ и $S_7=105$.

Решение. Од условот на задачата добиваме

$$105=\frac{7}{2}(a_1+21)$$

од каде наоѓаме $a_1=9$. Сега,

$$21=30+(7-1)d ,$$

т.е. $d=-\frac{1}{2}$. Според тоа, прогресијата е зададена со почетен член $a_1=9$ и разлика $d=-\frac{1}{2}$.

3. Најди ја аритметичката прогресија ако $S_3=30$ и $S_5=75$.

Решение. Од условот на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 30=\frac{3}{2}[2a_1+2d] \\ 75=\frac{5}{2}[2a_1+4d] \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 10=a_1+d \\ 15=a_1+2d. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја извадиме првата добиваме $d=5$, па затоа

$$a_1=10-5=5 .$$

4. Колку членови на аритметичката прогресија зададена со $a_1=41$ и $d=2$ се собрани за да се добие збир $S_k=4784$.

Решение. Од условот на задачата, ако замениме во (4) ја добиваме равенката

$$4784=\frac{k}{2}[2\cdot 41+(k-1)2]$$

која е еквивалентна на равенката

$$k^2+40k-4784=0 .$$

Решенијата на последната квадратна равенка се $k_1=-92$ и $k_2=52$ и како k е природен број, добиваме $k=52$, што значи дека се собрани 52 члена од дадената прогресија.

5. Пресметај го збирот

$$1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2.$$

Решение. Нека $n=2k+1$.Тогаш

$$\begin{aligned}1^2-2^2+3^2-...-(2k)^2+(2k+1)^2 &= 1^2+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+...+((2k+1)^2-(2k)^2)\\ &=1+5+9+...+(4k+1)=\tfrac{(4k+2)(k+1)}{2}\\ &=(2k+1)(k+1)=\tfrac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Нека $n=2k$. Тогаш

$$\begin{aligned}1^2-2^2+3^2-...+(2k-1)^2-(2k)^2 &= -((2^2-1^2)+(4^2-3^2)+...+((2k)^2-(2k-1)^2))\\ &=-(3+7+11+...+(4k-1))\\ &=-\tfrac{(4k+2)k}{2}=-\tfrac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Значи, бараниот збир е $(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

6. Ако за низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ важи $\frac{S_m}{S_k}=\frac{m^2}{k^2}$, за секои $k,m\in\mathbb{N}$ каде што

$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n,$$

докажи дека

$$\frac{a_m}{a_k}=\frac{2m-1}{2k-1}.$$

Решение. Имаме

$$S_m=a_1+a_2+...+a_m, \qquad S_k=a_1+a_2+...+a_k$$

$$a_m=S_m-S_{m-1}, \qquad a_k=S_k-S_{k-1},$$

па според тоа

$$\frac{a_m}{a_k}=\frac{S_m-S_{m-1}}{S_k-S_{k-1}}=\frac{\frac{S_m}{S_{m-1}}-1}{\frac{S_k}{S_{m-1}}-\frac{S_{k-1}}{S_{m-1}}}=\frac{\frac{m^2}{(m-1)^2}-1}{\frac{k^2}{(m-1)^2}-\frac{(k-1)^2}{(m-1)^2}}=\frac{m^2-(m-1)^2}{k^2-(k-1)^2}=\frac{2m-1}{2k-1}.$$

7.Нека p и q се природни броеви и $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е аритметичка прогресија за која a_p е еднаков на q, а a_q е еднаков на p. Пресметај ја вредноста на a_n.

Решение. Разликата на прогресијата ќе ја означиме со d. Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases}a_1+d(p-1)=q\\ a_1+d(q-1)=p\end{cases}$$

Според тоа,

$$d(p-1)-d(q-1)=q-p$$

$$d(p-q)=q-p,$$

односно $d=-1$. Сега, $a_1=p+q-1$, од каде добиваме

$$a_n=p+q-1+d(n-1)=p+q-1-(n-1)=p+q-n.$$

8. Дадена е бесконечна аритметика прогресија, чии членови се цели броеви. Еден член на прогресијата е полн квадрат. Докажи дека прогресијата има бесконечно многу членови кои што се полни квадрати.

Решение. Нека разликата на прогресијата е d и нека еден нејзин член е $a = m^2$. Тогаш за произволен природен број k, бројот

$$(m+kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = m^2 + d(2mk + k^2d)$$

е исто така член на прогресијата. Според тоа бесконечно многу членови на прогресијата се точни квадрати.

9. Докажи дека во аритметичка прогресија со прв член 1 и разлика 729 има бесконечно многу членови кои се степени на бројот 10.

Решение. Ќе докажеме дека за секој природен број n бројот $10^{81n} - 1$ е делив со 729. Навистина

$$\begin{aligned} 10^{81n} - 1 &= (10^{81})^n - 1 = (10^{81} - 1)(10^{81(n-1)} + 10^{81(n-2)} + \ldots + 10^{81} + 1) \\ &= (10^{81} - 1)A_n = \underbrace{99\ldots99}_{81} A_n = 9 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{81} A_n \\ &= 9 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{9} \cdot \underbrace{1\underset{8}{0\ldots0}1\underset{8}{0\ldots0}1\ldots1\underset{8}{0\ldots0}1}_{8} A_n \end{aligned}$$

Секој од трите множители е делив со 9. Според тоа, $10^{81n} - 1$ е делив со $9^3 = 729$, т.е. $10^{81n} - 1 = 729B$. Сега, $10^{81n} - 1 = 729A_nB$, од каде следува

$$a_{A_nB} = 1 + 729A_nB = 1 + 10^{81n} - 1 = 10^{81n}.$$

Од произволноста на $n \in \mathbb{N}$, добиваме дека аритметичката прогресија зададена со со прв член 1 и разлика 729 има бесконечно многу членови кои се степени на бројот 10.

10. Аритметичка прогресија со прв член 7 и разлика 4 содржи бесконечно многу прости броеви. Докажи!

Решение. Членовите на низата се броевите од облик $4n+3, n \in \mathbb{N}$, т.е.

$$a_n = 4n+3,\ n \in \mathbb{N}.$$

Да забележиме дека секој прост број е од облик $4k+1$ или $4k+3$, за некој природен број $k \in \mathbb{N}$. Уште повеќе, производ на броеви од облик $4k+1$ е број од истиот облик. Нека претпоставиме дека има конечно многу прости броеви од облик $4n+3$ и нека $p = 4k+3$ е њаголем таков број.

Ќе го разгледаме бројот

$$N = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot p + 3,$$

т.е. N е број кој е производ на броевите 4 и 5 и сите броеви од облик $4s+3$, $s \le k$. Ако сите прости делители на N се од облик $4s+1$, тогаш и N е од облик $4s+1$. Бидејќи N е од облик $4s+3$, добиваме дека тој има прост делител од облик $4t+3$. Сега е јасно дека $4t+3 > 4k+3$, што противречи ма претпоставката дека множеството прости броеви од облик $4s+3$ е конечно.

Значи, има бесконечно многу прости броеви од облик $4n+3$, а тие се членови на прогресијата.

11. Нека $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е аритметичка прогресија. Докажи дека

$$a_1^2 + a_3^2 + ... + a_{2k-1}^2 - (a_2^2 + a_4^2 + ... + a_{2k}^2) = \tfrac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2) .$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} &a_1^2 + a_3^2 + ... + a_{2k-1}^2 - (a_2^2 + a_4^2 + ... + a_{2k}^2) = \\ &\quad = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k})(a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &\quad = -d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{2k-1} + a_{2k}) = -dk(a_1 + a_{2k}) \\ &\quad = \tfrac{k}{2k-1}(a_1 - a_{2k})(a_1 + a_{2k}) = \tfrac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2) \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

12. Нека $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е аритметичка прогресија и нека $a_n \neq 0$ за $n = 1, 2, 3, ...$. Докажи дека

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} .$$

Решение. Нека $d = a_{k+1} - a_k$ ($k = 1, 2, 3, 4, ..., n, ...$) е разликата на аритметичката прогресија; тогаш имаме:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}) = \tfrac{1}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) \\ &= \frac{1}{d} \frac{a_n - a_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}} = \frac{1}{d} \frac{(n-1)d}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}} . \end{aligned}$$

13. Одреди ги заедничките членови на аритметичките прогресии:

$1, 5, 9, 13, 17, 21, ...$ $\qquad$ $4, 15, 26, 37, ...$

Решение. Нека a_n и b_m се општите членови на аритметичките прогресии; тогаш имаме:

$$a_n = 1 + 4(n-1), \qquad b_m = 4 + 11(m-1) .$$

Треба да ја решиме равенката $a_n = b_m$ во множеството на природните броеви. Оваа равенка се сведува на решавање на равенката

$$11m = 4(n+1)$$

од каде што добиваме $n + 1 = 11k$, $m = 4k$. Според тоа, имаме $a_{11k-1} = b_{4k}$.

14. Да се докаже дека: ако броевите a^2, b^2, c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш и броевите $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ се членови на аритметичка прогресија.

Решение. Бидејќи a^2, b^2, c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија, следува дека $b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \neq 0$. Тогаш

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{b-a}{(c+a)(c+b)}=\frac{(b-a)(b+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{b^2-a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{c^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(c-b)(c+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$$
$$=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$$

Значи, $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ се последователни членови на аритметичка прогресија.

15. Нека $a_1,a_2,...a_n,...$ е аритметичка прогресија, и нека m е даден природен број. Ако ставиме

$$S_1=a_1+a_2+...+a_m$$
$$S_2=a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}$$
$$S_3=a_{2m+1}+a_{2m+2}+...+a_{3m}$$
$$...$$

докажи дека и $S_1,S_2,...,S_n,...$ е аритметичка прогресија.

Решение. Од условот на задачата $S_k=a_{(k-1)m+1}+a_{(k-1)m+2}+...+a_{km}$. Нека d е разликата во аритметичката прогресија $a_1,a_2,...a_n,...$. Од познатите формули за општ член на аритметичката прогресија и збир од последователни m нејзини членови добиваме:

$$S_{k+1}-S_k=\frac{m}{2}(a_{km+1}+a_{(k+1)m})-\frac{m}{2}(a_{(k-1)m+1}+a_{km})$$
$$=\frac{m}{2}(a_1+kmd+a_1+[(k+1)m-1]d)-\frac{m}{2}(a_1+(k-1)md+a_1+(km-1)d)$$
$$=m^2d$$

Значи, $S_1,S_2,...,S_k,...$ е аритметичка прогресија со разлика m^2d .

16. Да се пресмета збирот $S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}$ каде $a_1,a_2,....,a_n,a_{n+1}$ се последователни членови на една аритметичка прогресија.

Решение. Ставајќи

$$a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_{n+1}-a_n=d\,,$$

и множејќи го даденото равенство со d , имаме $Sd=\frac{d}{a_1a_2}+\frac{d}{a_2a_3}+...+\frac{d}{a_na_{n+1}}$, т.е.

$$Sd=\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+...+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}=\frac{nd}{a_1a_{n+1}}.$$

Според тоа,

$$S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$$

17. Ако $a>b>c>d>0$ и a,b,c,d се четири последователни членови на аритметичка прогресија, докажи дека

$$a^n+d^n>b^n+c^n\,.$$

Решение. Од $a>b>c>d$ следува неравенството

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1}>c^{n-1}+c^{n-2}d+...+d^{n-1}. \qquad (1)$$

Бидејќи, пак, a,b,c,d се последователни членови на аритметичка прогресија и $a>b>c>d$, следува дека

$$a-b=c-d>0. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) го добиваме неравенството

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})>(c-d)(c^{n-1}+c^{-2}d+...+d^{n-1})$$

т.е.

$$a^n-b^n>c^n-d^n.$$

18. Нека $a_1,a_2,...$ е аритметичка прогресија со разлика d. Да се пресмета

$$S_n=a_1^2+a_4^2+a_7^2+...+a_{3n-2}^2-a_2^2-a_5^2-...-a_{3n-1}^2,$$

т.е. да се изрази S_n преку a_1,d и n.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}S_n&=a_1^2+a_4^2+a_7^2+...+a_{3n-2}^2-a_2^2-a_5^2-a_8^2-...-a_{3n-1}^2\\&=a_1^2-a_2^2+a_4^2-a_5^2+...+a_{3n-2}^2-a_{3n-1}^2\\&=(a_1-a_2)(a_1+a_2)+(a_4-a_5)(a_4+a_5)+...+(a_{3n-2}-a_{3n-1})(a_{3n-2}+a_{3n-1})\\&=-d(a_1+a_2+a_4+a_5+...+a_{3n-2}+a_{3n-1})\\&=-d(a_1+a_4+a_7+...+a_{3n-2}+a_2+a_5+...+a_{3n-1})\\&=-d[(2a_1+(n-1)3d)\tfrac{n}{2}+(2a_2+(n-1)3d)\tfrac{n}{2}]\\&=-dn(2a_1+(3n-2)d).\end{aligned}$$

19. Определи ги сите аритметички прогресии со разлика $d=2$, така што односот $\frac{S_{3n}}{S_n}$ не зависи од n.

Решение. Нека првиот член на аритметичката прогресија која го задоволува дадениот услов е a_1. Сумата на првите k-членови на оваа прогресија е

$$S_k=\tfrac{k}{2}[2a_1+(k-1)\cdot 2]=k(a_1+k-1).$$

Од условот следува дека за $n=1$ и $n=2$ важи $\frac{S_3}{S_1}=\frac{S_6}{S_2}$ од каде што ја добиваме равенката $\frac{3(a_1+2)}{a_1}=\frac{6(a_1+5)}{2(a_1+1)}$, чие единствено решение е $a_1=1$.

Значи, ако некоја прогресија со разлика 2 го задоволува дадениот услов, тогаш таа има прв член $a_1=1$.

Обратно, ако $a_1=1$, тогаш

$$\frac{S_{3n}}{S_n}=\frac{3n(1+3n-1)}{n(1+n-1)}=9,$$

па значи, дадениот однос не зависи од n.

Значи, постои само една таква прогресија и тоа 1, 3, 5, ...

20. Определи ги сите природни броеви n, за кои постојат три последователни коефициенти во развојот на $(a+b)^n$ кои што формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{k+1}$ се три последователни коефициенти на развојот на $(a+b)^n$, при што $0<k<n$. Потребен и доволен услов да овие три коефициенти формираат аритметичка прогресија е:

$$2\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k+1},$$

од каде што, по средувањето, добиваме:

$$4k^2-4nk+n^2-n-2=0. \tag{1}$$

Значи, бараните броеви се сите оние $n\in\mathbb{N}$ за кои равенката (1) има барем едно целобројно решение k така што $0<k<n$. Решенијата на равенката се

$$k_{1/2}=\tfrac{n\pm\sqrt{n+2}}{2}.$$

Бидејќи треба да важи $0<k_1<n$ или $0<k_2<n$, добиваме $-n<\sqrt{n+2}<n$. Условот $-n<\sqrt{n+2}$ е секако исполнет за $n\in\mathbb{N}$, а условот $\sqrt{n+2}<n$ е исполнет за $n\ge 3$.

Обратно, ако $n\ge 3$, тогаш важи $0<k_1<k_2<n$. За да барем едно решение на равенката (1) биде цел број потребно е $n+2$ да е квадрат на природен број, т.е. $n+2=s^2$ за некој $s\in\mathbb{N}$.

Обратно, ако $n+2=s^2$ за некој $s\in\mathbb{N}$, решенијата на равенката (1) се:

$$k_{1/2}=\tfrac{s(s\pm1)}{2}-1,$$

а овие два броја се цели бидејќи $s(s-1)$ и $s(s+1)$ се производи на последователни броеви, па значи, деливи се со 2.

Конечно, заклучуваме дека бараните броеви се: $n=s^2-2$, за $s=3,4,5,\ldots.$

21. Нека $a_1,a_2,\ldots$ е бесконечна аритметичка прогреија чии членови се цели броеви. Докажи дека ако во дадената аритметичка прогреија постои член кој е куб на цел број, тогаш бесконечно многу членови на прогресијата се кубови на цели броеви.

Решение. Бидејќи членовите на прогресијата се цели цели броеви, јасно е дека разликата d е цел број. Нека важи $a_k=n^3$, каде n е цел број. Ако $d=0$, тогаш сите членови на прогресијата се еднакви на $a\ \ =n^3$, односно сите се кубови на цел број. Да претпоставиме дека разликата d не е нула. Имаме

$$\begin{aligned}(n+d)^3&=n^3+3n^2d+3nd^2+d^3\\&=a_k+(3n^2+3nd+d^2)d\\&=a_{k+(3n^2+3nd+d^2)}\end{aligned}$$

и поопшто

$$\begin{aligned}(n+id)^3 &= n^3+3n^2id+3ni^2d^2+i^3d^3\\ &= a_k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)d\\ &= a_{k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)}\end{aligned}$$

Бидејќи за различни природни броеви i на левата страна на последното равенство фигурираат кубови на различни цели броеви ($d \neq 0$), јасно е дека дадената прогресија содржи бесконечно многу членови кои се кубови на цели броеви, но само под услов бројот

$$k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)$$

да е позитивен за секој ненегативен цел број i (бидејќи е тоа очигледно за $i=0$, доволно е да се разгледува само случајот кога i е природен број). Но, дискриминантата на квадратниот трином $i^3d^2+3ni^2d+3n^2i$ е $D=-3n^2i^4 \leq 0$, а за главниот коефициент i^3 важи $i^3>0$, па значи $i^3d^2+3ni^2d+3n^2i \geq 0$, од каде следува дека $k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)$ е позитивен број.

22. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се членови на аритметичка прогресија. Докажи дека

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_2}+\frac{1}{a_1a_n}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right).$$

Решение. Бидејќи $a_1,a_2,...,a_n$ е аритметичка прогресија, следува:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=....=a_n+a_1$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_2}+\frac{1}{a_1a_n} &= \frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{1}{a_2+a_{n-1}}\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)+...+\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)\\ &= \frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)\\ &= \frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right).\end{aligned}$$

23. Пополнете ги празните полиња во таблицата така што броевите во секоја редица и во секоја колона да формираат аритметичка прогресија.

k		n		21
l	16	m		
		27		
1				

Решение. Нека броевите од првата редица формираат аритметичка прогресија со разлика d, а броевите од втората колона формираат аритметичка прогресија со разлика d_1. Тогаш важат следните равенства: $21=k+4d$, $1=k+4d_1$, од каде што добиваме

$$d-d_1=5. \qquad (1)$$

За елементите k,l,m,n важат следните равенства

$$l=k+d_1 \qquad (2)$$

$$n=k+2d \qquad (3)$$

$$n=l+2(16-l) \qquad (4)$$

$$27=n+2(m-n). \qquad (5)$$

13	15	17	19	21
10	16	22	28	34
7	17	27	37	47
4	18	32	46	60
1	19	37	55	73

Ако од (2), (3) и (4) замениме во (5) и земеме предвид дека $k = l - 4d_1$ добиваме

$$5d_1 - d = -17 \qquad (6)$$

Од (1) и (6) наоѓаме $d = 2$, $d_1 = -3$. Сега можеме да ја пополниме таблицата.

24. Броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ се последователни членови на аритметичка прогресија, а и броевите $\cos a_1, \cos a_2, ..., \cos a_n$ се исто така последователни членови на аритметичка прогресија. Одреди го n, ако $\cos a_1 = \frac{1}{2}$, а $\cos a_n = -\frac{1}{2}$.

Решение. Нека d е разлката на првата прогресија. Тогаш:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$$

и за секој $1 < k < n$ важи $\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} = a_k$. Исто така за втората прогресија имаме

$$2\cos a_k = \cos a_{k-1} + \cos a_{k+1} = 2\cos\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}\cos\frac{a_{k+1}-a_{k-1}}{2} = 2\cos a_k \cos d .$$

Оттука $\cos a_k(1-\cos d) = 0$. Ако $1-\cos d = 0$, тогаш $d = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, па од условот $a_n = a_1 + (n-1)d$ следува $\cos a_n = \cos a_1$, што противречи на условите

$$\cos a_1 = \frac{1}{2}, \quad \cos a_n = -\frac{1}{2}.$$

Значи, $\cos a_n = 0$ за секој $k, 1 < k < n$, па прогресијата е:

$$\cos a_1 = \frac{1}{2}, \quad \cos a_2 = 0, \ \cos a_3 = 0, \ldots, \cos a_{n-1} = 0, \ \cos a_n = -\frac{1}{2},$$

а при аритметичка прогресија тоа е можно само ако низата има три члена. Значи, $n = 3$ и во овој случај низите се $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ и $\cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{2\pi}{3}$.

25. Нека $a_0, a_1, a_2, ..., a_{2n}, a_{2n+1}$ е растечка аритметичка прогресија со позитивни членови. Докажи дека

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}} < \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + ... + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} < \frac{n}{a_0 a_{2n}}$$

Решение. Бидејќи прогресијата е растечка, точни се неравенствата

$$\frac{1}{a_0 a_1} < \frac{1}{a_1 a_2} < \frac{1}{a_2 a_3} < ... < \frac{1}{a_{2n-2} a_{2n-1}} < \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}.$$

Да ја означиме со d разликата на прогресијата и нека

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + ... + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}.$$

Тогаш за удвоената сума $2S$, имајќи ги предвид горните неравенства, имаме:

$$\begin{aligned} 2S &= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \frac{1}{a_3 a_4} + ... + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} \\ &< \frac{1}{a_0 a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_{2n-2} a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} \\ &= \frac{1}{d}(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n}}) \\ &= \frac{1}{d}(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{2n}}) = \frac{1}{d}\frac{a_0 + 2nd - a_0}{a_0 a_{2n}} = \frac{2n}{a_0 a_{2n}} \end{aligned}$$

Значи, $S < \frac{n}{a_0 a_{2n}}$.

На сличен начин добиваме

$$\begin{aligned}2S&=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\\&>\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\frac{1}{a_4a_5}+...+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}\\&=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2n+1}})=\frac{1}{d}\frac{a_1+2nd-a_1}{a_1a_{2n+1}}=\frac{2n}{a_1a_{2n+1}}\end{aligned}$$

Значи, $S>\frac{n}{a_1a_{2n+1}}$.

Конечно, $\frac{n}{a_1a_{2n+1}}<S<\frac{n}{a_0a_{2n}}$.

26. Биномните коефициенти на вториот, третиот и четвртиот член во развојот на биномот $(1+x)^n$ образуваат аритметичка прогресија. Пресметај го n .

Решение. Имаме $\binom{n}{2}-\binom{n}{1}=\binom{n}{3}-\binom{n}{2}$. Со средување се добива $n^2-9n+14=0.$ Решенија се $n_1=7$ и $n_2=2$, но за $n_2=2$ задачата нема смисла. Значи $n=7$.

27. Броевите $a_1,a_2,...,a_n$ образуваат аритметичка прогресија. Докажи дека

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}a_k^2=\frac{n}{2n-1}(a_1^2-a_{2n}^2)\ .$$

Решение. Ќе ја користиме формулата за општиот член на аритметичката прогресија и формулата за збирот S_k на првите k членови на аритметичка прогресија, при што добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k^2&=(a_1^2-a_2^2)+(a_3^2-a_4^2)+...+(a_{2n-1}^2-a_{2n}^2)\\&=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}^2-a_{2k}^2)=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}-a_{2k})(a_{2k-1}+a_{2k})\\&=-d\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=-d\sum_{k=1}^{n}(2a_{2k-1}+d)\\&=-d(nd+2\sum_{k=1}^{n}(a_1+(2k-2)d))=-nd(2a_1+(2n-1)d)\end{aligned}$$

Од друга страна

$$\frac{n}{2n-1}(a_1^2-a_{2n}^2)=\frac{n}{2n-1}(a_1-a_{2n})(a_1+a_{2n})=-nd(2a_1+(2n-1)d)\ .$$

28. Нека $k,n\in\mathbb{N}$. Најди ги сите аритметички прогресии такви што односот на збирот на првите n членови и збирот на следните kn членови не зависи од n .

Решение. Нека

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}}=c \qquad (1)$$

и нека d е разликата на прогресијата.

Ако $d=0$, тогаш сите членови на прогресијата се еднакви, па

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}}=\frac{na_1}{kna_{n+1}}=\frac{1}{k}.$$

Значи бараниот однос не зависи од n за секој $k\in\mathbb{N}$.

Затоа нека $d\neq 0$. Применувајќи ја формулата за сума на n и kn членови на аритметичката прогресија, од (1) добиваме: $\frac{n}{2}(a_1+a_n)=k\frac{n}{2}(a_{n+1}+a_{n+kn})c$, т.е.

$$a_1+a_1+(n-1)d=ck(a_1+nd+a_1+(n+kn-1)d).$$

Оттука

$$2a_1-2a_1kc-d+ckd+n(d-cdk^2-2cdk)=0.$$

Последново равенство е еквивалентно со (1) и од условот на задачата следува дека е исполнето за секој $n\in\mathbb{N}$. Тоа е можно ако и само ако

$$2a_1-2a_1kc-d+ckd=0 \text{ и } d-cdk^2-2cdk=0. \qquad (2)$$

Првото равенство од (2) е еквивалентно со $(2a_1-d)(1-ck)=0$. Делејќи го второто равенство со $d\neq 0$ добиваме $c=\frac{1}{k(k+2)}$, па со замена во $(2a_1-d)(1-ck)=0$ имаме

$$1-ck=1-k\frac{1}{k(k+2)}=\frac{2k}{k(k+2)}\neq 0,$$

па $d=2a_1$. Според тоа (1) е исполнето само за прогресијата $a,3a,5a,...$.

Обратно, за прогресијата $a,3a,5a,...$ имаме

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}}=\frac{\frac{n}{2}(2a+(n-1)2a)}{k\frac{n}{2}(a+2an+a+(n+kn-1)2a)}=\frac{1}{k(k+2)},$$

па бараниот однос не зависи од n.

Значи бараните прогресии се $a,a,a,...$ и $a,3a,5a,...$.

29. Во една аритметичка прогресија збирот на првите m члена е еднаков на збирот на првите n члена ($m\neq n$).

Докажи дека збирот на првите $m+n$ члена не зависи од a_1 (првиот член) и d (разликата на прогресијата).

Решение. Имаме $S_m=ma_1+\frac{dm(m-1)}{2}$ и $S_n=na_1+\frac{dn(n-1)}{2}$. Од $S_m=S_n$ добиваме

$$a_1(m-n)+\frac{d}{2}(m^2-m-n^2+n)=0,$$

т.е.

$$a_1(m-n)+\frac{d}{2}(m-n)(m+n-1)=0.$$

Од последново равенство, заради $m\neq n$, добиваме

$$a_1+\frac{d}{2}(m+n-1)=0,$$

т.е.

$$2a_1+d(m+n-1)=0.$$

Сега,

$$S_{m+n}=(m+n)a_1+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}d=\frac{1}{2}(m+n)(2a_1+(m+n-1)d)=0,$$

па S_{m+n} не зависи од a_1 и од d.

30. Реши ја равенката $x^3+(k-1)x^2-kx=0$, ако нејзините решенија се последователни членови на една аритметичка прогресија.

Решение. Решенијата на равенката се $0,1,-k$. Од тоа што тие се последователни членови на една аритметичка прогресија следува дека $k\neq 0,-1$. Значи равенката има три различни реални решенија кои ги исполнуваат условите на задачата. Ако $k\in(-\infty,-1)$, тогаш $-k>1$, па редоследот на корените е $0,1,-k$. Разликата на аритметичката прогресија ќе биде $1-0=1$, па $-k=2$, т.е. $k=-2$. Ако $k\in(-1,0)$, тогаш $-k\in(0,1)$, па редоследот на корените е $0,-k,1$. Од $-k-0=1-(-k)$ добиваме $k=-\frac{1}{2}$, т.е. $-k=\frac{1}{2}$. Ако $k\in(0,\infty)$, тогаш $-k\in(-\infty,0)$, па редоследот е $-k,0,1$. Во овој случај прогресијата има разлика 1, па $-k=-1$.

31. Дали постои реален број y така што броевите $\sqrt{y^2+2y+1}$, $\frac{y^2+3y-1}{3}$, $y-1$ во дадениот редослед, се три последователни членови на аритметичка прогресија? Образложи го одговорот.

Решение. Ако p,q,r се три последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш збирот на првиот и третиот по ред член е двојна вредност од вториот член, т. е. $p+r=2q$. Овој услов во нашиот случај, го добива обликот

$$\sqrt{y^2+2y+1}+y-1=2\frac{y^2+3y-1}{3} \text{ или } 3(\sqrt{(y+1)^2}+y-1)=2(y^2+3y-1) \ .$$

Бидејќи $\sqrt{(y+1)^2}=|y+1|$, добиваме

$$3(|y+1|+y-1)=2(y^2+3y1-1)\,.$$

Ако последната равенка ја средиме, добиваме

$$2y^2+3y-3|y+1|+1=0\,. \qquad (1)$$

Равенката (1) е еквивалентна со вкупноста на системите

$$\begin{cases} y+1\geq 0 \\ y^2+3y-3(y+1)+1=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y+1<0 \\ y^2+3y+3(y+1)+1=0 \end{cases},$$

од каде по средувањето истите може да се запишат во облик

$$\begin{cases} y\geq -1 \\ y^2-1=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y<-1 \\ y^2+3y+2=0 \end{cases}.$$

Решение на првиот систем е $y=1$ или $y=-1$, а решение на вториот систем е $y=-2$.

Според тоа бараните броеви y за кои што $\sqrt{y^2+2y+1}$, $\frac{y^2+3y-1}{3}$, $y-1$ се последователни членови на аритметичка прогресија се $y\in\{-2,-1,1\}$.

32. Аритметичката прогресија се состои од цели броеви. Збирот на првите n членови на прогресијата е степен на бројот 2. Докажи дека и n е степен на бројот 2.

Решение. Нека првиот член на аритметичката прогресија е a, n-тиот член е b а разликата е d. Нека S е збирот на првите n членови на прогресијата. Тогаш

$$\begin{aligned} S &= a+(a+d)+(a+2d)+...+(a+(n-1)d) \\ &= na+d(1+2+...+n-1) = na+\tfrac{(n-1)n}{2}d \\ &= \tfrac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right] = \tfrac{n}{2}[a+a+(n-1)d] \\ &= \tfrac{n}{2}(a+b). \end{aligned}$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$2S=(a+b)n\,. \qquad (1)$$

Бидејќи S е степен на бројот 2, постои $k\in\mathbb{N}$ така што $S=2^k$. Од равенството (1) добиваме

$$2^{k+1}=(a+b)n\,.$$

Значи, каноничната репрезентација на $(a+b)n$ е еднаква на 2^{k+1}, па затоа $a+b$ и n немаат делители различни од 2. Според тоа, постојат броеви p и q такви што

$$a+b=2^p \text{ и } n=2^q,$$

при што $p+q=k+1$.

33. Докажи дека ако страните на триаголникот образуваат аритметичка прогресија, тогаш радиусот на впишаната кружница е $\frac{1}{3}$ од должината на висината спуштена кон средната по големина страна.

Решение. Нека a, $a+d$, $a+2d$ се страни на триаголникот, h е висина спуштена на страната $a+d$, r е радиусот на впишаната кружница. Плоштината на триаголникот е $P=\frac{(a+d)h}{2}$, а од друга страна

$$P=sr=\tfrac{a+(a+d)+(a+2d)}{2}r=\tfrac{3(a+d)r}{2}\,.$$

Па, $\frac{(a+d)h}{2}=\frac{3(a+d)r}{2}$, од каде $h=3r$, односно $r=\frac{1}{3}h$.

34. Во еден триаголник должините на страните a,b,c во дадениот редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека

$$\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}=\tfrac{1}{3}$$

(α е агол спроти страната a; γ е агол спроти страната c).

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$. Ако замениме во равенството $a+c=2b$ добиваме $\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\beta$. Ако ги искористиме идентитетите $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ и $\sin 2x=2\sin x\cos x$, добиваме

$$2\sin\tfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\tfrac{\alpha-\gamma}{2}=2\sin\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\,.$$

Од друга страна, заради равенството $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sin(90^\circ-\frac{\beta}{2})=\cos\frac{\beta}{2}$, со алгебарски транформации добиваме

$$\cos\frac{\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-2\sin\frac{\beta}{2})=0.$$

Бидејќи $\cos\frac{\beta}{2}\neq 0$ и $\sin\frac{\beta}{2}=\cos(90^\circ-\frac{\beta}{2})=\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, добиваме

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=0.$$

Сега заради формулате $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$ имаме

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=0$$

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

од каде се добива точноста на бараното равенство.

35. Во $\triangle ABC$ тежишната линија повлечена од темето A е нормална на страната AB. Да се најде $\cos\measuredangle CAB$ ако аглите на $\triangle ABC$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека M е средината на AB. Ќе ги користиме стан-дардните ознаки за страните и аглите на $\triangle ABC$. Од правоаголниот $\triangle ABM$ следува дека $\overline{AM}^2=\frac{a^2}{4}-c^2$, т.е. $4\overline{AM}^2=a^2-4c^2$. Од формулата за тежишната линија имаме $4\overline{AM}^2=2b^2+2c^2-a^2$. Од последните две равенства следува дека

$$a^2-4c^2=2b^2+2c^2-a^2$$

односно

$$a^2=b^2+3c^2. \qquad (1)$$

Од косинусната теорема имаме $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ и ако замениме од (1) наоѓаме $\cos\alpha=-\frac{b}{c}$. Од $\alpha>90^\circ$ следува $a>b$ и $a>c$. Од друга страна од $\triangle ABM$ и $\triangle AMC$ ($\measuredangle AMC>90^\circ$) следува дека $c<\frac{a}{2}<b$ што заедно со претходните две неравенства дава $c<b<a$. Бидејќи спроти помала страна лежи помал агол добиваме $\gamma<\beta<\alpha$ и како аглите на триаголникот формираат аритметичка прогресија имаме $2\beta=\alpha+\gamma=180^\circ-\beta$ т.е. $\beta=60^\circ$. Тогаш, $a=4c$ и ако замениме во (1) наоѓаме $b=c\sqrt{13}$. Конечно, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{13}}$.

36. Во $\triangle ABC$ тежишната линија повлечена од темето A е нормална на страната AB. Да се најде $\cos\measuredangle CAB$ ако должините на страните на $\triangle ABC$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека M е средината на AB. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните и аглите на $\Delta ABC.$ Од правоаголниот ΔABM следува дека $\overline{AM}^2=\frac{a^2}{4}-c^2$ т.е. $4\overline{AM}^2=a^2-4c^2$. Од формулата за тежишната линија имаме

$4\overline{AM}^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Од последните две равенства следува дека $a^2 - 4c^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ односно

$$a^2 = b^2 + 3c^2 \qquad (1)$$

Од косинусната теорема имаме $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ и ако замениме од (1) наоѓаме $\cos\alpha = -\frac{b}{c}$. Од $\alpha > 90^0$ следува дека $a > b$ и $a > c$. Од друга страна од $\triangle ABM$ и $\triangle AMC$ ($\measuredangle AMC > 90^0$) следува дека $c < \frac{a}{2} < b$ што заедно со претходните две неравенства дава $c < b < a$. Бидејќи страните на триаголникот формираат аритметичка прогресија имаме $2b = a + c$ т.е. $a = 2b - c$. Ако замениме во (1) добиваме $2c^2 + 4bc - 3b^2 = 0$. Сега, од последната равенка наоѓаме

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{10}-2}{2}, \text{ па затоа } \cos\alpha = \frac{2-\sqrt{10}}{2}.$$

37. Докажи дека за секој природен број n, постои множество од n сложени броеви кои формираат аритметичка прогресија, и кои се попарно заемно прости.

Решение. Ако N е природен број, тогаш за било кој $k, 2 \le k \le N$ бројот $N! + k$ е сложен број. За природниот број n ќе избереме прост број p таков што $p > n$ и природен број N, $N > p + (p-1)n!$. Сега ќе ја разгледаме конечната низа од n природни броеви

$$N! + p, N! + p + n!, N! + p + 2\cdot n!, ..., N! + p + (n-1)n!.$$

Јасно, овие броеви се членови од аритметичка прогресија. Доволно е да докажеме дека тие се попарно взаемно прости.

Нека q е заенички делител на некои два од нив. Тогаш q е елител и на нивната разлика, која е од облик $j \cdot n!$, $0 < j < n!$. Според тоа, $q \le n$, од каде што добиваме дека $q \le N$. Според тоа, $q \mid n!$ и $q \mid N!$. Ако едниот од броевите делив со q е $N! + p + k\cdot n!$, тогаш од претходното следува

$$q \mid N! + p + k\cdot n! - n! - N! = p.$$

Бидејќи p е прост број и $p > n$, имаме $q \le n < p$, $q \mid p$ и p е прост број, што не е можно. Заради добиената контрадикција, избраните броеви се попарно заемно прости.

2. ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. Најди го количникот на геометриската прогресија, ако $a_1 = 3$ и $a_5 = 12288$.

Решение. Ако ја искористиме формулата (3) добиваме $12288 = 3q^4$, од што следува $q^4 = 4096$, па затоа $q = \sqrt[4]{4096} = 8$.

2. Првиот член на геометриската низа е еднаков на 1, а збирот на третиот и петтиот член е еднаков на 90. Најди ја низата.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$90 = a_3 + a_5 = a_1q^2 + a_1q^4 = q^2 + q^4 .$$

Во последната равенка воведуваме смена $q^2 = t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2 + t - 90 = 0$ чии решенија се $t_1 = -10$ и $t_2 = 9$. Понатаму, равенката $q^2 = -10$ нема решенија во множеството реални броеви, а од равенката $q^2 = 9$ добиваме $q = \pm 3$. Според тоа, постојат две прогресии кои ги задоволуваат условите на задачата и тоа:

$i)$ $a_1 = 1, q = -3$ и $ii)$ $a_1 = 1, q = 3$.

3. Најди ја геометриската низа за која важи

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 15 \\ a_2 + a_4 = 30. \end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен на системот равенки

$$\begin{cases} a_1 + a_1q^2 = 15 \\ a_1q + a_1q^3 = 30 \end{cases}$$

и ако ги поделиме равенките добиваме $\frac{a_1 + a_1q^2}{a_1q + a_1q^3} = \frac{1}{2}$ т.е. $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, па затоа $q = 2$. Понатаму, со замена во првата равенка наоѓаме $a_1 + 4a_1 = 15$, т.е. $a_1 = 3$.

4. Бројот 9750 подели го на четири собирци кои формираат геометрсика прогресија и така што односот на разликата на првиот и четвртиот член и разликата на вториот и третиот член е еднаков на $19:6$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$\frac{a_1 - a_4}{a_2 - a_3} = \frac{19}{6},$$

па затоа

$$\frac{a_1 - a_1q^3}{a_1q - a_1q^2} = \frac{19}{6},$$

од што добиваме

$$\frac{1 - q^3}{q - q^2} = \frac{19}{6},$$

т.е.

$$\frac{(1-q)(1+q+q^2)}{q(1-q)} = \frac{19}{6}.$$

Од последната равенка ја добиваме равенката

$$6q^2 - 13q + 6 = 0$$

чии решенија се $q_1 = \frac{3}{2}$ и $q_2 = \frac{2}{3}$.

Понатаму,

$$9750 = S_4 = a_1 \frac{1 - q^4}{1 - q},$$

од каде за $q_1 = \frac{3}{2}$ наоѓаме

$$a_1 = 1200,\ \ a_2 = 1800,\ \ a_3 = 2700 \text{ и } a_4 = 4050,$$

а за $q_2 = \frac{2}{3}$ наоѓаме

$$a_1 = 4050,\ \ a_2 = 2700,\ \ a_3 = 1800 \text{ и } a_4 = 1200$$

што значи дека постои единствена поделба која ги задоволува условите на задачата.

5. Нека A е збирот на членовите на една конечна геометриска прогресија (членовите се позитивни) и B е збирот на нивните реципрочни вредности. Најди го производот на членовите на прогресијата.

Решение. Нека членовите на геометриската прогресија се $a_1, a_2, ..., a_n$. Ако со q го означиме количникот на прогресијата тогаш

$$P = a_1 a_2 ... a_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (a_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}} .$$

Од друга страна важи

$$a_i a_{n+1-i} = a_1 q^{i-1} a_1 q^{n-i} = a_1 a_1 q^{n-1} = a_1 a_n ,$$

за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Тогаш

$$\begin{aligned} A &= a_1 + a_2 + ... + a_n \\ &= \frac{a_1 a_n}{a_n} + \frac{a_2 a_{n-1}}{a_{n-1}} + ... + \frac{a_n a_1}{a_1} \\ &= a_1 a_n \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + ... + \frac{1}{a_1}\right) = a_1 a_n B \end{aligned}$$

Значи $a_1 a_n = \frac{A}{B}$, а оттука $P = (\frac{A}{B})^{\frac{n}{2}}$.

6. Во геометриската прогресија $a_1, a_2, ...$ дадени се членовите $A = a_{m+n}$ и $B = a_{m-n}$. Најди ги a_m и a_n.

Решение. Нека q е количникот на прогресијата. Тогаш $A = a_{m+n} = a_1 q^{m+n-1}$ и $B = a_{m-n} = a_1 q^{m-n-1}$. Оттука $q^{2n} = \frac{A}{B}$, па $q = \sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$. Според тоа

$$a_m = a_1 q^{m-1} = a_1 q^{m-n-1} q^n = a_{m-n} q^n = B(\ \ )(\sqrt[2n]{\frac{A}{B}})^n = \sqrt{AB} \quad \text{и}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = a_1 q^{m+n-1} q^{-m} = a_{m+n} q^{-m} = A(\frac{A}{B})^{-\frac{m}{2n}} = A^{1-\frac{m}{2n}} B^{\frac{m}{2n}} .$$

7. Сумата на членовите од една бескрајна опаѓачка геометриска прогресија што стојат на непарни места е 36, а сумата на членовите што стојат на парни места од истата геометриска прогресија е 12. Да се најде прогресијата.

Решение. Ако $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е бесконечна опаѓачка геометриска прогресија со количник q, тогаш низите $a_1, a_3, ..., a_{2k+1}, ...$ и $a_2, a_4, ..., a_{2k}, ...$, се бесконечни геометриски прогресии со количник q^2. Според условот на задачата, последните две низи имаат збир 36 и 12 соодветно, т.е.

$$\frac{a_1}{1-q^2}=36 \text{ и } \frac{a_2}{1-q^2}=12 \ .$$

Имајќи предвид дека $a_2=a_1q$, со решавање на системот

$$\frac{a_1}{1-q^2}=36,\ \frac{a_1q}{1-q^2}=12\ ,$$

добиваме дека $a_1=32$, $q=\frac{1}{3}$.

Значи, бараната прогресија гласи: $32,\frac{32}{3},\frac{32}{9},\dots$.

8. Докажи го идентитетот

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-1}=\frac{x[1+(-1)^{n-1}x^{2n}]}{1+x^2}\ .$$

Упатство. Левата страна е збир на n членови на геометриска прогресија со количник $q=-x^2$. Со примена на формулата за збир на геометриска прогресија, ја добиваме десната страна. Равенството може да се докаже со примена на методот на математичка индукција.

11. Пресметај го збирот:

а) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^{2k+1}}$,

б) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}10^{(2k+1)\log 5}$.

Решение. а) Ова е специјален случај на претходната задача со $x=-\frac{1}{2}$, а бројот на собироци е $n+1$. Заради тоа

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^{2k+1}}=-\frac{2}{5}[1+(-1)^{n}\frac{1}{2^{2n+2}}]\ .$$

б) И во овој случај збирот може да се најде со помош на идентитетот од претходната задача ставајќи $x=5$, $(10^{\log 5}=5)$, каде бројот на членови е $n+1$. Добиваме

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}10^{(2k+1)\log 5}=\frac{5}{26}[1+(-1)^{n}5^{2n+2}]\ .$$

12. Определи го збирот

$$(\sum_{k=0}^{n}x^k)^2-x^n\text{, за } x\neq 1,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Упатство. Користи ја формулата за збир на геометриска прогесија во збирот од првата заграда.

13. Да се пресмета збирот

$$S_n=(x+\frac{1}{x})^2+(x^2+\frac{1}{x^2})^2+..+(x^n+\frac{1}{x^n})^2\ ,\ n\in\mathbb{N}\ .$$

Решение. За $x\neq\pm1$,

$$\begin{aligned} S_n &= (x+\tfrac{1}{x})^2+(x^2+\tfrac{1}{x^2})^2+..+(x^n+\tfrac{1}{x^n})^2 \\ &= (x^2+2+\tfrac{1}{x^2})+(x^4+2+\tfrac{1}{x^4})+..+(x^{2n}+2+\tfrac{1}{x^{2n}}) \\ &= x^2+x^4+...+x^{2n}+\tfrac{1}{x^2}+\tfrac{1}{x^4}+...+\tfrac{1}{x^{2n}}+2n \\ &= \tfrac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2}+\tfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)}+2n=\tfrac{(x^{2n}-1)(1+x^{2n+2})}{x^{2n}(x^2-1)}+2n \end{aligned}$$

(Притоа, $x^2+x^4+...+x^{2n}$ и $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+...+\frac{1}{x^{2n}}$ се геометриски прогресии).

За $x=\pm1$, $S=2^2+2^2+2^2+...+2^2=4n$.

14. Нека $a_1,a_2,....$ е аритметичка прогресија со разлика d, а $b_1,b_2,....$ е геометриска прогресија со количник $q, q\neq 1$. Пресметајте го збирот

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\,.$$

Решение. Бидејќи за секој природен број k важи

$$a_k=a_1+(k-1)d\ ;\ b_k=b_1q^{k-1}$$

за S_n добиваме:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n \\ &= a_1b_1(1+q+q^2+...+q^{n-1})+db_1q(1+2q+...+(n-1)q^{n-2}) \\ &= a_1b_1\tfrac{1-q^n}{1-q}+db_1q(1+2q+...+(n-1)q^{n-2}) \\ &= a_1b_1\tfrac{1-q^n}{1-q}+db_1q\tfrac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

Збирот $A_n=1+2q+...+(n-1)q^{n-2}$ се пресметува на следниот начин:

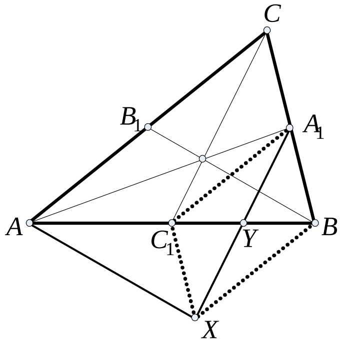
$$\begin{aligned} A_n &= 1+2q+...+(n-1)q^{n-1} \\ &= (1+q+...+q^{n-1})+(q+q^2+...+q^{n-2})+...+(q^{n-3}+q^{n-2})+q^{n-2} \\ &= \tfrac{1-q^{n-1}}{1-q}+q\tfrac{1-q^{n-2}}{1-q}+q^2\tfrac{1-q^{n-3}}{1-q}+...+q^{n-3}\tfrac{1-q^2}{1-q}+q^{n-2} \\ &= \tfrac{1+q+q^2+...+q^{n-2}-(n-1)q^{n-1}}{1-q} \\ &= \tfrac{\frac{1-q^{n-1}}{1-q}-(n-1)q^{n-1}}{1-q}=\tfrac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

Поедноставно збирот A_n може да се пресмета на следниов наин. Имаме:

$$\begin{aligned} A_n-qA_n &= 1+2q+...+(n-1)q^{n-2}-(q+...+(n-2)q^{n-2}+(n-1)q^{n-1}) \\ &= 1+q+q^2+...+q^{n-2}+q^{n-1}-nq^{n-1} \\ &= \tfrac{1-q^n}{1-q}-nq^{n-1}=\tfrac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

па затоа $A_n=\frac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$.

15. Даден е триаголник ABC со плоштина P . Од неговите тежишни линии е конструиран друг триаголник, потоа од тежишни линии на вториот триаголник е конструиран трет триаголник итн. Општо, $(n+1)$ -от триаголник е конструиран од тежишните линии на n -тиот триаголник. Пресметај го збирот од плоштините на сите триаголници од така добиената низа.



Решение. Нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишните линии во $\triangle ABC$. Нека AXA_1 е триаголник така што $A_1X \parallel CC_1$, $BB_1 \parallel AX$. Страните на триаголникот AXA_1 имаат еднакви должини како и тежишните линии на триаголникот ABC . Од начинот на конструирањето на триаголникот AXA_1 јасно е дека секој триаголник што е констуиран од тежишните линии на $\triangle ABC$ има еднаква плоштина како и $\triangle AXA_1$. Четириаголникот XBA_1C_1 е паралелограм ($AXBB_1$ е паралелограм, бидејќи, од начинот на конструкција на $\triangle AXA_1$ следува дека $\overline{AX} = \overline{BB_1}$, $AX \parallel BB_1$; оттука следува $BX \parallel A_1C_1$, $\overline{A_1C_1} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{BX} = \frac{1}{2}\overline{AC}$), па следува дека точката Y е средина на отсечките A_1X и C_1B (пресек на дијагоналите) и $\overline{AY} = \frac{3}{4}\overline{AB}$. Значи триаголниците AYA_1 и AXY имаат иста плоштина. Ако h е висината на триаголникот ABC спуштена од темето C , тогаш јасно е дека висината на триаголникот AYA_1 спуштена од темето A_1 е $\frac{1}{2}h$. Нека P_1 е плоштината на триаголникот AXA_1 . Тогаш

$$P_1 = 2\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\overline{AB}\cdot\tfrac{1}{2}h = \tfrac{3}{4}P$$

Ако $P_2, P_3, ..., P_k, ...$ се плоштините на вториот, третиот,..., k -тиот триаголник итн, јасно е дека

$$P_2 = (\tfrac{3}{4})^2 P,\ P_3 = (\tfrac{3}{4})^3 P, ... ,\ P_k = (\tfrac{3}{4})^k P, ...$$

$$P + P_1 + P_2 + ... + P_k + ... = P\,(1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3^2}{4^2} + ... + \tfrac{3^k}{4^k} + ...) = P\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4P\ .$$

16. Дали можат броевите 2, $\sqrt{6}$ и $\frac{9}{2}$ да бидат членови на една аритметичка или на една геометриска прогресија?

Решение. Нека дадените броеви се членови на една аритметичка прогресија. Тогаш постои реалнен број d и природни броеви k и l така што $\sqrt{6} - 2 = kd,\ \frac{9}{2} - \sqrt{6} = ld$. Но, $\frac{k}{l} = \frac{\sqrt{6}-2}{\frac{9}{2}-\sqrt{6}} = \frac{2(11\sqrt{6}-30)}{57}$, а овој број не е рационален. Значи, не може дадените броеви да бидат членови на една аритметичка прогресија.

Дадените броеви се членови на некоја геометриска прогресија бидејќи

$$\frac{\sqrt{6}}{2} = q^k, \ \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{6}} = (\frac{\sqrt{6}}{2})^3 = q^{3k}$$

за некој природен број k.

17. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни последователни членови на геометриска прогресија. Ако се познати збировите

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$$

изрази го производот $a_1\ a_2 ... a_n$ само преку S, T и n.

Решение. Нека $q \neq 1$ е количникот на прогресијата тогаш од

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

добиваме

$$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = S \tag{1}$$

Од $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$ добиваме

$$\frac{1}{a_1} \frac{q^n - 1}{q - 1} \frac{1}{q^{n-1}} = T \tag{2}$$

Од (1) добиваме $\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{S}{a_1}$, па заменувајќи во (2) добиваме $q^{n-1} = \frac{S}{a_1^2 T}$. Сега

$$a_1\ a_2 ... a_n = a_1^n q^{1+2+3+...+n} = a_1^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = a_1^n (q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = a_1^n \left(\frac{S}{a_1^2 T} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{S}{T} \right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{S^n}{T^n}}$$

Ако $q = 1$, тогаш $na_1 = S$, $\frac{n}{a_1} = T$, па $a_1 = \sqrt{\frac{S}{T}}$. Оттука следува

$$a_1\ a_2 ... a_n = a_1^n = \sqrt{\frac{S^n}{T^n}}.$$

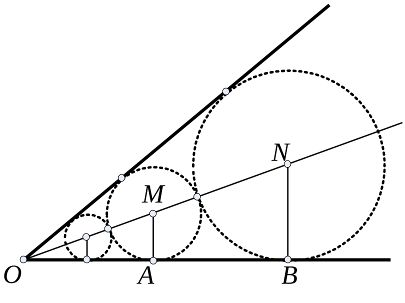
18. Кружница со радиус r ги допира краците на аголот $\alpha = 60^\circ$, втората помала кружница ги допира краците на аголот α и првата кружница, третата кружница ги допира краците на аголот α и втората кружница и т.н. Пресметај го збирот од:

а) периметрите

б) плоштините на сите кругови.

Решение. Нека $\overline{AM} = r_1$, $\overline{BN} = r$, $\overline{OM} = a$, $\overline{MN} = b$. Од сличноста на триаголниците OBN и OAM се добива $\frac{r}{r_1} = \frac{a+b}{a}$. Од друга страна $\sin 30^\circ = \frac{r_1}{a}$, па $a = 2r_1$. Значи

$$r = r_1(1 + \frac{b}{a}) = r_1(1 + \frac{b}{2r_1}) = r_1(1 + \frac{r + r_1}{2r_1}).$$



Добиваме дека $r_1 = \frac{r}{3}$. Аналогно $r_2 = \frac{r_1}{3} = \frac{r}{9}$ итн.

а) Збирот од периметрите е

$$2\pi(r+r_1+r_2+...)=2\pi(r+\tfrac{r}{3}+\tfrac{r}{9}+...)=2\pi r\tfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=3\pi r$$

б) Збирот од плоштините е

$$\pi(r^2+r_1{}^2+r_2{}^2+...)=\pi(r^2+\tfrac{r^2}{3^2}+\tfrac{r^4}{3^4}+...)=\pi r^2\tfrac{1}{1-\frac{1}{9}}=\tfrac{9}{8}\pi r^2 .$$

19. Нека q е реален број различен од 1. Ако

$$A_n=1+q+q^2+...+q^n \text{ и } B_n=1+\tfrac{1+q}{2}+(\tfrac{1+q}{2})^2+...+(\tfrac{1+q}{2})^n$$

докажи дека важи

$$\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}A_1+\binom{n+1}{3}A_2+...+\binom{n+1}{n+1}A_n=2^nB_n .$$

Решение. Јасно е дека

$$A_n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1};\quad B_n=\frac{(\frac{1+q}{2})^{n+1}-1}{\frac{1+q}{2}-1}=\frac{(1+q)^{n+1}-2^{n+1}}{(q-1)\cdot 2^n} .$$

Понатаму од биномната формула имаме

$$\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}A_1+...+\binom{n+1}{n+1}A_n=\tfrac{1}{q-1}[\binom{n+1}{1}(q-1)+\binom{n+1}{2}(q^2-1)+...+\binom{n+1}{n+1}(q^{n+1}-1)$$

$$=\tfrac{1}{q-1}((1+q)^{n+1}-(1+1)^{n+1})$$

$$=\frac{2^n}{2^n(q-1)}((1+q)^{n+1}-(1+1)^{n+1})=2^nB_n.$$

20. Најди го коефициентот пред x^3 во полиномот

$$P(x)=(1+x)^3+(1+x)^4+...+(1+x)^{15} .$$

Решение. Ако собироците во полиномот се разгледуваат како членови на геометриска прогресија и се искористи формулата за збир на геометриска прогресија добиваме

$$P(x)=\frac{(1+x)^3[(1+x)^{13}-1]}{1+x-1}=\tfrac{1}{x}[(1+x)^{16}-(1+x)^3],\ (x\neq 0,\ x\neq -1).$$

Коефициентот пред x^4 во разложувањето на полиномот $(1+x)^{16}$ е еднаков на коефициентот пред x^3 во полиномот P. Заради тоа според биномната формула бараниот коефициент е еднаков на $\binom{16}{4}=1820.$

21. Одреди го коефициентот пред x^m, $(m<n)$, во полиномот

$$P(x)=1+(1+x)+(1+x)^2+...+(1+x)^n .$$

Решение. Со примена на формулата за збир на геометриска прогресија од $n+1$ член, со количник $(1+x)$ за $x\neq -1$ добиваме

$$P(x)=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{1+x-1}=\tfrac{1}{x}[(1+x)^{n+1}-1]=\tfrac{1}{x}[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k-1]=\tfrac{1}{x}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k-1}$$

Значи, бараниот коефициент е $\binom{n+1}{m+1}$.

3. МОНОТОНИ, ОГРАНИЧЕНИ И КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

1. Докажи дека низата $a_n=\frac{1}{n}$, $n=1,2,3,\ldots$ конвергира кон бројот $a=0$.

Решение. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Од аксиомата на Архимед (за секој реален број постои природен број кој е поголем од него) следува дека постои природен број N таков што $N>\frac{1}{\varepsilon}$. Јасно, множеството природни броеви кои го задоволуваат претходното неравенство има најмал елемент. Нека тоа е бројот n_0. Сега, при $n>n_0$ имаме $n>\frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\frac{1}{n}<\varepsilon$, па затоа $|a_n-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

2. Дадена е низата $a_n=\frac{n^2+1}{2n^2}$, $n\geq 1$. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$.

Решение. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Имаме

$$\varepsilon>|a_n-a|=|\frac{n^2+1}{2n^2}-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2n^2}\text{, т.е. } n^2>\frac{1}{2\varepsilon},$$

односно $n>\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$. Според тоа, ако земеме природен број $n_0=[\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}]+1$, тогаш при $n>n_0$ наоѓаме $|a_n-a|<\varepsilon$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$.

3. Нека $a\in\mathbb{R}, |a|>1$. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$.

Решение. Ставаме $|a|=1+x$, каде што $x=|a|-1>0$. Од неравенството на Бернули следува дека за секој $n\geq 1$ важи

$$|a|^n=(1+x)^n\geq 1+nx>nx,$$

што значи $\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{nx}$. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Ибираме $n_0=[\frac{1}{x\varepsilon}]+1$ и добиваме дека за секој $n>n_0$ важи

$$|\frac{1}{a^n}-0|=\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{nx}<\varepsilon,$$

што значи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$.

4. Докажи дека

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Решение. За $n>1$ земаме $a_1=a_2=\sqrt{n}, a_3=a_4=\ldots=a_n=1$ и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$1<\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+(n-2)}{n}=\frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n}=1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

т.е. $0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $n_0=[\frac{4}{\varepsilon^2}]+1$ и добиваме дека за секој $n>n_0$ важи $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$, т.е. $\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, па затоа

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon\,,$$

што значи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

5. Пресметај ги границите на низите

а) $a_n=\frac{(n+1)^2}{2n^2},\ n\geq 1$, б) $a_n=\frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1},\ n\geq 1$,

в) $a_n=\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1},\ n\geq 1$, г) $a_n=\frac{n}{\sqrt{2n^2-n+1}},\ n\geq 1$,

д) $a_n=\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!},\ n\geq 1$, ѓ) $a_n=\frac{n!}{(n+1)!-n!},\ n\geq 1$,

е) $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2},\ n\geq 1$, ж) $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n},\ n\geq 1$,

з) $a_n=\sqrt{n^2+n}-n,\ n\geq 1$.

Решение. а) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2}=\frac{1+0+0}{2}=\frac{1}{2}\,,$$

б) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1000n^3+3n^2}{n^4}}{\frac{0{,}001n^4-100n^3+1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1000}{n}+\frac{3}{n^2}}{0{,}001-\frac{100}{n}+\frac{1}{n^4}}=\frac{0}{0{,}001}=0\,,$$

в) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n}}{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2+n}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt[3]{0+0}}{1+0}=0\,,$$

г) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{2n^2-n+1}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2n^2-n+1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

д) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+1)!+(n+1)!}{(n+3)(n+2)\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2+1)\cdot(n+1)!}{(n+3)(n+2)\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0\,,$$

ѓ) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1-1)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\,,$$

е) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\,.$$

ж) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+...+\frac{n-(n-1)}{(n-1)\cdot n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1\,.$$

з) Имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}\,.$$

6. Испитај ја монотоноста на низата:

а) $a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 1$, б) $a_n = \frac{n+2}{n}, n \geq 1$

Решение. а) Имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$$

и како $a_n > 0$ добиваме $a_{n+1} > a_n$, што значи дека низата монотоно расте.

б) Имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+3}{n+1}}{\frac{n+2}{n}} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+3n}{n^2+3n+2} = \frac{n^2+3n+2-2}{n^2+3n+2} = 1 - \frac{2}{n^2+3n+2} < 1$$

и како $a_n > 0$ добиваме $a_{n+1} < a_n$, што значи дека низата монотоно опаѓа.

7. Докажи дека низата $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k+1}, n \in \mathbb{N}$ конвергира.

Решение. Од

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{5^k+1} = \frac{1}{5^{n+1}+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k+1} = \frac{1}{5^{n+1}+1} + a_n > a_n$$

следува дека низата $\{a_n\}$ строго монотоно расте.

Ако го искористиме неравенствата

$$\frac{1}{5^k+1} < \frac{1}{5^k},\ k = 1, 2, ..., n$$

добиваме дека

$$a_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k} < \frac{1}{5} \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\,,$$

што значи дека низата $\{a_n\}$ е ограничена од горе.

Конечно, низата $\{a_n\}$ е монотона и ограничена, па следува дека таа е конвергентна.

8. Докажи дека низата

$$e_n = (1+\tfrac{1}{n})^n,\quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

конвергира.

Решение. Прво ќе докажеме дека низата моното расте. За таа цел доволно е во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина да ставиме

$$a_i = 1 + \frac{1}{n},\ i = 1, 2, ..., n \ \text{ и } \ a_{n+1} = 1$$

Добиваме:

$$\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n})^n \cdot 1} \leq \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

односно

$$e_n=(1+\tfrac{1}{n})^n\le(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1}=e_{n+1},\quad n\ge 1$$

што значи, разгледуваната низа монотоно расте.

Ќ е докажеме дека низата (1) е ограничена од горе. За таа цел ќе ја разгледаме помошната низа $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}, n\ge 1$ Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2}}&=(1+\tfrac{1}{n+1})\sqrt[n+1]{1+\tfrac{1}{n+1}}=(1+\tfrac{1}{n+1})\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})\cdot 1^n}\\&\le\frac{1+\frac{1}{n}+n\cdot 1}{n+1}(1+\tfrac{1}{n+1})=(1+\tfrac{1}{n+1})(1+\tfrac{1}{(n+1)^2})\\&=1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}\end{aligned}$$

Значи,

$$\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2}}<1+\tfrac{1}{n},$$

или

$$b_{n+1}=(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2}<(1+\tfrac{1}{n})^{n+1}=b_n,\quad n\ge 1,$$

т.е. низата $\{b_n\}$ монотоно опаѓа. Сега имаме,

$$e_n=(1+\tfrac{1}{n})^n<(1+\tfrac{1}{n})^{n+1}=b_n<b_1=4,\quad n\ge 1$$

т.е. низата (1) е ограничена од горе.

Конечно, низата (1) моното расте и е ограничена од горе, па затоа тaaе конвергентна, т.е.

$$e=\lim_{n\to\infty}e_n=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n,$$

постои.

Да забележиме дека претходната постапка ни овозможува да добиеме по желба добри апроксимации за бројот e. Имено, ако земеме доволно голем број n, тогаш можеме да кажеме дека

$$e_n=(1+\tfrac{1}{n})^n<b_{20}=(1+\tfrac{1}{20})^{21}<2,79.$$

9. Пресметај ги границите на низите:

а) $a_n=(\frac{n}{n+1})^n, n\ge 1,$ б) $a_n=(\frac{n-2}{n+1})^{2n-1}, n\ge 1.$

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}(\tfrac{n}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{n}{n+1}-1)^n\\&=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{n-n-1}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{-1}{n+1})^n\\&=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{\frac{n+1}{-1}})^{\frac{n+1}{-1}\cdot\frac{-n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}[(1+\tfrac{1}{\frac{n+1}{-1}})^{\frac{n+1}{-1}}]^{\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}.\end{aligned}$$

б) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\tfrac{n-2}{n+1})^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{n-2}{n+1}-1)^{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{n-2-n-1}{n+1})^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{-3}{n+1})^{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{\frac{n+1}{-3}})^{\frac{n+1}{-3}\cdot\frac{-3(2n-1)}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}[(1+\tfrac{1}{\frac{n+1}{-3}})^{\frac{n+1}{-3}}]^{\frac{-6n+3}{n+1}} = e^{-6}.$$

Да забележиме дека при решавањето на претходните две задачи користевме дека, ако f е функција таква, што $f(n)\to+\infty$, $n\to\infty$ или $f(n)\to-\infty$, $n\to\infty$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{f(n)})^{f(n)} = e\,.$$

10. Нека $a\in\mathbb{R}$. Докажи дека $a_n = \frac{a^n}{n!}\to 0$, $n\to\infty$.

Решение. Од аксиомата на Архимед следува дека за реалниот број $|a|$ постои природен број n_0 таков што $|a|< n_0$. Но, тоа значи дека за секој природен број $n\ge n_0$ важи $|a|< n+1$. Според тоа, за секој $n\ge n_0$ важи

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a^{n+1}/(n+1)!|}{|a^n/n!|} = \frac{|a|}{n+1} < 1, \text{ т.е. } |a_{n+1}|<|a_n|\text{, за } n\ge n_0\,.$$

Значи, низата $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа. Но, $|a_n|>0$, т.е. таа е конвергентна, па од теорема 4.3 следува дека низата $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|= A$. Имаме

$$A = \lim_{n\to\infty}|a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty}|a_n|\frac{|a|}{n+1} = \lim_{n\to\infty}|a_n|\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{n+1} = A\bullet 0 = 0\,.$$

Конечно, од претходното изнесеното, дефиницијата за конвергентна низа и равенството

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \left|\frac{|a|^n}{n!}-0\right| = ||a_n|-0|$$

следува дека $a_n = \frac{a^n}{n!}\to 0$, $n\to\infty$.

11. Докажи дека низата $\{a_n\}$ со општ член

$$a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2},\quad n\ge 1$$

конвергира.

Решение. Од

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k-1},$$

за секој $k>1$, при $m>n$ добиваме:

$$a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$
$$= 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n} < 2,$$

што значи дека оваа низа еограничена од горе. Понатаму,

$$a_{n+1} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} = a_n+\frac{1}{(n+1)^2} > a_n,$$

т.е. низата моното расте.

Конечно, низата е монотона и ограничена, па затоа таа е конвергентна.

12. Докажи дека низата

$$a_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + ... + \tfrac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

не е конвергентна.

Решение. Секоја конвергентна низа е ограничена. Затоа за да докажеме дека дадената низа не е конвергентна доволно е да докажеме дека таа не е ограничена.

Имаме,

$$a_{2^n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + ... + \tfrac{1}{2^{n-1}} + \tfrac{1}{2^{n-1}+1} + \tfrac{1}{2^{n-1}+2} + ... + \tfrac{1}{2^n}$$

$$> 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}) + ... + \underbrace{(\tfrac{1}{2^n} + \tfrac{1}{2^n} + ... + \tfrac{1}{2^n})}_{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{8} + ... + 2^{n-1} \cdot \tfrac{1}{2^n} = 1 + \tfrac{n}{2}.$$

Јасно, низата $b_n = 1 + \frac{n}{2}, n = 1, 2, ...$ не е ограничена од горе и како $a_{2^n} > b_n$ заклучуваме дека и низата $\{a_n\}$ не е ограничена од горе, што значи дека таа не е коневергентна.

13. За кој природен број n изразот $\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 4 \cdot ... \cdot \lg n}{10^n}$ прима најмала вредност?

Решение. Нека $\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 4 \cdot ... \cdot \lg n}{10^n} = a_n$. Тогаш $a_n = a_{n-1} \frac{\lg n}{10}$. Од тука е јасно дека:

- ако $\frac{\lg n}{10} < 1$, тогаш $a_n < a_{n-1}$

ако $\frac{\lg n}{10} = 1$, тогаш $a_n = a_{n-1}$ и

ако $\frac{\lg n}{10} > 1$, тогаш $a_n > a_{n-1}$.

Равенство е исполнето само за $n = 10^{10}$; за $n < 10^{10}$ важи $a_n < a_{n-1}$, а за $n > 10^{10}$ важи $a_n > a_{n-1}$. Значи, низата $a_1, a_2, ...$ опаѓа до $n = 10^{10} - 1$, за $n = 10^{10} - 1$ и $n = 10^{10}$ се добиваат еднакви членови, а потоа низата расте. Најмалата вредност на a_n се добива значи за $n = 10^{10}$ и $n = 10^{10} - 1$.

14. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2^2} + \tfrac{5}{2^3} + ... + \tfrac{2n-1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Провери дали е таа ограничена.

Решение. За секој $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$a_n - \tfrac{1}{2}a_n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2^2} + \tfrac{5}{2^3} + ... + \tfrac{2n-1}{2^n} - \tfrac{1}{2}(a_n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2^2} + \tfrac{5}{2^3} + ... + \tfrac{2n-1}{2^n})$$

$$= \tfrac{1}{2} + (\tfrac{3}{2^2} - \tfrac{1}{2^2}) + (\tfrac{5}{2^3} - \tfrac{3}{2^3}) + ... + (\tfrac{2n-1}{2^n} - \tfrac{2n-3}{2^n}) - \tfrac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{2}{2^3} + ... + \tfrac{2}{2^n} - \tfrac{2n-1}{2^{n+1}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + ... + \tfrac{1}{2^{n-1}} - \tfrac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}-1-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{4}{2^{n+1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}.$$

Од равенството $\frac{1}{2}a_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$ добиваме $a_n=3-\frac{2n+3}{2^n}<3$, односно низата е ограничена од горе. Бидејḱи е очиглено дека таа е ограничена од горе, добиваме дека таа е ограничена.

15. Дадена е низа од реални броеви $(a_n),\ n\in\mathbb{N}$, таква што за $n>2$

$$a_{n+2}=\frac{a_n^2}{a_{n-1}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Дали постојат нејзини три последователни члена a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, такви што

$$a_{k+1}a_{k+2}=2010a_k. \qquad (*)$$

Решение. Нека претпоставиме дека таква низа постои. Да забележиме дека, од начинот на кој е зададена низата, $\forall i\in\mathbb{N},\ a_i\neq 0$.

Рекурентната формула, со која е зададена низата можеме да ја запишеме во облик

$$a_{n-1}a_{n+1}a_{n+2}=a_n^2a_{n+1}-a_na_{n-1}.$$

За $n=k$ добиваме

$$a_{k-1}a_{k+1}a_{k+2}=a_k^2a_{k+1}-a_ka_{k-1}$$

Ако го искористиме условот (*), добиваме

$$2010a_{k-1}a_k=a_k^2a_{k+1}-a_ka_{k-1}$$

$$2011a_{k-1}a_k=a_k^2a_{k+1}$$

$$a_{k+1}=2011\frac{a_{k-1}}{a_k}.$$

Во наредниот дел ḱе видиме дека оваа низа има едно дополнително својство.

Лема. Ако n и l се такви што $a_{n+1}=l\frac{a_{n-1}}{a_n}$, тогаш $a_{n+2}=(l-1)\frac{a_n}{a_{n+1}}$

Доказ. Навистина, ако $a_{n+2}=\frac{a_n^2}{a_{n-1}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}$ замениме $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{l}{a_{n+1}}$ добиваме

$$a_{n+2}=a_n\cdot l\cdot\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}=(l-1)\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Бидејḱи за $n=k$ имаме $a_{k+1}=2011\frac{a_{k-1}}{a_k}$, со примена на лемата добиваме

$$a_{k+2}=2010\frac{a_k}{a_{k+1}},\ a_{k+3}=2009\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}},\ \dots,\ a_{k+i}=(2012-i)\frac{a_{k+i-2}}{a_{k+i-1}}.$$

Сега,

$$a_{k+2012}=(2012-2012)\frac{a_{k+2012-2}}{a_{k+2012-1}}=0.$$

Но, секој член на низата е ненулти. Заради тоа не постои природен број k таков што

$$a_{k+1}a_{k+2}=2010a_k.$$

16. Низата $a_n, n \in \mathbb{N}$ е определена со $a_1 = 1$ и

$$a_{n+1} = \frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}.$$

Определи ја експлицитната формула за a_n.

Решение. Ако ставиме $1+24a_n = b_n^2$, добиваме $a_n = \frac{b_n^2-1}{24}$ и

$$a_{n+1} = \frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16} = \frac{1+4\frac{b_n^2-1}{24}+b_n}{16} = \frac{b_n^2+6b_n+5}{6\cdot 16}.$$

Според тоа

$$\frac{b_{n+1}^2-1}{24} = \frac{b_n^2+6b_n+5}{6\cdot 16} \qquad \Rightarrow \qquad b_{n+1}^2 = \frac{b_n^2+6b_n+9}{4} = (\frac{b_n+3}{2})^2,$$

односно

$$b_{n+1} = \frac{b_n+3}{2} \text{ и } b_1 = 5. \tag{1}$$

Ако ставиме $c_n = 2^{n-1}b_n$, тогаш $c_{n+1} = 2^n b_{n+1}$ и со замена во (1) се добива

$$c_{n+1} = c_n + 3\cdot 2^{n-1}. \tag{2}$$

Сега, од рекурентната врска (2), имаме

$$c_{n+1} = c_n + 3\cdot 2^{n-1} = c_{n-1} + 3\cdot 2^{n-2} + 3\cdot 2^{n-1} = ... = c_1 + 3(2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 1)$$

$$c_{n+1} = 5 + 3\frac{2^n-1}{2-1} = 2 + 3\cdot 2^n.$$

Ако $c_n = 2 + 3\cdot 2^{n-1}$ го замениме во $c_n = 2^{n-1}b_n$, ја добиваме експлицитната формула $b_n = 3 + \frac{1}{2^{n-2}}$, а со замена во $a_n = \frac{b_n^2-1}{24}$ и со помош на алгебарски трансформации конечно се добива

$$a_n \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{2^{n-1}}).$$

17. Докажи дека $\frac{n}{2^1(n-1)} + \frac{n}{2^2(n-2)} + \frac{n}{2^3(n-3)} + ... + \frac{n}{2^{n-1}\cdot 1} < 4$ за секој природен број n таков што $n \geq 2$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n = 2$ имаме $\frac{2}{2^{2-1}1} = 2 < 4$, па тврдењето е точно. Ако $n = 3$ добиваме $\frac{3}{2^1\cdot 2} + \frac{3}{2^2\cdot 1} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} < 4$, па неравенството важи и за $n = 3$.

Сега да претпоставиме дека неравенството е точно за природноит број n, $n \geq 3$. За $n+1$ имаме:

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{2^1 n} + \frac{n+1}{2^2(n-1)} + \frac{n+1}{2^3(n-2)} + ... + \frac{n+1}{2^{n-1}\cdot 2} + \frac{n+1}{2^n\cdot 1} &= \frac{n+1}{n}(\frac{n}{2^1 n} + \frac{n}{2^2(n-1)} + \frac{n}{2^3(n-2)} + ... + \frac{n}{2^{n-1}\cdot 2} + \frac{n}{2^n\cdot 1}) \\
&= \frac{n+1}{n}(\frac{n}{2^1 n} + \frac{1}{2}(\frac{n}{2^1(n-1)} + \frac{n}{2^2(n-2)} + ... + \frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}) \\
&\leq \frac{n+1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 4) = (1+\frac{1}{n})\cdot\frac{5}{2} \leq (1+\frac{1}{3})\cdot\frac{5}{2} < 4
\end{aligned}$$

Според тоа тврдењето важи за секој $n \geq 2$.

18. Во низите (a_n) и (b_n) секој член почнувајќи од третиот е еднаков на збирот на претходните два.

Најди го пресекот на множествата

$$A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} \text{ и } B=\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\},$$

ако $a_1=1, a_2=2, b_1=2$ и $b_2=1$.

Решение. Прво $a_3=b_3=3$, па $\{1,2,3\}\subseteq A\cap B$.

Ќе докажеме, со помош на принципот на математичка индукција, дека

$$a_{n-1}<b_n<a_n \text{, за } n\geq 4 \qquad (1)$$

За $n=4$ и $n=5$ важи $a_3=3<4=b_4<5=a_4$ и $a_4=5<7=b_5<8=a_5$, па (1) е точно.

Да претпоставиме дека (1) е точно за $n=k$ и $n=k+1$, т.е.

$$a_{k-1}<b_k<a_k \text{ и } a_k<b_{k+1}<a_{k+1}.$$

Ако ги собереме последниве две неравества добиваме

$$a_{k-1}+a_k<b_k+b_{k+1}<a_k+a_{k+1} \text{, т.е. } a_{k+1}<b_{k+2}<a_{k+2}.$$

Значи (1) важи и за $n=k+2$.

Од принципот на математичка индукција заклучуваме дека (1) важи за секој $n\geq 4$.

Сега, да претпоставиме дека $a_k=b_s$ за некои $k,s\geq 4$

1) Ако $k<s$, тогаш од (1) имаме $a_k<a_{k+1}<b_{k+2}<a_{k+2}<b_{k+3}<...<a_{s-1}<b_s$, па добиваме контрадикција;

2) За $k>s$ добиваме $b_s<b_{s+1}<a_{s+1}<a_{s+2}<b_{s+3}<a_{s+3}<...<b_{k-1}<a_{k-1}<b_k$, па повторно добиваме контрадикција;

3) За $k=s$ од (1) следува $b_k<a_k$, па повторно не е можно $a_k=b_k$.

Според тоа освен првите три никои други броеви не се сретнуваат во двете низи истовремено, па $\{1,2,3\}=A\cap B$.

19. Нека $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_n=\frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$ за сите $n\geq 2$. Докажи дека

$$s_n=a_1+a_2+...+a_n<1,$$

за секој природен број n.

Решение. Имаме

$$a_n=\frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$$

$$2na_n=2na_{n-1}-3a_{n-1}.$$

$$3a_{n-1}=2n(a_{n-1}-a_n)$$

Оттука

$$3a_n+3a_{n-1}-3a_n=2n(a_{n-1}-a_n),$$

$$3a_{n-2}=2(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1}),$$

$$....................................$$

$$3a_1=2\cdot 2\cdot(a_1-a_2)$$

Ако ги собереме последниве равенства добиваме

$$3s_n-3a_n=-2na_n+2(a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_1)+2a_1$$
$$3s_n-3a_n=-2na_n+2s_n-2a_n+2a_1$$
$$s_n=2a_1-(2n-1)a_n$$
$$s_n=1-(2n-1)a_n.$$

Бидејќи $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_n=\frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$ следува дека $a_n>0$, за $\forall n\in\mathbb{N}$. Па

$$s_n=1-(2n-1)a_n<1\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

20. Дадена е низата со позитивни членови

$$a_1=1,\quad a_n=\frac{a_n^2+a_{n+1}^2}{(n-1)^2a_n+2a_{n+1}} \tag{1}$$

Докажи дека

$$a_n\le(\tfrac{n}{2})^{n-1}. \tag{2}$$

Решение. Равенството (1) се доведува во обликот

$$(a_{n+1}-na_n)((2-n)a_n-a_{n+1})=0.$$

Неравенството (2) ќе го докажеме со принципот на математичка индукција. За $n=1$ неравенството (2) е задоволено. Нека (2) важи за $k\le n$.

За $k=n+1$ можни се два случаи:

1) $a_{n+1}=na_n$. Со помош на неравенството на Бернули добиваме

$$(1-\tfrac{1}{n^2})^n>1-\tfrac{1}{n^2}n=1-\tfrac{1}{n}\quad\text{т.е.}\quad(1+\tfrac{1}{n})^n(1-\tfrac{1}{n})^n>1-\tfrac{1}{n},$$

што е пак еквивалентно со

$$(1+\tfrac{1}{n})^n>(1-\tfrac{1}{n})^{1-n}=(1+\tfrac{1}{n-1})^{n-1}.$$

Добиваме дека низата $(1+\frac{1}{n})^n$ е растечка и за сите $n\ge2$ важи $(1+\frac{1}{n})^n\ge2$ што е пак еквивалентно со неравенството $(\frac{n+1}{2})^n\ge2(\frac{n}{2})^n$, односно со $(\frac{n+1}{2})^n\ge n(\frac{n}{2})^{n-1}$, од каде поради индуктивната претпоставка следува дека

$$(\tfrac{n+1}{2})^n\ge n(\tfrac{n}{2})^{n-1}\ge na_n\ge a_{n+1}.$$

2) $a_{n+1}=(2-n)a_n$. Во овој случај, за $n\ge2$ добиваме дека $a_{n+1}\le0$ што не е возможно бидејќи низата се состои од позитивни членови ($a_n>0$). Значи a_{n+1} мора да е од обликот разгледан претходно во случајот 1), за кој веќе го докажавме неравенството (2).

21. Дадена е низата $a_1,a_2,...,a_n$ ... , дефинирана со: $a_1=2$ и

$$a_{n+1}=1+a_1a_2...a_n$$

за секој природен број, $n\ge2$. Да се пресмета $S_{2009}+P_{2009}$, каде

$$S_k=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\text{ и }P_k=\frac{1}{a_1a_2...a_n},$$

за секој $k\ge1$.

Решение. Нека $t_n=S_n+P_n$ тогаш

$$t_1=S_1+P_1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=1,\ t_2=S_2+P_2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=1.$$

Со математичка индукција ќе покажеме дека $t_n = 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Да забележиме дека

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{a_{n+1}} \text{ и } P_{n+1} = \frac{P_n}{a_{n+1}} .$$

За $n = 1$, јасно, тврдењето важи.

Нека за $n = k$ тврдењето важи т.е. $t_k = 1$. За $n = k+1$ имаме

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= S_{k+1} + P_{k+1} = S_k + \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{P_k}{a_{k+1}} = S_k + P_k + \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{P_k}{a_{k+1}} - P_k \\ &= 1 + \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{P_k}{a_{k+1}}(1 - a_{k+1}) = 1 + \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{P_k}{a_{k+1}}(-a_1 a_2 ... a_k) \\ &= 1 + \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{P_k}{a_{k+1}} \cdot \frac{-1}{P_k} = 1 + \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1}} = 1 \end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција следува дека $t_n = 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Значи $S_{2009} + P_{2009} = 1$.

22. Докажи дека за секој природен број $n \in \mathbb{N}$ е исполнето неравенството

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + ... + \frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!} + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} < \frac{1}{2} .$$

Решение. За секој природен број k имаме:

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!} = \frac{k+2}{k!(1+(k+1)+(k+2)(k+1))} = \frac{k+2}{k!(k+2)^2} = \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} .$$

Сега,

$$\begin{aligned} &\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + ... + \frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!} + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} = \\ &\qquad = (\tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!}) + (\tfrac{1}{3!} - \tfrac{1}{4!}) + (\tfrac{1}{4!} - \tfrac{1}{5!}) + ... + (\tfrac{1}{(n+1)!} - \tfrac{1}{(n+2)!}) \\ &\qquad = \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{(n+2)!} < \tfrac{1}{2!} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

23. Нека n е природен и нека $x_0 = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{1}{n-k}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1})$. Пресметај го збирот $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$.

Решение. Со примена на горната формула за x_k се добива дека $x_1 = \frac{1}{n(n-1)}$, $x_2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$. Ќе докажеме дека $x_k = \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}$.

Нека тврдењето важи за $i < k$. Тогаш

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + ... + \frac{1}{(n-k+2)(n-k+1)}\right) \\ &= \frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n-k+2}\right) \\ &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n-k+2} + \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} = 1,$$

24. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со рекурзивната формула $a_{\circ}=-1$, $a_n=\frac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4}$, $n\in\mathbb{N}$. Определи го општиот член a_n на низата.

Решение. Ако замениме во рекурзивната формула се добива дека

$$a_1=\frac{5}{7},\ a_2=\frac{11}{13},\ a_3=\frac{17}{19},\ a_4=\frac{23}{25},\ a_5=\frac{29}{31},$$

односно

$$a_1=\frac{6\cdot1-1}{6\cdot1+1},\ a_2=\frac{6\cdot2-1}{6\cdot2+1},\ a_3=\frac{6\cdot3-1}{6\cdot3+1},\ a_4=\frac{6\cdot4-1}{6\cdot4+1},\ a_5=\frac{6\cdot5-1}{6\cdot5+1}.$$

Со принципот на математичка индукција ќе покажеме дека $a_n=\frac{6n-1}{6n+1}$. Претпоставуваме дека тврдењето важи за $n=k$, односно $a_k=\frac{6k-1}{6k+1}$. Тогаш за $n=k+1$ имаме дека

$$a_{k+1}=\frac{2a_k-3}{3a_k-4}=\frac{2\frac{6k-1}{6k+1}-3}{3\frac{6k-1}{6k+1}-4}=\frac{\frac{12k-2-18k-3}{6k+1}}{\frac{18k-3-24k-4}{6k+1}}=\frac{6(k+1)-1}{6(k+1)+1}$$

Согласно принципот на математичка индукција имаме дека $a_n=\frac{6n-1}{6n+1}$ за секој природен број.

25**.** Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни броеви, за кои што

$$x_1+x_2+...+x_n\geq\sqrt{n},\ n\geq1.$$

Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}),\ n\geq1.$$

Решение. Воведуваме ознаки

$$s_n=x_1+x_2+...+x_n,\ y_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\ \text{и}\ t_n=\sqrt{n}.$$

Да забележиме дека, според условот на задачата дека

$$s_n\geq t_n. \tag{1}$$

Да забележиме дека $\sum_{i=1}^{n}y_i=t_n$. Од друга страна, со непосредно пресметување имаме:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i&=\sum_{i=1}^{n}x_i[y_{n+1}+\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})]=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})+\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n+1}\\&=\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j+1})\sum_{i=1}^{j}x_i+\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}s_j(y_j-y_{j+1})+y_{n+1}s_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}y_i^2&=\sum_{i=1}^{n}y_iy_i=\sum_{i=1}^{n}y_i[y_{n+1}+\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})]=\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{k=i}^{n}(y_k-y_{k+1})+\sum_{i=1}^{n}y_iy_{n+1}\\&=\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j+1})\sum_{i=1}^{j}y_i+\sum_{i=1}^{n}y_iy_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}t_j(y_j-y_{j+1})+y_{n+1}s_n\end{aligned}$$

Од неравенството (1) и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц јасно е дека

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2\leq\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2},$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Сега

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{1}{i}})^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{1}{(1+\sqrt{1})^2} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} .$$

26. Дадена е низа од природни броеви $1 = x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n < ...$ за која $x_{n+1} \leq 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Дали постојат два члена на низата x_i и x_j такви што $x_i - x_j = 2008$?

Решение. Ќе докажеме малку поопшто тврдење. За секој природен број k постојат членови на низата x_i и x_j такви што $x_i - x_j = k$.

Навистина, нека $k \in \mathbb{N}$ е зададен фиксен природен број. Ќе претпоставиме дека такви членови на низата не постојат, т.е. $x_i - x_j \neq k$, $i, j \in \mathbb{N}$. За множеството $A_k = \{1, 2, 3, ..., 2k-1, 2k\}$ и ќе го формираме множеството од сите подредени парови $(i, k+i)$, $i = 1, 2, ..., k$, односно множеството $\{(1, k+1), (2, k+2), ..., (k, 2k)\}$. Во секој од паровите на множеството се наоѓа најмногу еден член на низата. Ако претпоставиме дека двата члена на еден пар се и членови на низата, на пример $x_i = t$, $x_j = k+t$ би добиле $x_j - x_i = (k+i) - i = k$, што противречи на претпоставката. Значи, во множеството $\{1, 2, 3, ..., 2k-1, 2k\}$ се содржат не повеќе од k членови на низата. Бидејќи

$$x_1 = 1, x_2 \leq 2, x_3 \leq 4, ..., x_k \leq 2(k-1) < 2k ,$$

добиваме дека $x_{k+1} \notin A_k$, што е во спротивност со претпоставката од задачата. Значи ќе постојат членови на низата x_i и x_j за кои $x_i - x_j = k$.

Ако тоа важи за произволен фиксен природен број k , важи и за $k = 2008$.

27. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ се низи реални броеви такви што

$$x_n = y_{n-1} + \frac{1}{z_{n-1}} , \; y_n = z_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} , \; z_n = x_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}} , \; n \in \mathbb{N} ,$$

при што $x_\circ, y_\circ, z_\circ$ се позитивни реални броеви. Дали некоја од трите низи е ограничена.

Решение. Бидејќи $x_\circ, y_\circ, z_\circ$ се позитивни реални броеви добиваме дека x_1, y_1, z_1 се позитивни реални броеви. Со помош на принципот на математичка индукција се добива дека $x_n, y_n, z_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ќе ја разгледаме низата $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ и ќе покажеме дека таа е неограничена. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека таа е ограничена. Бидејќи нејзините членови се позитивни, добиваме дека постои реален број $c > 0$ така што $0 < s_n \leq c$, $n \in \mathbb{N}$. Тогаш, за секој $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{s_n} \geq \frac{1}{c} = C > 0$. При тоа

$$s_{n+1}=x_n+y_n+z_n+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{y_n}+\frac{1}{z_n}\geq s_n+\frac{1}{s_n}+\frac{1}{s_n}+\frac{1}{s_n}=s_n+\frac{3}{s_n}\geq s_n+3C\ .$$

Според принципот на математичка индукција лесно се добива дека $s_n\geq s_0+3Cn$. Бидејќи низата $p_n=3Cn$ не е ограничена низа, добиваме дека и s_n не е ограничена низа. Тоа е во контрадикција со претпоставката.

Значи, низата $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ е неограничена. Барем една од низите $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ е неограничена. Навистина, ако претпоставиме дека сите три се ограничени низи, тогаш и нивниот збир е ограничена низа, што не е можно.

Според начинот на кој се определени други две низи, добиваме дека сите три низи се неограничени.

28. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1=2008$, $x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n^2-1)x_n$, $n\geq 2$. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_n=x_n+\frac{1}{n}S_n$, каде $S_n=x_1+x_2+...+x_n$. Определи за кои природни броеви n, вредностите на a_n се полни квадрати.

Решение. Од равенството $x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n^2-1)x_n$, добиваме

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n=(n^2-1)x_n+x_n=(n^2-1+1)x_n=n^2x_n,\ n=2,3,.... \qquad (1)$$

Според тоа

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n-1)^2x_{n-1},\ n=3,4,...$$

и ако замениме во

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n=n^2x_n$$

имаме

$$(n-1)^2x_{n-1}+x_n=n^2x_n\ \text{, т.е. } (n-1)^2x_{n-1}=(n^2-1)x_n$$

или

$$(n-1)x_{n-1}=(n+1)x_n. \qquad (2)$$

Од равенството (2) за $n=2,3,...$, добиваме

$$\begin{cases}\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1},\\ \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}=\frac{n-2}{n},\\ ....\\ \frac{x_3}{x_2}=\frac{2}{4},\\ \frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Ако ги измножиме претходните равенства добиваме

$$x_n=\frac{2x_1}{n(n+1)},\ n=2,3,.... \qquad (3)$$

Бидејќи $S_n=x_1+x_2+...+x_n=n^2x_n$, добиваме

$$S_{n+1}=(n+1)^2x_{n+1}=(n+1)^2(S_{n+1}-S_n)\text{, т.е. } \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)},\ n=1,2,3,....$$

Слично како и претходно со множење на првите n равенства добиваме

$$S_n = \frac{2S_1 n}{n+1} = \frac{2x_1 n}{n+1},\ n = 1,2,3,\dots . \qquad (4)$$

Сега од (3) и (4) имаме

$$a_n = x_n + \tfrac{1}{n} S_n = \frac{2x_1}{n(n+1)} + \frac{2x_1 n}{n(n+1)} = \frac{2x_1(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2x_1}{n} = \frac{2^4 251}{n}.$$

Бараните вредности за n се: $n = 251, 2^2 \cdot 251, 2^4 \cdot 251$

29. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од природни броеви за кои што $a_n > a_{n-1} + 1,\ n \ge 2$. Низата природни броеви $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Да се докаже дека барем еден од броевите $b_n, b_n + 1, b_n + 2, \dots, b_{n+1} - 1$ е полн квадрат.

Решение. Доволно е да докажеме дека $\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{b_n} \ge 1$. Ако последното равенство е точно, тогаш $\sqrt{b_{n+1}} \ge 1 + \sqrt{b_n} > \sqrt{b_n}$. Значи, постои природен број p таков што $\sqrt{b_n} \le p < \sqrt{b_n} + 1 \le \sqrt{b_{n+1}}$, односно $b_n \le p^2 < b_{n+1}$. Според тоа постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $b_n + k = p^2 \le b_{n+1} - 1$ односно $b_n \le b_n + k = p^2 \le b_{n+1} - 1$.

Значи, навистина доволно е да се докаже дека $\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{b_n} \ge 1$. Последното неравенство ќе го запишеме во еквивалентен вид $b_{n+1} \ge 1 + b_n + 2\sqrt{b_n}$ односно тоа последователно е еквивалентно со неравенствата:

$$a_{n+1} \ge 1 + 2\sqrt{b_n},\ \text{т.е.}\ \tfrac{a_{n+1}-1}{2} \ge \sqrt{b_n},\ \text{т.е.}\ (\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2 \ge b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

Последното неравенство ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција.

За $k = 1$, од неравенството $a_2 > a_1 + 1$, последователно добиваме

$$a_2 \ge a_1 + 2,\ \ a_2 - 1 \ge a_1 + 1,\ \ \tfrac{a_2-1}{2} \ge \tfrac{a_1+1}{2},$$

$$(\tfrac{a_2-1}{2})^2 \ge (\tfrac{a_1+1}{2})^2 \ge (\tfrac{1}{2} 2\sqrt{a_1 \cdot 1})^2 = a_1 .$$

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $k = n$, односно точно е неравенството

$$(\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2 \ge b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

За $k = n + 1$, од равенството

$$(\tfrac{a_{n+1}+1}{2})^2 = (\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2 + a_{n+1},$$

како и од неравенствата

$$a_{n+2} > a_{n+1} + 1,\ \ a_{n+2} \ge a_{n+1} + 2\ ,\ \ a_{n+2} - 1 \ge a_{n+1} + 1,$$

$$\tfrac{a_{n+2}-1}{2} \ge \tfrac{a_{n+1}+1}{2},\ (\tfrac{a_{n+2}-1}{2})^2 \ge (\tfrac{a_{n+1}+1}{2})^2 \ge (\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2 + a_{n+1} .$$

заради индуктивната претпоставка имаме

$$(\tfrac{a_{n+2}-1}{2})^2 \ge (\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2 + a_{n+1} \ge a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} .$$

Значи, неравенството е точно и за $k = n + 1$.

Според принципот на математичка индукција неравенството е точно за секое $n \in \mathbb{N}$, т.е.

$$(\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2 \geq a_1 + a_2 + ... + a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

30. Нека A_1 е средината на отсечката AB. Со A_2 ја означуваме средината на AA_1, со A_3 средината на A_1A_2, со A_4 средината на A_2A_3 итн. Да се најде границата кон која тежи низата од должините на отсечките $AA_1, AA_2, AA_3, ...$.

Решение. Нека $\overline{AB} = a$; тогаш

$$\overline{AA_n} = a(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} - \tfrac{1}{2^4} + ... + \tfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}) = \tfrac{a}{3}(1 + \tfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}).$$

Значи,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{AA_n} = \tfrac{a}{3}.$$

31. Низата броеви a_n е дефинирана со: $a_1 = a_2 = 1, a_3 = -1$ и $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}$ за $n > 3$. Најди го a_{2000}.

Решение. Имаме

$$a_4 = a_3 \cdot a_1 = -1, \quad a_5 = a_4 \cdot a_2 = -1, \quad a_6 = a_5 \cdot a_3 = 1, \ ...$$

Лесно се гледа дека $a_n^2 = 1$. Заради тоа

$$a_n = a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4} = (a_{n-3})^2 a_{n-4}a_{n-5} = 1 \cdot a_{n-4}a_{n-5} = (a_{n-5})^2 a_{n-7} = a_{n-7}.$$

Според тоа $a_{2000} = a_{7 \cdot 285+5} = a_5 = -1.$

IV ПОЛИНОМИ

1. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ПОЛИНОМИТЕ. НУЛИ НА ПОЛИНОМ

1. Одреди ја најголемата вредност на полиномот

$$f(x,y)=-x^2+2xy-4y^2+2x+10y-3\,.$$

Решение. Полиномот можеме да го запишеме во видот

$$\begin{aligned}f(x,y)&=-(x^2-2xy+4y^2-2x-10y+3)\\&=-[\,x^2-2(\,y+1)x+(\,y+1)^2-(\,y+1)^2+4y^2-10y+3]\\&=-[(x-y-1)^2+3y^2-12y+2]=-[(x-y-1)^2+3(y-2)^2-10]\\&=10-(x-y-1)^2-3(y-2)^2\end{aligned}$$

Според тоа, максималната вредност на полиномот е 10 и се достигнува за $x-y-1=0,\ y-2=0$ односно за $x=2, y=3$.

2. Полиномите P,Q и R се со реални коефициенти, при што еден од нив е од втор степен, а еден е од трет степен, и

$$P^2+Q^2=R^2\,.$$

Докажи дека сите корени на еден од полиномите од трет степен се реални.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека коефициентите пред највисоките степени на x се позитивни.

Бидејќи еден полином е од трет степен, а еден од втор степен, добиваме дека R е полином од трет степен. Навистина, ако претпоставиме спротивно, тогаш R^2 е полином од четврт степен, а збирот P^2+Q^2 е полином од шести степен, што не е можно. Од тоа што R е полином од трет степен, еден од полиномите P и Q е полином од трет степен.

Сега, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека R и Q се полиноми од трет степен а полиномот P е од втор степен.

Од равенството

$$P^2=R^2-Q^2=(R+Q)(R-Q)$$

имаме $R+Q$ е полином од трет степен, а P^2 полином од четврт степен. Следствено $R-Q$ е полином од прв степен, односно

$$R-Q=r(x-a)\,,\ a\in\mathbb{R}\,,\ r>0\,.$$

Значи, $x-a\,|\,P$ и $(x-a)^2\,|\,P^2$ од каде добиваме $x-a\,|\,R+Q$. Но $x-a\,|\,R-Q$ па според тоа $x-a\,|\,R$ и $x-a\,|\,Q$. Значи, $R=(x-a)R_1$ и $Q=(x-a)Q_1$ при што R_1 и Q_1 се полиноми од втор степен со позитивни коефициенти пред x^2.

Нека $P=q(x-a)(x-b)$ при што $q>0$. Од равенството

$$q^2(x-b)^2=(R_1+Q_1)(R_1-Q_1)$$

добиваме $R_1 - Q_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Бидејќи $R_1 = Q_1 + t$, добиваме

$$q^2(x-b)^2 = (2Q_1 + t)t$$

$$Q_1 = \tfrac{1}{2t}[q^2(x-b)^2 - t^2].$$

Значи,

$$Q = (x-a)Q_1 = \tfrac{1}{2t}(x-a)(q^2(x-b)^2 - t^2)$$

е полином од трет степен со три реални нули.

3. Нека n е природен број и $P(x)$ е полином од $2n$-ти степен за кој што

$$P(0) = 1 \quad \text{и} \quad P(k) = 2^{k-1}, \text{ за } k = 1, 2, ..., 2n.$$

Докажи дека

$$2P(2n+1) - P(2n+2) = 1.$$

Решение. Ќе воведеме ознака

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)...(k-k+1)}{k!}$$

за секој реален број x и секој природен број k. Ќе го разгледаме полиномот

$$Q(x) = 1 + \binom{x}{2} + \binom{x}{4} + \binom{x}{6} + ... + \binom{x}{2n}.$$

За секој природен број m имаме $\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + ... = 2^{m-1}$, па од тука $Q(0) = 1$ и $Q(k) = 2^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, ..., 2n$. Значи, полиномот $Q(x)$ и бараниот полином се полиноми од $2n$-ти степен кои се еднакви во $(2n+1)$-на точка. Според тоа, тие се идентички еднакви, односно

$$P(x) = 1 + \binom{x}{2} + \binom{x}{4} + \binom{x}{6} + ... + \binom{x}{2n}.$$

Заради последното равенство ,

$$P(2n+1) = 1 + \binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{4} + \binom{2n+1}{6} + ... + \binom{2n+1}{2n} = 2^{2n+1-1} = 2^{2n},$$

$$P(2n+2) = 1 + \binom{2n+2}{2} + \binom{2n+2}{4} + \binom{2n+2}{6} + ... + \binom{2n+2}{2n} = 2^{2n+2-1} - 1 = 2^{2n+1} - 1.$$

Сега,

$$2P(2n+1) - P(2n+2) = 2 \cdot 2^{2n} - (2^{2n+1} - 1) = 1.$$

4. Најди го збирот на коефициентите на полиномот

$$(1 - 3x + 3x^2)^{1999}(1 + 3x - 3x^2)^{2000}.$$

Решение. По средување на полиномот добиваме

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,$$

каде $n = 2 \cdot 1999 + 2 \cdot 2000$. За $x = 1$ добиваме

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 1^{1999} \cdot 1^{2000} = 1.$$

5. Нека $P(x) = (2+3x)^{1994}$. Пресметај го збирот на сите коефициенти на полиномот $P(x)$, кои стојат пред непарните степени на x.

Решение. Нека $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Тогаш

$$P(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n \text{ и } P(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+...+(-1)^n a_n .$$

Според тоа, збирот на коефициентите кои стојат пред непарните степени е еднаков на

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{5^{1994}-(-1)^{1994}}{2}=\frac{5^{1994}-1}{2} .$$

6. Да се докаже дека за секој природен број m полиномот

$$f(x)=(x-2)^{2m}+(x-1)^m-1$$

е делив со полиномот $p(x)=(x-1)(x-2)$, а потоа да се најде количникот.

Решение. Бидејќи $f(1)=(1-2)^{2m}+(1-1)^m-1=0$ следува дека полиномот $f(x)$ е делив со $x-1$, исто така, од $f(2)=(2-2)^{2m}+(2-1)^m-1=0$ следува дека полиномот $f(x)$ е делив со $x-2$. Значи, $f(x)$ е делив со $p(x)$.

Да го најдеме количникот $\frac{f(x)}{p(x)}$. Имаме:

$$\frac{f(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-1}((x-2)^{2m-1}+\frac{(x-1)^m-1}{x-2}) .$$

Бидејќи

$$\frac{(x-1)^m-1}{x-2}=\frac{(x-1)^m-1}{(x-1)-1}=\sum_{k=0}^{m-1}(x-1)^k ,$$

ќе имаме

$$\frac{f(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-1}((x-2)^{2m-1}+\sum_{k=0}^{m-1}(x-1)^k)=\frac{(x-2)^{2m-1}+1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\sum_{k=1}^{m-1}(x-1)^k$$

$$=\frac{(x-2)^{2m-1}+1}{x-1}+\sum_{k=0}^{m-2}(x-1)^k=\sum_{s=0}^{2m-2}(-1)^s(x-2)^s+\sum_{k=0}^{m-2}(x-1)^k .$$

7. Да се определат броевите A, B и C, така што за секој природен број $n\in\mathbb{N}$ да важи равенството

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}=\frac{An+B}{2^n}+C . \qquad (1)$$

Решение. A, B и C треба да се одредат така што да важи (1) за секој природен број n. За $n=1$ се добива

$$\frac{1}{2}=\frac{A+B}{2}+C . \qquad (2)$$

За $n+1$ равенството (1) станува

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{A(n+1)+B}{2^{n+1}}+C .$$

При претпоставка дека равенството (1) важи за бројот n, претходното равенство важи ако и само ако

$$\frac{An+B}{2^n}+C+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{A(n+1)+B}{2^{n+1}}+C .$$

По средувањето се добива

$$(A+1)n+(B-A+1)=0 .$$

Ова равенство треба да важи за секој природен број n, па затоа

$$A+1=0 \text{ и } B-A+1=0, \text{т.е. } A=-1 \text{ и } B=-2.$$

Од (2) се добива $C=2$. Од принципот на математичка индукција произлегува дека за овие вредности на A,B и C равенството (1) навистина важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

8. Да се определат a,b,c и d од идентитетите:

а) $x^3+x^2+5x-12=(ax+b)(x^2-x+1)+(cx+d)(x^2+3)$

б) $3x^3+6=(ax+b)(x^2+4)+(cx+d)(x^2+1)$

в) $x^4-3x^2+14x-12=(x^2-2x+4)(x^2+bx+c)$

г) $\frac{2}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$.

Решение. а) Ако полиномот од десната страна се запише во опаѓачки редослед на степените на x, а потоа се изедначат коефициентите од левата и десната страна, се добива систем на равенки од кои се одредуваат a,b,c,d . При тоа, се добива: $a=d=0$, $b=1$, $c=2$.

б) Постапи слично како под а) . Се добива: $a=-1$, $b=2$, $c=4$, $d=-2$.

в) Постапувајќи слично како под а) се добива: $b=2$, $c=-3$.

Напомена: На овој начин полиномот од десната страна е запишан како производ на два полиноми од втор степен. Во исто време најден е количникот на полиномот од левата страна и полиномот x^2-2x+4, а тоа е полиномот x^2+2x-3.

г) По ослободување од именителот во идентитетот се добива еднаквост на два полиноми. Одговор: $a=1$, $b=-2$, $c=1$.

9. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти при што

$$|P(3)|=|P(7)|=1.$$

Докажи дека $P(x)$ нема целобројни корени.

Решение. Нека

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

каде што a_i се цели броеви за $0\le i\le n$. Нека b и c се произволни цели броеви. Тогаш

$$P(b)-P(c)=a_n(b^n-c^n)+a_{n-1}(b^{n-1}-c^{n-1})+...+a_1(b-c)=(b-c)M,$$

каде M е цел број. Значи, $b-c$ е делител на $P(b)-P(c)$.

Да претпоставиме дека d е целоброен корен на полиномот $P(x)$. Според претходната дискусија $7-d$ мора да е делител на $P(7)-P(d)=\mp1$, од каде што се добива дека $d=6$ или $d=8$. Од друга страна, $3-d$ мора да е делител на $P(3)-P(d)=\mp1$, од каде што се добива дека $d=2$ или $d=4$. Поради ова гледаме дека не постои целоброен корен на полиномот $P(x)$.

10. Докажи дека не постои полином P со реални коефициенти така што за секој реален број x важи $P(\sin x)=\cos x$.

Решение. *Прв начин.* Да претпоставиме дека постои таков полином. Нека $t = \sin x$. Тогаш за $-1 \le t \le 1$ важи

$$(P(t))^2 = 1 - t^2 \tag{1}$$

од каде што е јасно дека P мора да е линеарен полином, односно $P(t) = at + b$. Со замена во (1), добиваме

$$a^2t^2 + 2bt + b^2 = -t^2 + 1,$$

од каде што, добиваме $a^2 = -1$, што не е можно за ниту еден реален број.

Значи, не постои полином со бараното својство.

Втор начин. Да претпоставиме дека постои таков полином. Тогаш

$$-1 = \cos\pi = P(\sin\pi) = P(0) = P(\sin 0) = \cos 0 = 1,$$

што не е можно.

Значи, не постои полином со бараното својство.

11. Одреди ги коефициентите a и b така што полиномот

$$x^6 + 3x^5 + ax^4 - 11x^3 + bx^2 + 12x - 8$$

е куб на некој друг полином.

Решение. Очигледно е дека дадениот полином може да биде куб на некој квадратен полином од облик $x^2 + kx - 2$. Имено, $(x^2)^3 = x^6$ и $(-2)^3 = -8$. Ако го степенуваме на трет степен тој трином добиваме полином

$$x^6 + 3x^5 + (3k^2 - 6)x^4 - (12k - k^3)x^3 + (12 - 6k^2)x^2 + 12kx - 8.$$

Споредувајќи го добиениот полином со почетниот лесно се заклучува дека $k = 1$. Потоа, со изедначување на коефициентите на почетниот и добиениот полином добиваме $a = -3$ и $b = 6$.

12. Ако полиномот

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

има $n+1$ меѓусебно различни нули, тогаш $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n$. Докажи!

Решение. Нека $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{n+1}$ се различни нули на полиномот P. Според тврдењето за факторизација на полиноми

$$a_{\circ} + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_n).$$

Бидејќи x_{n+1} е нула на полиномот P, т.е. $P(x_{n+1}) = 0$ добиваме,

$$a_n(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)....(x_{n+1} - x_n).$$

Од овде следува дека $a_n = 0$. Значи, полиномот има степен не поголем од $n-1$. Со слична постапка, за новиот полином покажуваме дека $a_{n-1} = 0$, ит.н.

13. Ако P е полином со степен помал од n и $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ се меѓусебно различни броеви, тогаш

$$P(x) = P(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_n)} + P(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_n)} + ... +$$
$$+ P(x_n)\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)...(x_n-x_{n-1})}.$$

Докажи!

Решение. Збирот на десната страна е полином Q, со $\deg Q = n-1$. Заради тоа, степенот на полиномот $R(x) \equiv P(x) - Q(x)$ не е поголем од $n-1$. Лесно се гледа дека $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ се нули на полиномот R. Според претходната задача, сите негови коефициенти се еднакви на нула, т.е. тој е идентички еднаков на нула. Значи, $P(x) \equiv Q(x)$.

14. Нека P е полином со степен помал од n и $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ се меѓусебно различни броеви. Покажи дека постојат константи $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ такви што

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Решение. Следува од претходната задача :

$$A_1 = \frac{P(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_n)}, ..., \ A_n = \frac{P(x_n)}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)...(x_n-x_{n-1})}$$

15. Полиномот P, при делење со полиномот $x-a$, дава остаток A, а при делење со полиномот $x-b$ ($a \neq b$) дава остаток B. Одреди го остатокот при делење на полиномот P со полиномот $(x-a)(x-b)$.

Решение. Постои полином $Q(x)$ и остаток, полином од прв степен $\alpha x + \beta$, таков што

$$P(x) \equiv (x-a)(x-b)Q(x) + \alpha x + \beta.$$

За $x = a$ добиваме $P(a) \equiv \alpha a + \beta = A$.

За $x = b$ добиваме $P(b) \equiv \alpha b + \beta = B$.

Според тоа:

$$\alpha = \frac{A-B}{a-b}, \quad \beta = \frac{aB-bA}{a-b}.$$

16. Одреди ги реалните броеви a, b, p и q од идентитетот

$$(x^2 + px + q)^{10} = (2x-1)^{20} - (ax+b)^{20}.$$

Решение. Ако во идентитетот $(x^2 + px + q)^{10} + (ax+b)^{20} = (2x-1)^{20}$ ставиме $x = \frac{1}{2}$ добиваме:

$$(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}p + q)^{10} + (\tfrac{1}{2}a + b)^{20} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a + b = 0, \quad \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}p + q = 0$$

$$a = -2b, \quad p = -2q.$$

Ако во идентитетот замениме само $a = -2b$, тој го добива обликот

$$(x^2 + px + q)^{10} = (2x-1)^{20}(1-b)^{20}.$$

Ако последниот идентитет се степенува со $\frac{1}{10}$ добиваме еднаквост на два квадратни полиноми. Со изедначување на коефициентите покрај истите степени, добиваме:

$$a_1 = \sqrt[20]{2^{20}-1}, \qquad b_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}, \qquad p_1 = -1, q_1 = \tfrac{1}{4};$$

$$a_2=-\sqrt[20]{2^{20}-1},\quad b_2=\tfrac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1},\qquad p_2=-1,\, q_2=\tfrac{1}{4}.$$

17. Ако $1, x_2, x_3, ..., x_n$ се нули на полиномот x^n-1, тогаш

$$(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)...(1-x_n)=n\ .$$

Решение. Имаме

$$x^n-1\equiv(x-1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)\ .$$

Ако левата страна ја разложиме на множители, за $x\neq 1$, добиваме

$$x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1\equiv(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)\,.$$

Последното равенство важи за секој $x\neq 1$, и истото го разгледуваме кога x тежи кон 1. Тогаш левата страна добива вредност n, а десната

$$(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)...(1-x_n)\,.$$

18. Одреди ги рационалните нули на полиномот

$$P(x)=3x^5+2x^4-120x^2+37x+78\,,$$

а потоа разложи го на прости множители.

Решение. Ако полиномот P има рационална нула $\frac{p}{q}$, тогаш $q\,|\,3$ и $p\,|\,78$. Според тоа

$$q\in\{1,3\}\ \text{ и }\ p\in\left\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm13,\pm26,\pm39,\pm78\right\},$$

а

$$\frac{p}{q}\in\left\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm13,\pm26,\pm39,\pm78,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{13}{3},\pm\frac{26}{3}\right\}.$$

Некои од овие броеви може да се нули на дадениот полином. Со директна проверка добиваме дека нули на полиномот се бро-евите: $1,3,-\frac{2}{3}$. Тоа се единствените рационални нули на полиномот. Заради тоа

$$P(x)\equiv(x-1)(x-3)(x+\tfrac{2}{3})(3x^2+bx+c)\,.$$

Со изедначување на коефициентите покрај истите степени на x добиваме $b=12$ и $c=39$. Бидејќи полиномот $3x^2+12x+39$ нема реални нули

$$P(x)\equiv(x-1)(x-3)(x+\tfrac{2}{3})(3x^2+12x+39)\,.$$

19. Најди барем еден полином P со целобројни коефициенти, за кој бројот $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ е една негова нула .

Решение. Нека $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, т.е. нека $x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}$. Со степенување на трет степен добиваме

$$x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}=3\ \text{ или }\ x^3+6x-3=(3x+2)\sqrt{2}.$$

Со квадрирање на ова равенство

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0\,.$$

Полиномот на левата страна на ова равенство е бараниот полином.

20. Ако a,b,c се меѓусебно различни реални броеви докажи дека

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv x^2.$$

Решение. Ако x^2 од десната страна се префрли на левата страна, тогаш на левата страна имаме полином од втор степен кој се анулира за три различни вредности: a, b *и* $c.$ Тоа значи дека тој полином е идентички еднаков на нула. Сите негови коефициенти се еднакви на нула.

21. Ако a,b,c се меѓусебно различни реални броеви, тогаш

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv 1.$$

Докажи!

Упатство. Постапи слично како во претходната задача.

22. Нека $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$. Упрости го изразот

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Решение. Со сведување на изразот на заеднички именител, во дропката која што ќе ја добиеме, броителот е квадратен трином по a. Тој се анулира за $a=0$, $a=b$ и $a=c$, т.е. се анулира за три различни броеви. Затоа тој идентички е еднаков на нула.

23. Покажи дека $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ е рационален број. Пресметај го тој број.

Решение. Нека $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Со степенување на трет степен на ова равенство добиваме $x^3+3x-4=0.$ Единствено рационално решение на оваа равенка е $x=1$. Во тој случај, лесно се гледа дека

$$x^3+3x-4\equiv(x-1)(x^2+x+4),$$

па $x=1$ е единствено реално решение на горната равенка. Според тоа

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

24. Дали постои полином $P=P(x)$ со реални коефицијенти, таков што, за секој x од некој интервал $(\alpha,\beta), \alpha<\beta,$ $P(\sin x)=\sin 2x$?

Решение. Нека $P(\sin x)=\sin 2x,$ за секој x од $(\alpha,\beta).$ Воведуваме ознака $\sin x=y.$ Тогаш равенствата

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=\pm 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x},$$

имплицираат равенство

$$P(y)=\pm 2y\sqrt{1-y^2}$$

за некој y од некој интервал $(\gamma,\delta).$ Тоа значи дека

$$Q(y)=P^2(y)-4y^2+4y^4=0,$$

за секој y од интервалот $(\gamma,\delta).$

Значи, полиномот Q има бесконечно нули на (γ,δ). Според тоа овој полином е идентички еднаков на нула, а тоа значи

$$P^2(y) = -4y^4 + 4y^2.$$

Според тоа постојат реални броеви a и b такви што

$$P(y) = ay^2 + by$$

$$P^2(y) = a^2y^4 + 2aby^3 + b^2y^2 = -4y^4 + 4y^2 .$$

$$a^2 = -4.$$

Заради добиената контрадикција тоа не е можно. Значи, полином со такви својства не постои.

25. Докажи дека, за секој x, полиномот

$$P(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 0,75$$

е позитивен.

Решение. Имаме

$$P(x) = x^6 - x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{2}x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 - x + 0,75$$

$$= x^4(x^2 - x + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}x^2(x^2 - 2x + 1) + \tfrac{1}{2}(x^2 - x + 0,75).$$

Изразите во втората и третата заграда се позитивни за секој x (соодветните квадратни равенки немаат реални решенија), а првата заграда е ненегативна (потполн квадрат). Заради тоа $P(x) > 0$ за секој x.

26. Нека $n \in N$ и P е полином со целобројни коефициенти таков што $0 < |P(i)| < n$, за $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажи дека полиномот P нема целобројна нула.

Решение. За цели броеви m и n и полином P со целобројни коефициенти важи $(m-n) \mid (P(m) - P(n))$. Нека $l \in Z$ е целобројна нула на полиномот P. Тогаш, постојат $k, r \in Z$, така што $l = kn + r$, па $n \mid kn \mid (r-l) \mid (P(r) - P(l)) = P(r)$, што не е можно, затоа што $0 < |P(r)| < n$.

2. ФАКТОРИЗАЦИЈА НА ПОЛИНОМИ

1. Одреди го остатокот од делењето на полиномот

$$P(x) = x^{99} + x^3 + 10x + 5$$

со полиномот $Q(x) = x^2 + 1$.

Решение. Постојат полиноми Q_1 и R такви што

$$P(x) = Q_1(x)Q(x) + R(x)$$

при што остатокот R е полином од најмногу прв степен. Ако $R(x) = ax + b$, тогаш

$$x^{99} + x^3 + 10x + 5 \equiv (x^2 + 1)Q_1(x) + ax + b .$$

Корени на полиномот x^2+1 се $\pm i$. Заради тоа

$$i^{99}+i^3+10i+5=ai+b \text{ или } 8i+5=ai+b.$$

Оттука $a=8$ и $b=5$, односно $R(x)=8x+5$.

2. Полиномот $P(x)=x^{10}+x^5+1$ разложи го како производ на два полиноми со целобројни коефициенти.

Решение. За $x\neq 1$ вредноста на полиномот, како збир на геометриска прогресија, можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{x^{15}-1}{x^5-1}=\frac{(x^3)^5-1}{x^5-1}=\frac{(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}=(x^2+x+1)\frac{x^{12}+x^9+x^6+x^3+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}.$$

Ако количникот на последните два полиноми е некој полином со целобројни коефициенти, тогаш доволно е да се најде истиот. Со делење на овие два полиноми го добиваме полиномот $x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1.$ Значи,

$$P(x)=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1) \text{, за } x\neq 1.$$

Лесно се проверува дека ова равенкство е точно и за $x=1$.

3. Докажи дека полиномот

$$P(x)=(x+1)^m+x^m+1$$

е делив со полиномот

$$Q(x)=x^2+x+1$$

ако и само ако $m=6n\pm 2$, каде n е природен број.

Решение. Нека x_1 и x_2 се нули на полиномот Q. Лесно се проверува дека: $x_i^3=1$, $1+x_i=-x_i^2$ $(i=1,2)$. За полиномот P да е делив со полиномот Q потребно е и доволно $P(x_i)=0, (i=1,2)$. За $m=6n$ имаме $P(x_i)=3$, за $m=6n+1$, $P(x_i)=-2x_i^2\neq 0$, за $m=6n+2$, $P(x_i)=0$, за $m=6n+3$, $P(x_i)=1$, за $m=6n+4$, $P(x_i)=0$, за $m=6n+5$, $P(x_i)=-2x_i^2\neq 0$. Значи, P е делив со Q ако и само ако $m=6n\pm 2$.

4. Докажи дека полиномот $P(x)=x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ е делив со полиномот $Q(x)=x^4+x^3+x^2+x^1+1.$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}P(x)-Q(x)&=(x^{44}-x^4)+(x^{33}-x^3)+(x^{22}-x^2)+(x^{11}-x)\\&=x^4(x^{40}-1)+x^3(x^{30}-1)+x^2(x^{20}-1)+x(x^{10}-1)\end{aligned}$$

Секој од биномите во заградата е делив со x^5-1. Освен тоа $Q(x)=\frac{x^5-1}{x-1}, (x\neq 1).$ Заради тоа

$$\frac{P(x)-Q(x)}{Q(x)}=\frac{(x-1)[P(x)-Q(x)]}{x^5-1}=\frac{P(x)}{Q(x)}-1$$

е полином. Значи, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ е полином, што и требаше да се докаже.

5. Одреди ги p и q така што полиномот $P(x)=x^4+px^2+q$ е делив со полиномот $Q(x)=x^2+2x+5$. За така добиените p и q факторизирај го полином P.

Решение. Количникот на овие два полиноми мора да биде полином од втор степен. Заради тоа p, q, b и c ги одредуваме од идентитетот

$$x^4+px^2+q=(x^2+2x+5)(x^2+bx+c)\,.$$

Ако ги измножиме полиномите од десната страна и ги изедначиме коефициентите покрај истите степени на полиномите од двете страни на равенството, добиваме: $p=6$, $q=25$, $b=-2$ и $c=5$. Според тоа,

$$x^4+6x^2+25=(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)\,.$$

6. а) Разложи го на множители полиномот $(a+b)^7-a^7-b^7$;

б) Реши ја равенката $(x+7)^7=x^7+7^7$.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}(a+b)^7-a^7-b^7&=(\,a+b\,)[(a+b)^6-(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)]\\&=(a+b)(7a^5b+14a^4b^2+21a^3b^3+14a^2b^4+7ab^5)\\&=7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4).\end{aligned}$$

б) Според а) добиваме

$$(x+7)^7-x^7-7^7=49x(x+7)(x^2+7x+49)^2\,.$$

Од последниот запис, лесно се добиваат решенијата на дадената равенка.

7. Разложи го на прости множители полиномот

$$P(x)=x^4+x^3-8x^2+3x+5\,.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на обликот на полиномот

$$\begin{aligned}P(x)&=x^4+2x^3-5x^2-(x^3+2x^2-5x)-(x^2+2x-5)\\&=x^2(x^2+2x-5)-x(x^2+2x-5)-(x^2+2x-5)\\&=(x^2-x-1)(x^2+2x-5)\end{aligned}$$

Нули на полиномот се $x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ и $x_{3/4}=-1\pm\sqrt{6}$. Според тоа ,

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\,.$$

8. Одреди ги целобројните нули на полиномот, а потоа разложи го на прости множители:

а) x^3-6x-9

б) $x^4-4x^3+7x^2-16x+12$

в) $x^5-2x^4-13x^3+26x^2+36x-72$

Решение. а) Делители на бројот -9 се $\pm1,\pm3\pm9$. Со директна проверка заклучуваме дека само 3 е нула на полиномот.

Ако полиномот го поделиме со $x-3$, добиваме полином x^2+3x+3, кој има комплексни корени. Заради тоа

$$x^3-6x-9\equiv(x-3)(x^2+3x+3).$$

б) Единствени делители на бројот 12 за кои се анулира полиномот се 1 и 3; па затоа $(x-1)(x-3)(x^2+4)$.

в) Целобројни делители на бројот -72, а за кои се анулира полиномот се $\pm 2, \mp 3$. Ако полиномот се подели со полиномот

$$(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

се добива полиномот $x-2$. Според тоа,

$$x^5-2x^4-13x^3+26x^2+36x-72\equiv(x-2)^2(x+2)(x-3)(x+3),$$

па $x=2$ е нула од втор ред на дадениот полином.

3. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ЗА ПОЛИНОМИ

1. Нека за секој $n\geq 1$, $f(n)=1!+2!+3!+...+n!$. Да се најдат полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ такви што

$$f(n+2)=P(n)f(n+1)+Q(n)f(n),\text{ за секој } n\geq 1.$$

Решение. Од дефинцијата на f и од дефинцијата на $n!$ имаме

$$f(n+2)-f(n+1)=(n+2)!=(n+2)[(n+1)!]=(n+2)[f(n+1)-f(n)].$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$f(n+2)=(n+3)f(n+1)-(n+2)f(n).$$

Сега е јасно дека бараните полиноми се $P(x)=x+3$ и $Q(x)=-(x+2)$.

2. Определи го полиномот P со најмал можен степен таков што

а) коефициентите на P се цели броеви

б) сите нули на P се цели броеви

в) $P(0)=-1$

г) $P(3)=128$.

Решение. Нека P е полином со степен n и нека $b_1,b_2,...,b_m$ се неговите нули. Тогаш

$$P(x)=a(x-b_1)^{r_1}(x-b_2)^{r_2}...(x-b_m)^{r_m},$$

каде $r_1,r_2,...,r_m\geq 1$ се природни бреови и a е цел број. Од условот $P(0)=-1$ добиваме дека $a(-1)^n b_1^{r_1}b_2^{r_2}...b_m^{r_m}=-1$. Последното равенство е можно ако и само ако $|a|=|b_j|=1$, за $j=1,2,...,m$. Според тоа,

$$P(x)=a(x-1)^p(x+1)^{n-p},$$

за некој природен број $p\geq 0$ и n природен број. Но, од условот $P(3)=128$ добиваме $a\cdot 2^p 2^{2n-2p}=2^7$. Тогаш $2n-p=7$. Најмала вредност за n за кој имаме решение на последната равенка е $n = 4$, а во тој случај $p = 1$ и $a = 1$. Полиномот $P(x) = (x-1)(x+1)^3$ ги исполнува условите од задачата.

3. Определи го полиномот $P(x)$ ако тој е од четврти степен, $P(0) = 0$ и

$$P(x) - P(x-1) = x^3 \tag{1}$$

за секој реален број x. Користејќи го добиениот резултат пресметај го збирот

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3. \tag{2}$$

Решение. Ако во фунцкионалната равенка (1) замениме $x = 0$, добиваме

$$P(0) - P(-1) = 0$$

и заради $P(0) = 0$, имаме $P(-1) = 0$. Значи, $x = -1$ е нула на полиномот. Полиномот е од четврти степен, па според тоа

$$P(x) = x(x+1)(ax^2 + bx + c).$$

Ако замениме во (1), добиваме

$$x(x+1)(ax^2 + bx + c) - (x-1)x[a(x-1)^2 + b(x-1) + c] = x^3,$$

односно

$$x^2(4a-1) + x(3a-3b) + 2c + a - b = 0.$$

Полиномот од левата страна на последното равенство е нулати, ако и само ако

$$\begin{cases} 4a - 1 = 0 \\ 3a - 3b = 0 \\ 2c + a - b = 0 \end{cases}$$

Решение на системот е $c = 0,\ a = b = \frac{1}{4}$. Значи, бараниот полином е

$$P(x) = \frac{1}{4}x^2(x+1)^2.$$

Ако во (1) замениме редоследнот $x = 1, 2, 3, ..., n$, тогаш ја добиваме низата равенства

$$P(1) - P(0) = 1^3$$
$$P(2) - P(1) = 2^3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P(n) - P(n-1) = n^3$$

Од тоа што $P(0) = 0$, ако ги собереме претходните равенства, добиваме

$$P(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3.$$

Сега, јасно е дека

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

4. Да се најдат сите полиноми

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_\circ,\ n \geq 2,$$

со реални и ненулти коефициенти така што

$$P(x) - P_1(x)P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_{n-1}(x)$$

е константен полином, каде

$$P_1(x)=a_1x+a_\circ,\ P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_\circ,\ \dots,\ P_{n-1}(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_\circ\,.$$

Решение. Бидејќи полиномот $P(x)-P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_{n-1}(x)$ е константен и $a_k\neq 0$, $k=\overline{1,n-1}$, имаме дека

$$\deg P=\deg(P_1P_2\dots P_{n-1})=\deg P_1+\deg P_2+\dots+\deg P_{n-1}=1+2+\dots+(n-1)=\tfrac{n(n-1)}{2}\,.$$

Добиваме $n=\frac{n(n-1)}{2}$, па $n\in\{0,3\}$. Бидејќи $n\geq 2$, заклучуваме $n=3$. Според тоа

$$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\,,\text{ и }P(x)-P_1(x)P_2(x)=k\,,\ k\in\mathbb{R}$$

ако и само ако:

$$\begin{aligned}a_3&=a_1a_2\\ a_2&=a_1^{\ 2}+a_0a_2\\ a_1&=2a_0a_1\\ a_0&=a_0^{\ 2}+k\end{aligned}\qquad(1)$$

Од (1) имаме $a_1(1-2a_0)=0$, бидејќи $a_1\neq 0$ следува $a_0=\frac{1}{2}$ и $k=\frac{1}{4}$. Нека $a_1=a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогаш $a_2=2a^2$ и $a_3=2a^3$.

Значи, бараните полиноми се од облик $P(x)=2a^3x^3+2a^2x^2+ax+\frac{1}{2}$, каде $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5. Докажи дека постојат различни реални броеви x,y,z такви што

$$x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2\,.\qquad(1)$$

За таквите реални броеви определи ја максималната вредност на $x+y+z$.

Решение. Ќе го разгледаме полиномот $f(t)=t^3-3t^2$. Тогаш, ако постојат три различни броеви x,y,z такви што се исполнети почетните равенства (1), т.е. ако

$$x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2=a\,,$$

тогаш тие се нули на полиномот $f(t)-a=t^3-3t^2-a$. Ќе ги испитаме особините на овој полином. Бидејќи $f\,'(t)=3t^2-6t$, добиваме дека стационарни, а во исто време негови точки на локален екстрем се $t_1=0$ и $t_2=2$. Ако го испитаме однесувањето на $f\,'(t)$ на интервалите $(-\infty,0),(0,2),(2,+\infty)$, ќе видиме дека на $(-\infty,0)$ расте, на $(0,2)$ опаѓа и на $(2,+\infty)$ полиномот расте. Значи, $(0,0)$ е точка од графикот на полиномот во која тој има максимум, а $(2,-4)$ е точка во која тој има локален минимум.

За графикот на полиномот едноставно може да се направи скица. Од скицата е јасно дека дека за $a\in(-4,0)$, $y=f(t)$ и $y=a$ имаат три различни пресечни точки. Тоа значи дека постојат три различни вредности x,y,z со бараното својство.

Во тој случај, равенката

$$t^3-3t^2-a=0$$

има три различни реални решенија x, y, z, од каде пак според Виетовите правила $x+y+z=-\frac{-3}{1}=3$, за било кое $a\in(-4,0)$.

6. Најди ги сите квадратни полиноми $P(x)=ax^2+bx+c$ за кои се исполнети условите:

$$|P(x)|\leq 1,\ x\in[-1,1], \tag{1}$$

$$a^2+b^2+c^2=5. \tag{2}$$

Решение. Ставаме $P(-1)=p,\ P(1)=q$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} a-b+c=p \\ a+b+c=q \end{cases}$$

од каде наоѓаме $a=\frac{p+q-2c}{2}, b=\frac{q-p}{2}$. Според тоа,

$$a^2+b^2+c^2=(\tfrac{p+q-2c}{2})^2+(\tfrac{q-p}{2})^2+c^2=\frac{p^2+q^2+4c^2-2c(p+q)}{2}.$$

Од (1) следува дека $p^2\leq 1, q^2\leq 1, c^2\leq 1$, па затоа

$$-2c(p+q)\leq|2c(p+q)|\leq 2|c|\cdot(|p|+|q|)\leq 4.$$

Тогаш,

$$5=a^2+b^2+c^2=\frac{p^2+q^2+4c^2-2c(p+q)}{2}\leq\frac{1+1+4+4}{2}=5,$$

па затоа во горните неравенства важат знаци за равенства, односно

$$|c|=1, |p|=1, |q|=1 \text{ и } -2c(p+q)=4, \text{ т.е. } c(p+q)=-2.$$

Сега лесно добиваме дека $a=2, b=0, c=-1$ или $a=-2, b=0, c=1$.

7. Најди ги сите полиноми $P(x)$ такви да

$$xP(x-1)=(x-3)P(x), \text{ за секој } x\in\mathbb{R}.$$

Решение. Ако во давената равенка ставиме последователно $x=0,\ \ x=1,\ \ x=2$ добиваме $P(0)=P(1)=P(2)=0$. Според тоа,

$$P(x)=x(x-1)(x-2)Q(x).$$

Со замена во дадената равенка добиваме

$$x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1)=(x-3)x(x-1)(x-2)Q(x),$$

т.е. $Q(x)=Q(x-1)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Последната равенка значи дека полиномот $Q(x)$ има еднакви вредности во бесконечно многу точки $x, x-1, x-2,\ \ x-3,...$ и единствен полином за кој тоа е можно е полиномот $Q(x)=c$, каде c е произволна константа. Според тоа,

$$P(x)=cx(x-1)(x-2), c\in\mathbb{R}.$$

8. Најди ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви да

$$2+2P(x)=P(x-1)+P(x+1). \tag{1}$$

Решение. Јасно, ниту еден константен полином не е решение на равенката (1), а истото важи и за линераните полиноми.

Понатаму, полином од видот $P(x)=ax^2+bx+c$ е решение на (1) ако и само ако $a=1$. Според тоа сите квадратни полиноми од видот $P(x)=x^2+bx+c$ се решенија на (1). Ќе докажеме дека равенката (1) нема други решенија.

Нека $P(x)$ е решение на (1). Дефинираме $Q(x)=P(x)-x^2$. Ако замениме во (1) добиваме

$$Q(x)-Q(x-1)=Q(x+1)-Q(x).$$

Нека

$$R(x)=Q(x)-Q(x-1).$$

За полиномот $R(x)$ важи $R(x)=R(x+1)$, па од задача 45 следува дека $R(x)$ е константен полином. Нека $R(x)=b$, од што следува $Q(x)=Q(x-1)+b$. Дефинираме полином $S(x)=Q(x)-bx$. За полиномот $S(x)$ важи $S(x)=S(x-1)$, па значи $S(x)$ е константен полином. Нека $S(x)=c$. Конечно, добиваме

$$P(x)=x^2+Q(x)=x^2+bx+S(x)=x^2+bx+c.$$

9. Најди ги сите полиноми $p(x)$, со целобројни коефициенти, такви што

$$16p(x^2)=[p(x)]^2, \text{ за секој } x\in\mathbb{R}.$$

Решение. Нека $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$ е бараниот полином. Ако во даденото равенство ставиме $x=0$ добиваме $16a_0=a_0^2$, од што следува $a_0=0$ или $a_0=16$. Од друга страна, ако ги изедначиме коефициентите пред x^{2n} во даденото равенство, тогаш ја добиваме равенката $16a_n=2^{2n}a_n^2$ и како $a_n\neq 0$, добиваме $a_n=\frac{16}{4^n}$. Но, a_n е цел број, па затоа $n=0$ или $n=1$ или $n=2$.

За $n=0$ полиномите се $p(x)=0$ и $p(x)=16$.

За $n=1$ можни полиноми се $p(x)=4x$ и $p(x)=4x+16$. Притоа, само $p(x)=4x$ ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ можни полиноми се $p(x)=x^2+a_1x$ и $p(x)=x^2+a_1x+16$. Со непосредна проверка добиваме $a_1=0$ и само $p(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата.

10. Најди полином од трет степен $P(x)$, кој ја задоволува релацијата

$$P(x)-P(x-1)=x^2,$$

а потоа користејќи го истиот најди го збирот на квадратите на првите n природни броеви.

Решение. Нека $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Тогаш

$$P(x)-P(x-1)=3ax^2-(2b-3a)x+a-b+c$$

и како $P(x)-P(x-1)=x^2$ добиваме

$$3ax^2-(2b-3a)x+a-b+c=x^2 .$$

Со изедначување на коефициентите пред степените на x добиваме $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{6}$. Значи, $P(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d$. За $k=0,1,2,...,n$ добиваме

$$P(1)-P(0)=1^2$$

$$P(2)-P(1)=2^2$$

$$.........................$$

$$P(n)-P(n-1)=n^2.$$

Ако ги собереме горните равенства добиваме

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=P(n)-P(0)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

11. Нека a,b,c се реални броеви такви да $9a+11b+29c=0$. Докажи дека еден корен на полиномот $P(x)=ax^3+bx+c$ лежи во интервалот $[0,2]$.

Решение. Имаме $P(0)=c$ и $P(2)=8a+2b+c$. Тогаш

$$\begin{aligned}0&=9a+11b+29c=P(0)+P(2)+a+9b+27c\\&=P(0)+P(2)+\tfrac{1}{27}(\tfrac{a}{27}+\tfrac{b}{3}+c)\\&=P(0)+P(2)+\tfrac{1}{27}P(\tfrac{1}{3}),\end{aligned}$$

т.е.

$$P(0)+P(2)+\tfrac{1}{27}P(\tfrac{1}{3})=0. \qquad (1)$$

Ако еден од броевите $P(0),P(2)$ или $P(\frac{1}{3})$ е еднаков на 0, тогаш јасно $P(x)$ има корен во $[0,2]$. Ако овие броеви се различни од 0, тогаш од (1) следува дека два од овие броја се различни по знак. Но полином е непрекината функција, па затоа равенката $P(x)=0$ во еден од интервалите $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},2]$ или $[0,2]$ има барем едно решение, т.е. полиномот $P(x)$ има барем еден корен во интервалот $[0,2]$.

12. Дали постои полином $P(x)$ таков што $P(1)=1, P(2)=2$ и $P(n)$ е ирационален број за секој цел број n различен од 1 и 2?

Решение. Да го разгледаме полиномот

$$P(x)=\sqrt{2}(x-1)(x-2)+x .$$

Јасно,

$$P(1)=1, P(2)=2 \text{ и } P(n)=\sqrt{2}(n-1)(n-2)+n$$

е ирационален број за секој цел број n различен од 1 и 2, како збир на ирационален и рационален број.

13. Нека $P(x)$ е квадратен трином со ненегативни коефициенти. Докажи дека за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи неравенството

$$[P(xy)]^2\le P(x^2)P(y^2) .$$

Решение. Нека $P(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\geq 0, a\neq 0$. Тогаш

$$[P(xy)]^2-P(x^2)P(y^2)=(ax^2y^2+bxy+c)^2-(ax^4+bx^2+c)(ay^4+by^2+c)$$
$$=-ab(x^2y^2(x-y)^2-ac(x^2-y^2)^2-bc(x-y)^2\leq 0$$

бидејќи $a,b,c\geq 0$ и $t^2\geq 0$, за секој $t\in\mathbb{R}$.

14. Дали постојат реални броеви b и c такви што секој од полиномите

$$P(x)=x^2+bx+c \text{ и } Q(x)=2x^2+(b+1)x+c+1$$

има по два целобројни корени.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат реални броеви b и c со саканото својство. Тогаш, ако k и l се корени на $P(x)$, а m и n се корени на $Q(x)$ од Виетовите формули следува

$$k+l=-b, \qquad (1)$$
$$kl=c, \qquad (2)$$
$$2(m+n)=-b-1, \qquad (3)$$
$$2mn=c+1. \qquad (4)$$

Од (4) следува дека c е цел непарен број, па затоа од (2) добиваме дека k и l се непарни броеви. Но, тоа според (1) значи дека b е парен број, што противречи на (3). Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат реални броеви b и c со саканото својство.

15. Дали постојат полиноми

$$P(x)=ax^2+bx+c \text{ и } Q(x)=(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$$

со целобројни коефициенти, секој од кои има по два целобројни корени?

Решение. Ако за полиномот kx^2+lx+m се целобројни коефициенти двата корени x_1 и x_2 се целобројни, тогаш од $x_1x_2=\frac{m}{k}$ и $x_1+x_2=-\frac{l}{k}$ следува дека m и l се делат со k. Понатаму, од броевите a и $a+1$ едниот е парен и без ограничување на општоста можеме да земеме дека a е парен број. Според тоа, броевите b и c се парни, што значи дека $b+1$ и $c+1$ се непарни. Нека y_1 и y_2 се целобројни корени на полиномот $Q(x)$. Тогаш $y_1y_2=\frac{c+1}{a+1}$ и $y_1+y_2=-\frac{b+1}{a+1}$ се непарни броеви, што е противречност бидејќи збирот и рпоизводот на два цели броја не можат истовремено да се непарни броеви. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат полиноми со саканото својство.

16. Најди ги сите полиноми $p(x)$ такви да

$$(x-16)p(2x)=16(x-1)p(x), \qquad (1)$$

за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $p(x)$ е ненулти полином кој ја задоволува равенката (1). Тогаш $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$, каде $a_n\neq 0$ и $\deg p=n$. Имаме,

$$p(2x)=2^na_nx^n+2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$2^n a_n x^{n+1} + ... = 16 a_n x^{n+1} + ...,$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Според тоа, $2^n a_n = 16 a_n$ и како $a_n \neq 0$ од последното раенство следува $n = 4$, т.е. $\deg p = 4$. Јасно, $p(2) = 0$ и $p(2x) = 0$ ако $p(x) = 0$, па затоа

$$0 = p(2) = p(4) = p(8) = p(16),$$

т.е. 2, 4, 8 и 16 се нули на полиномот p. Според тоа,

$$p(x) = c(x-2)(x-4)(x-8)(x-16), \ c \in \mathbb{R}$$

се решенијата на равенката (1).

17. Најди ги сите полиноми f со релани коефициенти такви што за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$xf(x)f(1-x) + x^3 + 100 \geq 0.$$

Решение. Јасно, $f \not\equiv 0$. Нека $n = \deg f$, т.е. $f(x) = ax^n + g(x)$, каде $g(x)$ е полином таков што $\deg g \leq n-1$ или $g(x) \equiv 0$. Водечкиот член на полиномот $xf(x)f(1-x)$ е еднаков на $(-1)^n a^2 x^{2n+1}$, т.е. левата страна на даденото неравенство е полином со највисок непарен степен. Затоа $2n+1 = 3$ и $(-1)^n a^2 = -1$. Според тоа, $n = 1$ и $a = \pm 1$, што значи дека $f(x) = x + b$ или $f(x) = -x + b$, каде $b \in \mathbb{R}$.

За $f(x) = x + b$ од неравенството добиваме $x^2 + (b^2 + b)x + 100 \geq 0$, што е можно ако и само ако $|b^2 + b| \leq 20$, што значи $b \in [-5, 4]$.

За $f(x) = -x + b$ од неравенството добиваме $x^2 + (b^2 - b)x + 100 \geq 0$, што е можно ако и само ако $|b^2 - b| \leq 20$, што значи $b \in [-4, 5]$.

V РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

1. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА НА РЕАЛНИТЕ ФУНКЦИИ

1. Да се скицира графикот на функцијата

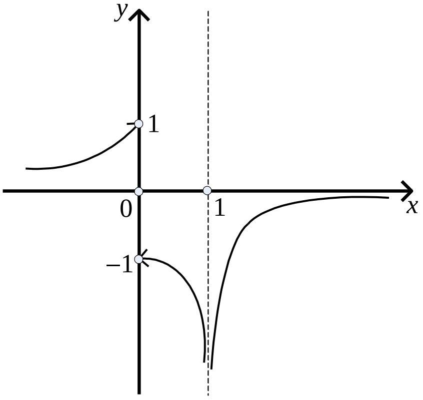
$$y=-\frac{|x|}{|x-1|x}.$$

Решение. Функцијата не е дефинирана за $x=0$ и $x=1$. Ако $x>0$ и $x-1>0$, т.е. $x\in(1,+\infty)$ и ако $x<0$ и $x-1<0$, т.е. $x\in(-\infty,0)$, тогаш функцијата може да се напише во обликот

$$y=-\frac{1}{x-1}.$$

Ако пак $x\in(0,1)$, тогаш функцијата може да се запише во обликот $y=\frac{1}{x-1}$.

Скица на графикот на функцијата е претставен на цртежот.



2. Докажи дека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, определена со $f(x)=x^3$ има инверзна функција.

Решение. Од $x\neq x'$ следува $f(x)=x^3\neq x'^3=f(x')$, што значи дека f е инјекција. Меѓутоа, за секој $y\in\mathbb{R}$ важи $f(\sqrt[3]{y})=\sqrt[3]{y}^3=y$, па затоа f е сурјекција, што значи дека е биекција.

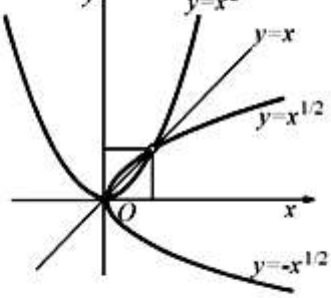
Според тоа, f има инверзно пресликување кое е определено со $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

3. Докажи дека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определена со $f(x)=x^2$ нема инверзна функција.

Решение. За оваа функција важи $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, т.е. таа не е инјекција, што значи дека не е биекција.

Според тоа, функцијата $f(x)=x^2$ нема инверзна функција.

Забелешка. Ако функцијата $f(x)=x^2$ одделно ја разгледаме на секое од множествата $A_1=(-\infty,0]$ и $A_2=[0,+\infty)$, тогаш функцијата $f_1:A_1\to A_2$ определена со $f_1=x^2$ е биекција и нејзина инверзна функција е $f_1^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ и функцијата $f_2:A_2\to A_2$, определена со $f_2=x^2$



е биекција (провери!) и нејзина инверзна функција е $f_2^{-1}(x)=\sqrt{x}$. Графиците на функциите $f_2=x^2$ и $f_2^{-1}(x)=\sqrt{x}$ се дадени на горниот цртеж.

4. Испитај ја парноста на функција

а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определена со $f(x)=x^2$, за секој $x\in\mathbb{R}$

б) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определена со $f(x)=x^3$, за секој $x\in\mathbb{R}$

в) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ определена со $f(x)=\sqrt{x}$,

г) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определена со $f(x)=x^3+x^2$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. а) Имаме $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Според тоа, оваа функција е парна.

б) Имаме:

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)\text{, за секој } x\in\mathbb{R}\,.$$

Според тоа, оваа функција е непарна.

в) Дефиниционата област на функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ е множеството $[0,+\infty)$. Ова множество не е симетрично во однос на координатниот почеток, па затоа оваа функција е ниту парна ниту непарна.

г) Дефиниционата област на функцијата $f(x)=x^3+x^2$ е множеството $\mathbb{R}$. Меѓутоа, за оваа функција важи

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)^2=-x^3+x^2\neq\pm f(x)\,,$$

што значи дека таа е ниту парна ниту непарна.

5. Докажи дека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определена со $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ е ограничена.

Решение. Од $x^2\geq 0$, за секој $x\in\mathbb{R}$ следува $x^2+1\geq 1$, за секој $x\in\mathbb{R}$, па затоа $0<\frac{1}{x^2+1}\leq 1$, за секој $x\in\mathbb{R}$, т.е. $|\frac{1}{x^2+1}|\leq 1$. Според тоа, функцијата $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ е ограничена на целата реална права.

6. Испитај ја монотонста на функцијата

а) $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$,

б) $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$.

Решение. а) Бидејќи од $x_1<x_2$ следува

$$f(x_1)=x_1^3<x_2^3=f(x_2)$$

добиваме дека оваа функција строго монотоно расте на целата реална права.

б) Бидејќи од $x_1<x_2\leq 0$ следува

$$f(x_1)=x_1^2>x_2^2=f(x_2)$$

добиваме дека оваа функција строго монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty,0]$. Меѓутоа, ако $0\leq x_1<x_2$, тогаш

$$f(x_1)=x_1^2<x_2^2=f(x_2),$$

па затоа функцијата $f(x)=x^2$ строго монотоно расте на интервалот $[0,\infty)$.

7. Докажи дека функцијата $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $x\in[1,+\infty)$ има инверзна функција.

Решение. Имаме:

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1}{1+x_1^2}-\frac{2x_2}{1+x_2^2}=\frac{2x_1(1+x_2^2)-2x_2(1+x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

$$=\frac{2(x_1-x_2)+2x_1x_2(x_2-x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{2(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)},$$

и ако $1\le x_1<x_2$, тогаш од $x_1-x_2<0$ и $1-x_1x_2<0$ следува

$$(x_1-x_2)(1-x_1x_2)>0,$$

т.е.

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}>0,$$

што значи дека оваа функција строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област. Според тоа, функцијата $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $x\in[1,+\infty)$ има инверзна.

8. Функцијата $f:[0,a)\to\mathbb{R}$ има својство да за произволно $x\in\mathbb{R}$ и фиксен број $a\in\mathbb{R}$ е исполнето равенството

$$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Докажи дека таа е периодична функција.

Решение. Од равенството $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ добиваме

$$f(x+2a)=f(x+a+a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=\frac{\frac{2}{1-f(x)}}{-\frac{2f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)},$$

$$f(x+3a)=f(x+2a+a)=\frac{1+f(x+2a)}{1-f(x+2a)}=\frac{1-\frac{1}{f(x)}}{1+\frac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)-1}{f(x)+1},$$

$$f(x+4a)=f(x+3a+a)=\frac{1+f(x+3a)}{1-f(x+3a)}=\frac{1-\frac{f(x)-1}{f(x)+1}}{1+\frac{f(x)-1}{f(x)+1}}=\frac{2f(x)}{2}=f(x).$$

Од произволноста на x добиваме дека функцијата е периодична со периода $4a$.

Значи, произволна функција $f:[0,a)\to\mathbb{R}$, која не прима вредност 1, може периодично да се продолжи (со периода $4a$) на целата реална права.

9. Функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ е таква што постои природен број a за кој

$$f(a)=f(1995),\ f(a+1)=f(1996),\quad f(a+2)=f(1997)\ \text{и}\ f(n+a)=\frac{f(n)-1}{f(n)+1},$$

за секој $n\in\mathbb{N}$.

а) докажи дека $f(n+4a)=f(n)$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

б) определи ја најмалата вредност за a.

Решение. а) Од равенството $f(n+a)=\frac{f(n)-1}{f(n)+1}$, добиваме

$$f(n+2a)=f((n+a)+a)=\frac{f(n+a)-1}{f(n+a)+1}=\frac{\frac{f(n)-1}{f(n)+1}-1}{\frac{f(n)-1}{f(n)+1}+1}=-\frac{1}{f(n)}$$

$$f(n+4a)=f((n+2a)+2a)=-\frac{1}{f(n+2a)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(n)}}=f(n).$$

б) Најмалата вредност за a е 3.

Навистина, ако $a=1$, тогаш

$$\begin{aligned}f(1)&=f(a)=f(1995)=f(3+1992)\\&=f(3+498\cdot 4)=f(3+498\cdot 4a)=f(3)\\&=f(3a)=f(a+2a)=f(1+2a)=-\frac{1}{f(1)}.\end{aligned}$$

Значи, $(f(1))^2=-1$ што не е можно.

Ако $a=2$, тогаш

$$\begin{aligned}f(2)&=f(a)=f(1995)=f(3+249\cdot 4a)\\&=f(3)=f(a+1)=f(1996)\\&=f(4+249\cdot 4a)=f(4)=f(2+a)=\frac{f(2)-1}{f(2)+1}.\end{aligned}$$

Од равенството $f(2)=\frac{f(2)-1}{f(2)+1}$ добиваме $(f(2))^2=-1$ што не е можно.

Не е тешко да се провери дека $a=3$ е најмалата вредност за која таква функција постои.

10. Дадена е функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x).$$

Докажи дека f е периодична функција.

Решение. Од даденото равенство што го исполнува функцијата f имаме :

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x)-f(x-1))=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1),$$

односно

$$f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1).$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}f(x+4)&=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)\\&=f(x)-\sqrt{2}(f(x-1)+f(x+1))\\&=f(x)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}f(x)\\&=f(x)-2f(x)=-f(x).\end{aligned}$$

Од ова пак следува дека,

$$f(x+8)=-f(x+4)=-(-f(x))=f(x).$$

Значи, функцијата f е периодична со период 8.

11. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ја задоволува равенката

$$f(x^2+x+3)+2f(x^2-3x+5)=6x^2-10x+17,$$

за секое $x\in\mathbb{R}$. Пресметај $f(85)$.

Решение. Ако во равенката на местото на x ставиме $1-x$ таа го добива обликот

$$f(x^2-3x+5)+2f(x^2+x+3)=6x^2-2x+13.$$

Од последната равенка, со елиминација на $f(x^2-3x+5)$ употребувајќи ја почетната равенка, добиваме

$$-3f(x^2+x+3)=-6x^2-6x-9$$

$$f(x^2+x+3)=2x^2+2x+3$$

Од последната равенка имаме

$$f(x^2+x+3)=2(x^2+x+3)-3.$$

Јасно, постои $x\in\mathbb{R}$ таков што $x^2+x+3=85$. Но тогаш

$$f(85)=2\cdot 85-3=170-3=167.$$

12. За функцијата f е исполнето равенството

$$f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2f(n),$$

за секој природен број $n\in\mathbb{N}$. Колку е $f(2010)$, ако $f(1)=1005$.

Решение. Бидејќи

$$f(1)+f(2)+...+f(n-1)=(n-1)^2f(n-1),$$

добиваме

$$(n-1)^2f(n-1)+f(n)=n^2f(n)$$

$$f(n)(n^2-1)=(n-1)^2f(n-1)$$

$$f(n)=\tfrac{n-1}{n+1}f(n-1)$$

Од последната рекурентна зависност, добиваме

$$f(n)=2\tfrac{(n-1)!}{(n+1)!}f(1)=\tfrac{2}{n(n+1)}f(1).$$

Бидејќи $f(1)=1005$, за $n=2010$ добиваме

$$f(2010)=\tfrac{2f(1)}{2010(2010+1)}=\tfrac{2\cdot 1005}{2010(2010+1)}=\tfrac{1}{2011}.$$

13. Функцијата f ги задоволува условите

а) $f(0)=1$

б) За секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$1+f(0)+f(1)+...+f(n-1)=f(n). \qquad (1)$$

Пресметајте го збирот

$$S=f(0)^2+f(1)^2+...+f(n-1)^2+f(n)^2.$$

Решение. Ако во равенството (1) наместо n ставиме $n-1$ добиваме

$$1+f(0)+f(1)+...+f(n-2)=f(n-1). \qquad (2)$$

Од (2) заменуваме во (1) и добиваме

$$f(n)=2f(n-1)\,. \qquad (3)$$

Од $f(0)=1$ и од (3), за $n=1,2,3$ наоѓаме

$$f(1)=2f(0)=2\cdot 1,$$

$$f(2)=2f(1)=2\cdot 2=2^2, \quad ,$$

$$f(3)=2f(2)=2\cdot 2^2=2^3.$$

Ќе докажеме дека $f(n)=2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

За $n=1$ тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $n=k$, т.е. дека $f(k)=2^k$. Од претпоставката и од (3), за $n=k+1$ имаме

$$f(k+1)=2f(k)=2\cdot 2^k=2^{k+1},$$

т.е. тврдењето е точно и за $n=k+1$. Од принципот на математичка индукција следува дека

$$f(n)=2^n, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Конечно, за бараниот збир добиваме

$$\begin{aligned} S &= f(0)^2+f(1)^2+...+f(n-1)^2+f(n)^2 \\ &=1^2+2^2+(2^2)^2+...+(2^n)^2 \\ &=1+4+4^2+...+4^n=\tfrac{4^{n+1}-1}{4-1} \\ &=\tfrac{1}{3}(4^{n+1}-1). \end{aligned}$$

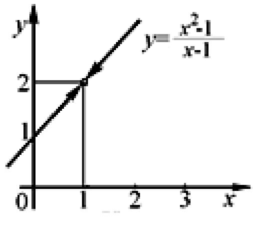
2. ГРАНИВА НА ФУНКЦИЈА

1. Определи ја границата на функцијата $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, $x\neq 1$ во точката $x_0=1$.

Решение. Функцијата е определена во секоја точка од множеството $(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$. Нека $\{x_n\}$ е произволна низа со општ член $x_n\neq 1$ и таква што $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. За низата $\{f(x_n)\}$ имаме

$$f(x_n)=\frac{x_n^2-1}{x_n-1}=\frac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-1}=x_n+1,$$

па затоа $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)=2$.



Според тоа, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ (цртеж десно).

2. Докажи дека функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ нема граница во точката $x_0=0$.

Решение. **Н**изите $\{\frac{1}{n\pi}\}$ и $\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\}$ конвергираат кон точката $x_0 = 0$, но низите вредности $\{\sin n\pi\}$ и $\{\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\}$ конвергираат кон 0 и 1 соодветно. Последното значи дека $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ нема граница во $x_0 = 0$.

3. Докажи дека $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Решение. Функцијата $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ не е определена во точката $x_0 = 0$, но е определена на секое множество кое не ја содржи оваа точка. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Земаме $\delta = \varepsilon > 0$ и добиваме

$$|f(x) - 0| = |x\sin\tfrac{1}{x} - 0| = |x\sin\tfrac{1}{x}| \le |x|\cdot 1 = |x| < \varepsilon \text{, кога } |x - 0| < \delta = \varepsilon,$$

што значи дека $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

4. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, в) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1})$.

Решение. а) Имаме:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3} = \frac{2^2+5}{2^2-3} = \frac{4+5}{4-3} = 9.$$

б) Имаме:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{1-1}{1\cdot(1+1)} = \frac{0}{2} = 2.$$

в) Имаме:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}) = \lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1} = 1.$$

5. Докажи дека $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{6-x} = +\infty$.

Решение. Нека $M > 0$. Ако земеме $N = M^2 - 6$, тогаш за $x < 6 - M^2$ добиваме $6 - x > 6 - 6 + M^2 = M^2$, па затоа $\sqrt{6-x} > \sqrt{M^2} = M$, што значи

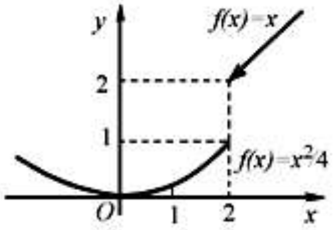
$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{6-x} = +\infty.$$

7. Определи ги еостраните граници на функцијата

$$f(x) = \begin{cases} x^2/4, & x \le 2 \\ x, & x > 2, \end{cases}$$

во точката $x_0 = 2$.

Решение. Бараните еднострани изводи се:



$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{4}=1 \text{ и } \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x=2.$$

Бидејќи $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1\neq 2=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ заклучуваме дека во оваа точка дадената функција нема граница.

6. Пресметај ја границата $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Решение. Имаме

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}^2-2^2}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}.$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

7. Пресметај ја границата $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Решение. Имаме

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)=3.$$

8. Докажи дека

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

Решение. Навистина, ако го искористиме неравенството $|\sin x|\leq|x|$ добиваме

$$|\cos x-\cos a|=2|\sin\tfrac{x-a}{2}\sin\tfrac{x+a}{2}|\leq 2|\sin\tfrac{x-a}{2}|\leq 2\tfrac{|x-a|}{2}=|x-a|$$

и ако за дадено $\varepsilon>0$ земеме $\delta=\varepsilon>0$ добиваме дека $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

9. Докажи дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Решение. Нека AM е лак на единечната кружница, кој соодветствува на агол со големина $x>0$ радијани (цртеж десно). Тогаш,

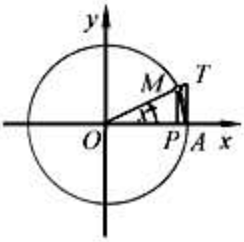
$$\overline{OA}=1, \overline{MP}=\sin x, \overline{OP}=\cos x.$$

Јасно плоштината на кружниот исечок OAM е поголема од плоштината на $\triangle OAM$ и е помала од плоштината на OAT, т.е.

$$\tfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{MP}<\tfrac{1}{2}\overline{OA}^2 x<\tfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AT}$$

т.е.

$$\overline{MP}<x<\overline{AT} \qquad (1)$$



Но, $\overline{AT}:\overline{OA}=\overline{MP}:\overline{OP}$, т.е. $\overline{AT}=\frac{\overline{MP}\cdot\overline{OA}}{\overline{OP}}=\frac{\sin x}{\cos x}$, ако замениме во (1) добиваме $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$, односно $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Понатаму, функциите $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ се парни, па затоа ова неравенство важи и за $x < 0$ радијани. Според тоа, за секој $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ важи неравенството $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Значи, кога $x \to 0$ количникот $\frac{\sin x}{x}$ се наоѓа меѓу 1 и $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, па затоа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

10. Пресметај ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

Решение. а) Имаме:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

б) Имаме:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} (\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5}) = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}.$$

в) Имаме

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2^2 (\frac{x}{2})^2} = \frac{2}{2^2} \lim_{x\to 0} (\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{2}.$$

11. Докажи дека

$$\lim_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e.$$

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e \text{ и } \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n+1})^n = e$$

и дефиницијата на граница на низа следува дека за даденото $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0, таков што за секој $n \geq n_0$ важи:

$$e - \varepsilon < (1+\frac{1}{n})^n < e + \varepsilon \text{ и } e - \varepsilon < (1+\frac{1}{n+1})^n < e + \varepsilon.$$

Ставаме $C = n_0$ и нека $x > C$. Тогаш, постои природен број k таков што $k \leq x < k+1$, што значи $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, па затоа $1+\frac{1}{k+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{k}$. Според тоа, од последните неравенства и од неравенствата $k \leq x < k+1$ добиваме

$$(1+\frac{1}{k+1})^k < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{k})^{k+1},$$

т.е.

$$e - \varepsilon < (1+\frac{1}{k+1})^k < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{k})^{k+1} < e + \varepsilon,$$

од што следува $|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.

Забелешка. Користејќи го претходно докажаното може да се докаже дека

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\tfrac{1}{x})^x = e \text{ и } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,.$$

12. Пресметај ги границите:

а) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x$, б) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-3})^x$, в) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$

Решение. а) Имаме:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\tfrac{k}{x})^x = \lim_{x\to\infty}[(1+\tfrac{1}{x/k})^{x/k}]^k = e^k\,.$$

б) Имаме:

$$\lim_{x\to\infty}(\tfrac{x+2}{x-3})^x = \lim_{x\to\infty}(\tfrac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{-3}{x}})^x = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{2}{x})^x}{(1+\frac{-3}{x})^x} = \frac{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x}{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-3}{x})^x} = \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5\,.$$

в) Имаме:

$$\lim_{x\to\infty}(\tfrac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2} = \lim_{x\to\infty}(\tfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{-2}{x^2}})^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x^2})^{x^2}}{(1+\frac{-2}{x^2})^{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})^{x^2}}{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-2}{x^2})^{x^2}} = \frac{e}{e^{-2}} = e^3\,.$$

13. Нека $a>0$, $a\neq 1$. Пресметај ја границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}\,,$$

Решение. Имаме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e\,.$$

14. Нека $a>0$. Пресметај ја границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\,.$$

Решение. Ставаме $z=a^x-1$ и добиваме $a^x=z+1$, т.е. $x=\log_a(1+z)$. Понатаму, кога $x\to 0$, добиваме $z\to 0$, па затоа од задача 13 следува

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a\,.$$

15. На провидна плоча се наоѓа непровидна топка со радиус R. Над топката, на замислена права којашто минува низ центарот на топката и стои нормално на плочата, се наоѓа светлосен извор во облик на точка, оддалечн од плочата за a ($a>2$) топкини радиуси.

а) Пресметај ја плоштината на осветлената површина од топката и плоштината на сенката на топката врз плочата.

б) Што се случува со тие плоштини кога a неограничено расте.

Решение. а) Од сличноста на триаголниците $\triangle CEO$ и $\triangle SCO$ (види цртеж), добиваме

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OS}}\,,\ \frac{R-\overline{EF}}{R} = \frac{R}{(a-1)R}\,,$$

т.е.

$$\overline{EF} = R\frac{a-2}{a-1}.$$

Според тоа, плоштината на осветлениот дел на топката е

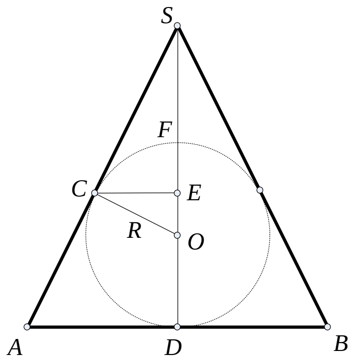
$$P_1 = 2\pi R^2 \frac{a-2}{a-1} = 2\pi R^2 (1-\frac{1}{a-1}).$$

Од сличноста на триаголниците $\triangle ADS$ и $\triangle SCO$, добиваме:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CS}}$$

$$\frac{\overline{AD}}{aR} = \frac{R}{\sqrt{(a-1)^2 R^2 - R^2}}$$

$$\overline{AD} = \frac{aR}{\sqrt{a^2-2a}},$$



па плоштината на сенката од топката врз плочата е $P_2 = \frac{\pi a R^2}{a-2} = \pi R^2 (1+\frac{2}{a-2})$.

б) Ако $a \to \infty$, тогаш $P_1 \to 2\pi R^2$ и $P_2 \to R^2\pi$.

3. НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ

1. Докажи дека функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекината во секоја точка $x_0 \neq 0$.

Решение. Навистина, од

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}$$

при $x_0 \neq 0$ добиваме

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}(x_0+\Delta x)x_0} = -\frac{0}{x_0^2} = 0$$

што значи дека функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекината во точката $x_0 \neq 0$.

2. Докажи дека секој полином од $n-$ *ти степен*

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R} \text{ и } a_n \neq 0,$$

е непрекинат за секој $x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение. Навистина, од $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ следува дека полиномите $p(x) = c$ и $q(x) = x$ се непрекината за секој $x_0 \in \mathbb{R}$. Сега тврдењето следува од фајтото дека производ и збир на непрекинати функции е непрекината функција и принципот на математичка индукција.

3. Докажи дека секоја рационална $\frac{P(x)}{Q(x)}$, каде P и Q се полиноми е непрекината во секоја точка $x_0 \in \mathbb{R}$ во која $Q(x_0) \neq 0$.

Решение. Навистина, од непрекинатоста на полиномите во секоја точка $x_0 \in \mathbb{R}$ и фактот дека количник на непрекинати функции во точките во кои именителот е различен од нула е непрекината функција следува дека секоја рационална функција е непрекината во секоја точка $x_0 \in \mathbb{R}$ во која $Q(x_0) \neq 0$.

4. Докажи дека тригонометриските функции се непрекинати во секоја точка во која се определени.

Решение. Во задача 1.8 докажавме дека $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$, што значи дека функцијата $y = \cos x$ е непрекината во секоја точка $a \in \mathbb{R}$.

Понатаму, ако искористиме дека

$$\sin x = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)$$

и фактот дека функциите

$$f(x) = \tfrac{\pi}{2} - x \text{ и } g(x) = \cos x,$$

се непрекинати, тогаш

$$\lim_{x \to a} \sin x = \lim_{x \to a} \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos[\lim_{x \to a}(\tfrac{\pi}{2} - x)] = \cos(\tfrac{\pi}{2} - a) = \sin a,$$

што значи функцијата $y = \sin x$ е непрекината во секоја точка $a \in \mathbb{R}$.

Понатаму, бидејќи $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ добиваме

$$\lim_{x \to a} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \sin x}{\lim\limits_{x \to a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a\ ,$$

за $\cos a \neq 0$, а од $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ добиваме

$$\lim_{x \to a} \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to a} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \cos x}{\lim\limits_{x \to a} \sin x} = \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{ctg} a$$

за $\sin a \neq 0$, што значи дека функциите $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ се непрекинати во секоја точка во која се определени.

5. Определи ги најмалата и најголемата вредност на функцијата $f(x) = x^2$ на интервалот $[-2,3]$.

Решение. Функцијата $f(x) = x^2$ е непрекината на интервалот $[-2,3]$. Таа е ограничена на овој интервал и $|x^2| \leq 9$, за секој $x \in [-2,3]$ и постојат точки $x_* = 0$ и $x^* = 3$ такви што

$$0 = f(0) = \min_{x \in [-2,3]} f(x) \text{ и } 9 = f(3) = \max_{x \in [-2,3]} f(x).$$

6. За функцијата $f:[0,1] \to [0,1]$ определена е низа од функции $f^1(x) = f(x)$ и $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, за $x \in [0,1]$ и $n = 1,2,3,...$. За некое $n \in \mathbb{N}$ и за $x, y \in [0,1]$ е исполнето $|f^n(x) - f^n(y)| < |x - y|$. Докажи дека постои единствен $x_0 \in [0,1]$ таков што $f(x_0) = x_0$.

Решение. Дадениот услов означува дека за фиксниот природен број $n \in \mathbb{N}$ функцијата f^n е непрекината функција. Разликата $g(x) = f^n(x) - x$ е функција која како разлика од непрекинати функции е непрекината функција. Таа ги задоволува условите

$$g(0) = f^n(0) - 0 = f^n(0) \geq 0,\ g(1) = f^n(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0.$$

Заради непрекинатоста на g постои $x_0 \in [0,1]$ таков што $g(x_0) = 0$, односно $f^n(x_0) = x_0$. Значи, функцијата $f^n : [0,1] \to [0,1]$ има фиксна точка. Ќе покажеме дека таа е фиксна точка и за f и уште повеќе дека е единствена фиксна точка.

Нека претпоставиме дека $f(x_0) = x_1$ и $x_1 \neq x_0$. Јасно е дека

$$f^n(x_1) = f^n(f(x_\circ)) = f(f^n(x_\circ)) = f(x_\circ) = x_1,$$

односно и x_1 е фиксна точка за f^n. Од друга страна

$$| x_0 - x_1 |=| f^n(x_0) - f^n(x_1) |<| x_0 - x_1 |,$$

што претставува контрадикција. Значи, $x_0 = x_1$.

Ако претпоставиме дека постои и друга фиксна точка, различна од x_0, тогаш таа е фиксна точка и за f^n. Но тогаш како и во првиот дел на задачата ќе добиеме контрадикција. Со друг зборови, f има единствена фиксна точка.

7. Даден е $\triangle ABC$. Докажи дека неравенството

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \leq \sin^2 \tfrac{\gamma}{2}$$

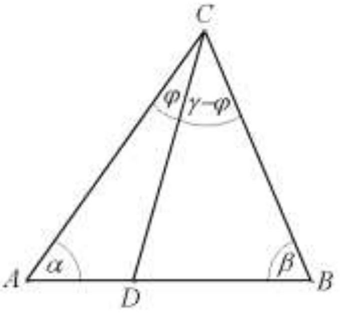
е исполнето ако и само ако на страната AB постои точка D таква што должината на отсечката CD е геометриска средина на должините на отсечките AD и BD.

Решение. Нека D е точка на страната AB на $\triangle ABC$. Со примена на синусната теорема за триаголниците ADC и DBC добиваме

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\phi} = \frac{\overline{CD}}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{\overline{BD}}{\sin(\gamma-\phi)} = \frac{\overline{CD}}{\sin\beta}$$

каде што $\phi = \measuredangle DCA$. Според тоа

$$\overline{AD} \cdot \overline{BD} = \overline{CD}^2 \frac{\sin\phi \cdot \sin(\gamma-\phi)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$



Значи, точка D која ги задоволува условите на задачата постои ако и само ако постои агол ϕ $(0 < \phi < \gamma)$, таков што

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin\phi \cdot \sin(\gamma - \phi).$$

Да претпоставиме дека таква точка постои. Тогаш е исполнето

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin\phi \cdot \sin(\gamma - \phi) \leq [\tfrac{1}{2}(\sin\phi + \sin(\gamma - \phi))]^2$$

$$= (\sin\tfrac{\gamma}{2} \cos\tfrac{\gamma - 2\phi}{2})^2 \leq \sin^2 \tfrac{\gamma}{2}.$$

Од друга страна, ако $\sin\alpha \cdot \sin\beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$, тогаш ја разгледуваме функција

$$f(x) = \sin x \cdot \sin(\gamma - x).$$

Таа е непрекината на интервалот $[0,\frac{\gamma}{2}]$ и важи $f(0)=0$ и $f(\frac{\gamma}{2})=\sin^2\frac{\gamma}{2}$. Бидејќи, $f(0)<\sin\alpha\cdot\sin\beta\le f(\frac{\gamma}{2})$, тогаш мора да постои $\phi\in(0,\frac{\pi}{2})$, така што

$$f(\phi)=\sin\phi\cdot\sin(\gamma-\phi)=\sin\alpha\cdot\sin\beta .$$

8. Определи го множеството точки во рамнината за кои изразот $\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ достигнува најголема вредност.

Решение. Изразот $\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ можеме да го запишеме во облик

$$\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Постои $\alpha\in\mathbb{R}$ така што $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\alpha$ и $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\alpha$. Сега, треба да го определиме максимумот на $\cos\alpha-\sin\alpha$. При тоа

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=2\cos\frac{\pi}{4}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4}) .$$

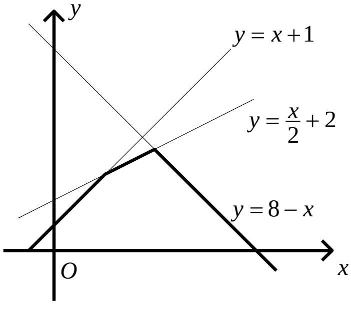
Најголема вредност за изразот се добива кога $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$. Според тоа, најголема вредност се добива за $\alpha=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Тогаш добиваме

$$\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x,\\ x>0,\\ y<0.\end{cases} .$$

Значи, множеството точки за кои се достигнува најголемата вредност на изразот се точките од правата $y=-x$ која лежи во четвртиот квадрант, со исклучок на точката $(0,0)$.

9. За секој реален број x со $m(x)$ ќе го означиме најмалиот од броевите $x+1$, $\frac{x}{2}+2$ и $8-x$. Која е најголемата вредност на $m(x)$?

Решение. Ќе ги разгледаме правите $y=x+1$, $y=\frac{x}{2}+2$ и $y=8-x$. Ќе ги определиме нивните пресечни точки.



а) За правите $y=\frac{x}{2}+2$ и $y=x+1$ имаме $\frac{x}{2}+2=x+1$, т.е. $x=2$. Значи, пресечна точка е (2,2,). За $x\in(-\infty,2)$ имаме $\frac{x}{2}+2>x+1$, а за $x\in(2,\infty)$ имаме $\frac{x}{2}+2<x+1$.

б) За правите $y=\frac{x}{2}+2$ и $y=8-x$ имаме $\frac{x}{2}+2=8-x$, т.е. $x=4$. Значи, пресечна точка е (4,4). За $x\in(-\infty,4)$ имаме $\frac{x}{2}+2<8-x$, а за

$x\in(4,\infty)$ имаме $\frac{x}{2}+2>8-x$.

в) За правите $y=x+1$ и $y=8-x$ имаме $8-x=x+1$, т.е. $x=\frac{7}{2}$. Значи, пресечна точка е $(\frac{7}{2},\frac{9}{2})$. За $x\in(-\infty,\frac{7}{2})$ имаме $x+1<8-x$, а за $x\in(\frac{7}{2},\infty)$ имаме $x+1>8-x$.

Сега,

- за $x\in(-\infty,2)$ е исполнето $x+1<\frac{x}{2}+2<8-x$ и $m(x)=x+1$. На ова множество

$$\max m(x)=3\ . \tag{1}$$

- за $x\in(2,\frac{7}{2})$ имаме $\frac{x}{2}+2<x+1<8-x$ и $m(x)=\frac{x}{2}+2$. На ова множество

$$\max m(x)=3,75\,. \tag{2}$$

- за $x\in(\frac{7}{2},4)$ имаме $\frac{x}{2}+2<8-x<x+1$ и $m(x)=\frac{x}{2}+2$. На ова множество

$$\max m(x)=4\,. \tag{3}$$

- за $x\in(4,\infty)$ имаме $8-x<\frac{x}{2}+2<x+1$ и $m(x)=8-x$. На ова множество

$$\max m(x)=4\,. \tag{4}$$

Според тоа, $\max m(x)=4$.

10. Нека $y=f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

а) најди $V(f)$,

б) најди $\max f(x)$ и $\min f(x)$.

Решение. а) Имаме:

$V(f)=\{y\,|$ равенката $y=\frac{x}{1+x^2}$ има реално решение по $x\}$,

$=\{y\,|$ равенката $yx^2-x+y=0$ има реално решение по $x\}$,

$=\{y|1-4y^2\geq 0\}=\{y\,|-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\}$.

б) $\max f(x)=\frac{1}{2}$; $\min f(x)=-\frac{1}{2}$.

11. Најди ја најмалата вредност на функцијата $y=\frac{1+x^2}{1+x}$, за $x\geq 0$.

Решение. Имаме:

$V(f)=\{y\,|$ равенката $y=\frac{1+x^2}{1+x}$ има ненегативно решение по x, за $x\geq 0\}$

$=\{y\,|$ равенката $y+xy=1+x^2$ има ненегативно решение по x, за $x\geq 0\}$

$=\{y\,|\,y^2-4(1-y)\geq 0$, за $x\geq 0\}=\{y\,|\,y\geq -2+2\sqrt{2}\wedge y\leq -2-2\sqrt{2}$, за $x\geq 0\}$.

Бидејќи $x\geq 0$ добиваме $y>0$. Затоа најмалата вредност за y е

$$\min y=-2+2\sqrt{2}\,.$$

12. Одреди ја минималната вредност на функцијата $y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Лесно се докажува дека функциите

$$f(x)=x^2+x+1 \text{ и } g(x)=x^2-x+1$$

се позитивни за било која вредност на x (немаат реални нули). Затоа функцијата $y=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ е позитивна за било која вредност на x. Според тоа, y е минимално за онаа вредност на x, за која y^2 е минимално. Бидејќи

$$y^2=x^2+x+1+2\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}+x^2-x+1=2(x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}),$$

y^2 е минимален кога $x=0$.

Според тоа, минималната вредност на y е $y(0)=2$.

13. Најди ја најмалата и најголемата вредност на функцијата $y=3x+4\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Имаме

$$D(f)=\{x|1-x^2\geq 0\}=\{x|-1\leq x\leq 1\}$$

$V(f)=\{y\,|$ равенката $y=3x+4\sqrt{1-x^2}$ има решение по x на $[-1,1]\}$

$=\{y|$ равенката $25x^2-6xy+y^2-16=0$ има решение по x на $[-1,1]$,

каде $y\geq 3x\}$

$=\{y|y\geq 3x\wedge -5\leq y\leq 5\wedge -1\leq x\leq 1\}=\{y|-3\leq y\leq 5\}$.

Оттука $\min y=-3$ и $\max y=5$.

14. Нека $f(x)=x+\frac{1}{x}$ и $x>0$. Најди $\min f(x)$.

Решение. Имаме:

$$V(f)=\{y\,|\,y=x+\tfrac{1}{x}\wedge x>0\}=\{y\,|\,x^2-yx+1=0\wedge x>0\}=\{y\,|\,y\geq 2\}.$$

Според тоа, за $x>0$, $\min(x+\frac{1}{x})=2$.

4. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО ЦЕЛИ БРОЕВИ

1. Најди ги сите функции $f:\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ за кои

$$f(n+m)+f(n-m)=f(3n), \quad \forall n,m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}, n\geq m.$$

Решение. Ако во равенството ставиме $m=0$, добиваме $2f(n)=f(3n)$, за секој $n\in\mathbb{Z}^+$. За $n=m=0$ добиваме $f(0)=0$. Понатаму, ако ставиме $m=n$, добиваме $f(2n)+f(0)=f(3n)$ односно $f(2n)=f(3n)$. Значи, од една страна, за секое $m \in \mathbb{Z}^+$ важи $f(4m) = f(6m) = f(9m)$, а од друга страна, ако ставиме $n = 3m$ во равенството, добиваме $f(4m) + f(2m) = f(9m)$, што е возможно ако и само ако $f(2m) = 0$. Следствено, за произволен $n \in \mathbb{Z}^+$ имаме

$$f(n) = \tfrac{1}{2} f(3n) = \tfrac{1}{2} f(2n) = 0,$$

односно единствена функција што го задоволува равенството е $f(n) = 0$, за секој $n \in \mathbb{Z}^+$.

2. Да се најдат сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што

$$(f(m))^2 + f(n) \mid (m^2 + n)^2.$$

Решение. За $m = n = 1$ добиваме

$$(f(1))^2 + f(1) \mid (1^2 + 1)^{\ 2} = 4, \text{ т.е. } f(1)(f(1) + 1) \mid 4.$$

Значи, $f(1) \mid 4$, при што ги имаме следните можности:

а) $f(1) = 4$, што не е можно бидејќи $5 \nmid 4$,

б) $f(1) = 2$, што не е можно бидејќи $3 \nmid 4$.

Единствена можност е $f(1) = 1$.

Ќе избереме $m = 1$ и $n = p - 1$, каде p е прост број. Тогаш

$$(f(1))^2 + f(p-1) \mid (1^2 + p - 1)^{\ 2} = p^2, \text{ т.е. } f(p-1) + 1 \mid p^2.$$

Бидејќи $f(p-1) + 1 \geq 2$, имаме две можности и тоа

i) $f(p-1) + 1 = p$, т.е. $f(p-1) = p - 1$,

ii) $f(p-1) + 1 = p^2$, т.е. $f(p-1) = p^2 - 1$. Овој случај не е можен. Ако претпоставиме дека $f(p-1) = p^2 - 1$, тогаш за $m = p - 1$ и $n = 1$ би добиле

$$(f(p-1))^2 + f(1) = (p^2 - 1)^2 + 1 = p^4 - 2p^2 + 2 = a_p, \qquad (1)$$

е делител на

$$[(p-1)^2 + 1]^2 = p^4 - 4p^3 + 8p^2 - 8p + 4 = b_p, \qquad (2)$$

за секој прост број p. Од друга страна

$$b_p - a_p = (p^4 - 4p^3 + 8p^2 - 8p + 4) - (p^4 - 2p^2 + 2) = 2p^2(5 - 2p) + 4(1 - 2p),$$

што не е можно, бидејќи $a_p \mid b_p$ и бројот на десната страна во последното равенство е негативен за $p > 2$.

Нека n е фиксен природен број и p произволен прост број. Тогаш

$$(p-1)^2 + f(n) \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)},$$

$$n + (p-1)^2 + f(n) - n \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)},$$

$$[n + (p-1)^2 - (n - f(n))][n + (p-1)^2 + (n - f(n))] \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)},$$

$$[n + (p-1)^2]^2 - [(n - f(n))]^2 \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)},$$

$$[n + (p-1)^2]^2 \equiv [(n - f(n))]^2 \pmod{(p-1)^2 + f(n)}.$$

Но од условот на задачата имаме $[n+(p-1)^2]^2 \equiv 0(\text{mod } (p-1)^2 + f(n))$, па според тоа

$$[(n-f(n))]^2 \equiv 0 \ (\text{mod } (p-1)^2 + f(n)) \qquad (3)$$

Од (3) имаме дека $(p-1)^2 + f(n) \mid [(n-f(n))]^2$, што е можно ако и само ако

$$[(n-f(n))]^2 = 0 \text{, т.е. } f(n) = n \text{ .}$$

3**.** Определи ги сите функции f определени на множеството цели броеви, такви што за било кои цели броеви m и n е исполнето равенството

$$f(n|m|) + f(n(|m|+2)) = 2f(n(|m|+1)) \text{ .}$$

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $n=1$**.** Равенката го добива обликот

$$f(|m|) + f(|m|+2) = f(|m|+1) \text{ .}$$

Ако воведеме ознака $l=|m|\geq 0$, равенката го добива обликот

$$f(l+2) - f(l+1) = f(l+1) - f(l) \text{, за } l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ .}$$

Значи, на множеството природни броеви, таа е аритметичка прогресија. Со други зборови, постојат $a,b \in \mathbb{Z}$, такви што $f(l) = al + b$.

Случај 2. $n=-1$**.** Во овој случај равенката го добива обликот

$$f(-|m|) + f(-(|m|+2)) = f(-(|m|+1)) \text{ .}$$

Ако воведеме ознака $k = -|m|-2$, тогаш равенката го добива обликот

$$f(k) + f(k+2) = 2f(k+1) \text{ ,}$$

за $k \in \mathbb{Z}^-$. Според тоа,

$$f(k+2) - f(k+1) = f(k+1) - f(k) \text{ ,}$$

односно f на $\mathbb{Z}^-$ е исто така аритметичка прогресија. Значи, постојат $c,d \in \mathbb{Z}$ такви што $f(k) = ck + d$.

Сега, за $|m|=0$ имаме

$$\begin{matrix} f(0) = 2f(1) - f(2) \\ f(0) = 2f(-1) - f(-2) \end{matrix} .$$

Од равенството

$$2f(1) - f(2) = 2f(-1) - f(-2)$$

добиваме,

$$2(a+b) - (2a+b) = 2(-c+d) - (-2c+d) \text{ ,}$$

односно $b=d$. Значи,

$$f(n) = \begin{cases} an+b, \ n \in \mathbb{Z}^+ \\ cb+n, \ n \in \mathbb{Z}^- \end{cases} ,$$

каде $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

Може да се провери дека ваквите функции ја задоволуваат почетната равенка.

4. Определи ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такви што а) $f(-n)f(n) = f(n^2)$, за секое $n \in \mathbb{N}$

б) $f(n+m) = f(n) + f(m) + 2mn$, за секои $x, y \in \mathbb{N}$.

Решение. Ќе избереме $g(n) = f(n) - n^2$. Тогаш втората равенка се трансформира во

$$f(m+n) - (m+n)^2 = f(m) + f(n) + 2mn - (m+n)^2$$

$$f(m+n) - (m+n)^2 = f(m) - m^2 + f(n) - n^2 + 2mn - 2mn$$

$$g(m+n) = g(m) + g(n) .$$

Последната равенка е кошиева равенка, и нејзини решенија се сите функции од облик $g(x) = kx$, каде k е некоја константа.

Сега, со воведената смена, првата равенка го добива обликот

$$(g(n) + n^2)(g(-n) + (-n)^2) = g(n^2) + n^4$$

$$(kn + n^2)(n^2 - kn) = kn^2 + n^4$$

$$n^4 - k^2n^2 = kn^2 + n^4$$

$$(k + k^2)n^2 = 0$$

Бидејќи последното равенство е исполнето за секое $n \in \mathbb{N}$, добиваме $k^2 + k = 0$. Според тоа $k = 0$ или $k = -1$, од каде добиваме

$$f(n) - n^2 = 0n \text{, т.е. } f(n) = n^2$$

$$f(n) - n^2 = -1 \cdot n \text{, т.е. } f(n) = n^2 - n .$$

Не е тешко да се провери дека и двете добиени функции се решенија на почетната равенка.

5. Да се определат сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што

$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)} = \frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)} \text{, за секои } x, y \in \mathbb{N} .$$

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $x = y$. Ако $x = y$ и замениме во дадената равенка имаме

$$\frac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)} = \frac{2x+f(x)}{f(2x)+f(x)}$$

$$\left(\frac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)}\right)^2 = 1 .$$

Бидејќи $\frac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)} > 0$, од последното равенство добиваме $\frac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)} = 1$, а со помош на алгебарски трансформации

$$f(2x) = 2x .$$

Според тоа, за секој парен природен број $n = 2x$ имаме

$$f(n) = f(2x) = 2x = n .$$

Доволно е да се определи $f(2k+1),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Случај 2. $x \neq y$ **.** Ако $x \neq y$, тогаш $x - y \neq 0$. Притоа можни се следните три случаи

а) x и y се парни

б) x и y се непарни

в) едниот е парен а другиот е непарен.

Бидејќи треба да ја определиме f на множеството непарни броеви, ќе ги разгледуваме случаите б) и в) .

Ако x и y се непарни, тогаш $x+y$ е парен, од каде со замена во почетната равенка, добиваме

$$\frac{x+y+f(x)}{2x+f(y)}=\frac{2y+f(x)}{x+y+f(y)},$$

а по нејзиното средување, $(x-y)[x-y-f(x)+f(y)]=0$. Заради $x\neq y$, имаме

$$x-y-f(x)+f(y)=0\text{, т.е. } f(x)-x=f(y)-y.$$

Последното равенство е исполнето на множеството непарни броеви, па според тоа постои $k\in\mathbb{N}$, такво што

$$f(x)-x=f(y)-y=k,$$

т.е. $f(x)=x+k$. Доволно е да се определи константата k .

Ако x е парен а y непарен број, со замена во почетната равенка добиваме

$$\frac{x+y+k+x}{2x+y+k}=\frac{2y+x}{x+y+k+y+k},$$

т.е. $\frac{2y+x}{2y+x+2k}=1$, што е можно само за $2k=0$, т.е. за $k=0$.

Сега не е тешко да се провери дека $f(n)=n$, $n\in\mathbb{N}$ е решение на почетната равенка.

5. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. Ако $f(\frac{x+1}{x-1})+2f(\frac{x-1}{x+1})=x$, најдете ја $f(x)$.

Решение. Да ставиме $t=\frac{x+1}{x-1}$, тогаш $x=\frac{t+1}{t-1}$, па добиваме

$$f(t)+2f(\tfrac{1}{t})=\tfrac{t+1}{t-1}. \qquad (1)$$

Да ставиме $t=\frac{x-1}{x+1}$, тогаш $x=\frac{1+t}{1-t}$, па добиваме

$$2f(t)+f(\tfrac{1}{t})=\tfrac{1+t}{1-t} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) наоѓаме $f(t)=\frac{1+t}{1-t}$, следствено $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

2. Да се определат сите функции $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm\frac{1}{3}\}\to\mathbb{R}$ за кои

$$f(\tfrac{x+1}{1-3x})=x-f(x). \qquad (1)$$

Решение. Во равенката ќе замениме $\frac{x+1}{1-3x}=y$. Со решавање на оваа равенка по x, добиваме $x=\frac{y-1}{3y+1}$, при што почетната равенка го добива обликот

$$f(y)=\frac{y-1}{3y+1}-f(\frac{y-1}{3y+1})$$

$$f(x)=\frac{x-1}{3x+1}-f(\frac{x-1}{3x+1}) \qquad (2)$$

Ако во последната равенка повторно го замениме x со $\frac{x-1}{3x+1}$, добиваме

$$f(\frac{x-1}{3x+1})=\frac{x+1}{1-3x}-f(\frac{x+1}{1-3x}) \qquad (3)$$

т.е.

$$f(\frac{x-1}{3x+1})-f(\frac{x+1}{1-3x})=\frac{x+1}{1-3x}\,. \qquad (4)$$

Сега, ќе ги собереме равенките (1), (2) и (3) и го искористиме равенството (4), ја добиваме функцијата

$$f(x)=\frac{1}{2}\frac{9x^2+6x^2+x-2}{9x^2-1}\,.$$

Не е тешко да се провери дека последната функција ја задоволува почетната равенка.

3. Да се најдат сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такви што равенството

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=x^3+\sqrt[3]{y}$$

е исполнето за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако избереме $x=y$, ќе имаме

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^3+\sqrt[3]{x})\,.$$

Сега равенката го добива обликот

$$g(x)+\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}-x^3)=g(y)+\frac{1}{2}(\sqrt[3]{y}-y^3)\,.$$

Ако избереме $y=0$, тогаш

$$g(x)+\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}-x^3)=g(0)+\frac{1}{2}(\sqrt[3]{0}-0^3)=g(0)+0=g(0)\,,$$

односно

$$g(x)=g(0)+\frac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})\,.$$

Од произволноста на x, и од тоа што немаме дополнителни ограничувања, можеме да избереме $g(0)=a$. Тогаш

$$g(x)=a+\frac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})\,.$$

Сега не е тешко да се провери дека $f(x)=\frac{1}{2}(x^3+\sqrt[3]{x})$ и $g(x)=a+\frac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})$ се функции кои ја задоволуваат равенката, каде a е произволно избран.

4. Определи ги сите реални функции f кои се дефинирани за секој реален број x, такви што

$$f(x)+xf(1-x)=x^2-1\,.$$

Решение. Нека f е функција која ја задоволува равенката. Ако воведеме смена $1-x=t$, добиваме

$$f(1-t)+(1-t)f(t)=t^2-2t\,.$$

Последната равенка ќе ја помножиме со t и го формираме системот

$$\begin{cases} tf(1-t)+(t-t^2)f(t)=t^3-2t^2 \\ f(t)+tf(1-t)=t^2-1 \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, добиваме:

$$f(t)(t^2-t+1)=-t^3+3t^2-1,$$

од каде добиваме

$$f(t)=\frac{-t^3+3t^2-1}{t^2-t+1}.$$

Не е тешко да се провери и обратното, т.е. дека фунцкијата

$$f(x)=\frac{-x^3+3x^2-1}{x^2-x+1}$$

ја задоволува дадената равенка.

5. Определи ги сите строго растечки функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x+f(y))=f(x+y)+1.$$

Решение. Од равенката, добиваме

$$f(y+f(x))=f(x+y)+1.$$

Значи,

$$f(x+f(y))=f(y+f(x)).$$

Бидејќи f е строго растечка функција, добиваме

$$x+f(y)=y+f(x),$$

за секои x и y од множеството реални броеви. Ако во последната добиена равенка замениме $y=0$, добиваме $f(x)=x+f(0)$. Заменувајќи во почетната равенка, добиваме

$$x+f(y)+f(0)=x+y+f(0)+1, \text{ т.е. } f(y)=y+1.$$

Значи, ако f го исполнува условот на задачата, тогаш $f(x)=x+1$. Непосредно се проверува дека функцијата $f(x)=x+1$ ги исполнува условите на задачата.

6. Нека $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ се функции за кои што

$$f(g(x))=g(f(x))=-x \text{ за } x\in\mathbb{R}.$$

а) Докажи дека f и g се непарни функции

б) Најди пример на две такви функции.

Решение. а)Од равенството $f(g(x))=-x$, добиваме

$$g(f(g(x)))=g(-x). \qquad (1)$$

Од друга страна, од равенството $g(f(t))=-t$, за зададена вредност на x и $t=g(x)$, имаме

$$g(f(g(x)))=-g(x). \qquad (2)$$

Ако ги употребиме (1) и (2), добиваме $g(-x)=-g(x)$, т.е. g е непарна функција.

На потполно аналоген начин, ако f и g си ги заменат местата во претходниот чекор, се докажува дека f е непарна функција. Навистина, од равенството

$g(f(x))=-x$, добиваме $f(g(f(x)))=f(-x)$. Од друга страна, ако во $f(g(t))=-t$, и за x избереме $t=f(x)$, имаме

$$f(g(f(x)))=-f(x).$$

Како и претходно,

$$f(-x)=f(g(f(x)))=-f(x),$$

т.е. f е непарна функција.

б) Доволно е да избереме $f(x)=x$ и $g(x)=-x$.

7. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, такви што за било кои x и y е исполнето равенството

$$f(x+y)=f(x^2+y^2).$$

Решение. Реалните броеви $x,y>0$ можеме да ги запишеме во облик

$$x=2\tfrac{x}{2}=\tfrac{x}{2}-\tfrac{y}{2}+\tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{2}$$

$$y=2\tfrac{y}{2}=\tfrac{y}{2}-\tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{2}+\tfrac{x}{2},$$

па според тоа,

$$f(x)=f(\tfrac{x-y}{2}+\tfrac{x+y}{2})=f((\tfrac{x-y}{2})^2+(\tfrac{x+y}{2})^2)$$

$$=f((\tfrac{y-x}{2})^2+(\tfrac{y+x}{2})^2)=f(\tfrac{y-x}{2}+\tfrac{y+x}{2})=f(y)$$

Од произволноста на x и y добиваме дека $f(x)=f(y)=c$. Доволно е да се провери дека $f(x)=c$ е решение на равенката.

8. Да се определат сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што $y=cf(x)$ е симетрична во однос на правата $y=x$ за секој позитивен реален број $c>0$.

Решение. Една функција е симетрична во однос на правата $y=x$ ако и само ако $g(g(x))=x$.

Навистина, ако $y=g(x)$ е симетрична во однос на $y=x$, тогаш $(x,g(x))$ и $(g(x),x)$ се точки од нејзиниот график. Со други зборови важи

$$g(g(x))=x.$$

Обратно, ако $g(g(x))=x$, тогаш $(g(x),x)$ и $(x,g(x))$ се точки од нејзиниот график. Сега, од произволноста на x не е тешко да се види дека $y=g(x)$ е симетрична во однос на $y=x$ (направи цртеж).

Тоа применето во нашиот случај значи дека за $g(x)=cf(x)$, $c>0,x>0$ е исполнето

$$g(g(x))=x$$

$$g(cf(x))=x$$

$$cf(cf(x))=x. \qquad (1)$$

Од произволноста на $c>0$ и $x>0$, за $c=\frac{1}{f(x)}$ ($f(x)>0$) имаме

$$\frac{1}{f(x)}f(1)=x,\quad \text{т.е.}\quad f(x)=\frac{f(1)}{x}.$$

Не е тешко да се провери дека $y=c\frac{f(1)}{x}$ за $c>0$ е симетрична во однос на $y=x$. Навистина

$$g(c\frac{f(1)}{x})=c\frac{f(1)}{\frac{cf(1)}{x}}=x,$$

каде $g(x)=\frac{cf(1)}{x}$.

При овие разгледувања доволно е само $f(1)$ да е позитивен број. Без ограничувања на општоста можеме да избереме $f(1)=a$.

Значи, сите барани функции се $f(x)=\frac{a}{x}, a>0$. .

9. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}^+$

$$(x+y)f(f(x)y)=x^2f(f(x)+f(y)).$$

Решение. За $y=1\in\mathbb{R}^+$ равенката го добива обликот

$$(x+1)f(f(x))=x^2f(f(x)+f(1)),$$

односно

$$\frac{x+1}{x^2}=\frac{f(f(x)+f(1))}{f(f(x))},$$

при што $x, f(f(x))\in R^+$.

Нека претпоставиме дека постојат $a,b\in\mathbb{R}^+$ се такви што $f(a)=f(b)$. Тогаш

$$f(f(a))=f(f(b)) \text{ и } f(a)+f(1)=f(b)+f(1),$$

од каде што добиваме

$$\frac{a+1}{a^2}=\frac{f(f(a)+f(1))}{f(f(a))}=\frac{f(f(b)+f(1))}{f(f(b))}=\frac{b+1}{b^2}$$

$$(a+1)b\ =(b+1)a^2$$

$$(a-b)(ab+b+a)=0.$$

Бидејќи $a,b\in\mathbb{R}^+$ имаме $ab+a+b>0$, и затоа $a-b=0$, т.е. $a=b$.

Значи, f е инјективно пресликување.

Ако избереме $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, тогаш $\frac{x+1}{x^2}=1$ и $\frac{f(f(x)+f(1))}{f(f(x))}=1$, т.е.

$$f(f(x)+f(1))=f(f(x)).$$

Од инјективноста на f, $f(x)+f(1)=f(x)$, т.е. $f(1)=0$. Но $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ и затоа $f(1)>0$, што е спротивно на добиеното.

Значи, таква функција не постои.

10. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(xf(x)+f(y))=x^2+y,$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Ако избереме $x = 0$, добиваме $f(f(y)) = y$, за секое $y \in \mathbb{R}$. Сега, ако наместо x замениме $f(x)$ и го искористиме претходното равенство, добиваме

$$f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y. \qquad (*)$$

Од (*) и почетната равенка следува

$$(f(x))^2 = x^2$$

$$|f(x)| = |x|,$$

за секое $x \in \mathbb{R}$.

Нека претпоставиме дека постојат $s, t \in \mathbb{R}$ такви што $f(t) = -t$ и $f(s) = s$. Но тогаш

$$f(-t^2 + s) = f(-t \cdot t + s) = f(f(t)t + f(s)) = t^2 + s,$$

а од $|f(x)| = |x|$, имаме $|f(-t^2 + s)| = |-t^2 + s|$. Значи,

$$|-t^2 + s| = |f(-t^2 + s)| = |t^2 + s|$$

$$|t^2 - s| = |t^2 + s|$$

Заради последното равенство лесно се добива $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ или $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

Не е тешко да се провери дека зададените функции ја задоволуваат дадената равенка.

11. Да се определат сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \leq 3f(x+2y+3z),$$

за секои $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Решение. Ако избереме $x = y = -z$, тогаш

$$x + y = 2x,\ y + z = 0,\ z + x = 0 \text{ и } x + 2y + 3z = x + 2x - 3x = 0,$$

при што добиваме

$$f(2x) + f(0) + f(0) \leq 3f(0)$$

$$f(2x) \leq f(0). \qquad (1)$$

Ако пак избереме $x = z = -y$, тогаш

$$x + y = 0,\ z + y = 0,\ x + z = 2x \text{ и } x + 2y + 3z = 4x - 2x = 2x,$$

при што добиваме

$$f(0) + f(2x) + f(0) \leq 3f(2x)$$

$$f(2x) \leq f(0) \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $f(2x) = f(0)$. Ако избереме $f(0) = C$, тогаш со директна проверка се добива дека $f(2x) = C$ е решение на почетната неравенка.

12. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x+y) + xy = f(x)f(y) \qquad (1)$$

за било кои реални броеви x и y.

Решение. Ако избереме $x=y=0$, добиваме $f(0)=(f(0))^2$. Според тоа, $f(0)=0$ или $f(0)=1$.

Случај 1. $f(0)=0$. Тогаш за $x\in\mathbb{R}$ и $y=0$, со замена во (1), добиваме

$$f(x+0)+0\cdot x=f(x)f(0)$$
$$f(x)=0.$$

Според тоа, $f(x)\equiv 0,\ x\in\mathbb{R},$ што не е можно. Навистина, ако замениме во (1), добиваме

$$xy=0\text{, за }x,y\in\mathbb{R}.$$

Случај 2. $f(0)=1$. Во овој случај, ако избереме $x=1$ и $y=-1$, добиваме

$$1+1\cdot(-1)=f(1)\cdot f(-1)$$
$$f(1)f(-1)=0.$$

Според тоа, имаме две можности $f(1)=0$ или $f(-1)=0$.

а) Ако $f(1)=0$, тогаш за $y=1$, добиваме

$$f(x+1)+x=f(x)f(1)$$
$$f(x+1)+x=0$$

Од последната равенка имаме $f(x+1)=-x$, односно $f(x)=1-x$, $x\in\mathbb{R}$.

б) Ако $f(-1)=0$, тогаш ако избереме $y=-1$ и замениме во (1) добиваме

$$f(x-1)-x=0$$
$$f(x-1)=x.$$

Од последната равенка лесно се добива $f(x)=x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Не е тешко да се провери дека $f(x)=1-x$ и $f(x)=1+x$, $x\in\mathbb{R}$ се решенија на почетната равенка.

13. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x^3+y^3)=xf(x^2)+yf(y^2)\text{, за секои }x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Ако во равенката замениме $y=0$, добиваме $f(x^3)=xf(x^2)$. Од

$$f(x^3)=xf(x^2)\text{ и }f(y^3)=yf(y^2)$$

равенката го добива обликот

$$f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3).$$

Бидејќи пресликувањето $x\to x^3$ е биекција во множеството реални броеви, функцијата f е решение на функционалната равенка

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Навистина за произволни $x,y\in\mathbb{R}$ постојат единстевени $s,t\in\mathbb{R}$ такви што $x=t^3$ и $y=s^3$, при што

$$f(x+y)=f(s^3+t^3)=f(s^3)+f(t^3)=f(x)+f(y).$$

Ако f е решение на равенката, не е тешко да се провери дека за било кое $c \in \mathbb{R}$, cf е исто така решение на равенката. За f има две можности и тоа $f(1) = c \neq 0$ или $f(1) = 0$. Ако $f(1) = c \neq 0$ тогаш ќе ја разгледаме функцијата $\frac{1}{c} f$ за која $(\frac{1}{c} f)(1) = \frac{1}{c} f(1) = \frac{1}{c} c = 1$. Значи, доволно е да се разгледаат два случаи $f(1) = 1$ и $f(1) = 0$.

Сега не е тешко да се види дека во првиот случај $f(x) \equiv x$ а во вториот случај $f(x) \equiv 0$.

14. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x + xy + f(y)) = (f(x) + \tfrac{1}{2})(f(y) + \tfrac{1}{2}),$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Во равенката ќе замениме $y = -1$, при што добиваме

$$f(f(-1)) = (f(x) + \tfrac{1}{2})(f(-1) + \tfrac{1}{2}).$$

Ако $f(-1) + \frac{1}{2} \neq 0$, добиваме дека за секое $x \in \mathbb{R}$ е исполнето

$$f(x) + \tfrac{1}{2} = \frac{f(f(-1))}{f(-1) + \frac{1}{2}} = c \in \mathbb{R}.$$

Во тој случај, за произволни $x, y \in \mathbb{R}$ е исполнето

$$f(x) = c - \tfrac{1}{2}, \qquad f(y) = c - \tfrac{1}{2}, \qquad f(x + xy + f(y)) = c - \tfrac{1}{2},$$

и ако замениме во почетната равенка, добиваме

$$c - \tfrac{1}{2} = c^2,$$

т.е. $2c^2 - c + 1 = 0$. Решенија на ова равенка се $c_{1/2} = \frac{2 \pm 2i}{4}$.

Заради добиената контрадикција, добиваме $f(-1) + \frac{1}{2} = 0$, односно $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Од претходно добиеното, за $x = 0$ и $y = -1$, со замена во почетната равенка, добиваме

$$f(f(-1)) = (f(0) + \tfrac{1}{2})(f(-1) + \tfrac{1}{2}) = (f(0) + \tfrac{1}{2}) \cdot 0 = 0$$

односно

$$f(-\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Ако претпоставиме дека постои $y_0 \neq -1$ такво што $f(y_0) = -\frac{1}{2}$, тогаш со замена во равенката, добиваме

$$f(x + xy_0 - \tfrac{1}{2}) = (f(x) + \tfrac{1}{2})(f(y_0) + \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$f(x(1 + y_0) - \tfrac{1}{2}) = 0$$

Сега за $x = \frac{t + \frac{1}{2}}{1 + y_0}$, $t \in \mathbb{R}$ и замена во последната равенка, добиваме $f(t) = 0$. Значи, f е константа, и со замена во почетната равенка добиваме

$$0 = (0 + \tfrac{1}{2})(0 + \tfrac{1}{2}),$$

односно $\frac{1}{4}=0$. Заради добиената контрадикција, добиваме

$$f(y)=-\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y=-1. \qquad (*)$$

Сега, ако избереме $x=\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}$, за $y\neq -1$, заради добиеното равенство $f(-\tfrac{1}{2})=0$ имаме

$$0=f(-\tfrac{1}{2})=(f(y)+\tfrac{1}{2})(f(\tfrac{-\frac{1}{2}+f(y)}{y+1})+\tfrac{1}{2}).$$

Бидејќи $y\neq -1$ имаме $f(y)+\tfrac{1}{2}\neq 0$, па според тоа $f(\frac{-\frac{1}{2}+f(y)}{y+1})+\tfrac{1}{2}=0$, т.е.

$$f(\tfrac{-\frac{1}{2}+f(y)}{y+1})=-\frac{1}{2}.$$

Сега заради (*), $\frac{-\frac{1}{2}+f(y)}{y+1}=-1$, т.е. $f(y)=y+\tfrac{1}{2}$.

Не е тешко да се провери дека $f(y)=y+\tfrac{1}{2}$ е решение на равенката.

15. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y),$$

за било кои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако замениме $x=y=0$ во

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y) \qquad (0)$$

добиваме $(f(0))^2=0$, т.е. $f(0)=0$.

Ако во (0) замениме $y=-1$, тогаш равенката го добива обликот

$$xf(x)+f(x^2)f(-1)=0. \qquad (1)$$

Сега можни се два случаи.

Случај 1. $f(-1)=0$. Во овој случај (1) го добива обликот $xf(x)+f(x^2)\cdot 0=0$, т.е. $xf(x)=0$. Последното равенство е исполнето за секое $x\in\mathbb{R}$. Според тоа, $f(x)=0$. Лесно се проверува дека $f(x)=0$ е решение на почетната равенка.

Случај 2. $f(-1)\neq 0$. Ако во (1) замениме $x=-1$, тогаш $f(-1)[f(1)-1]=0$. Значи, $f(1)=1$. Ако во (1) замениме $x=1$, тогаш од $f(1)=1$ добиваме $f(-1)=-1$. Со вака определените вредности со замена во (1) добиваме $xf(x)-f(x^2)=0$, односно

$$xf(x)=f(x^2). \qquad (2)$$

Ако во (0) замениме $y=x-1$, добиваме

$$xf(x^2)=xf(x)+f(x^2)f(x-1). \qquad (3)$$

Сега, од (2) и (3) имаме $xf(x^2)=f(x^2)+f(x^2)f(x-1)$, односно

$$f(x^2)[f(x-1)-(x-1)]=0. \qquad (4)$$

Ќе покажеме дека $f(a)\neq 0$ за $a\neq 0$.

Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека постои $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ таков што $f(a) = 0$. Сега заради (2) имаме $f(a^2) = 0$. Со замена во (0) добиваме $af(a + ay) = 0,$ односно $f(a + ay) = 0.$ Од произволноста на $y \in \mathbb{R},$ за $y = -\frac{a+1}{a}$ добиваме $f(-1) = 0$ што не е можно, бидејќи добивме дека $f(-1) = -1.$

Сега, за $x \neq 0$ имаме $f(x^2) \neq 0$, па од (4) имаме

$$f(x-1) = x-1,$$

за секој $x \neq 0$, т.е. $f(x) = x$ за секој $x \in \mathbb{R}$ (заради условот $f(-1) = -1$).

Не е тешко да се провери дека $f(x) = x$ е решение на равенката.

16. Да се најдат сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$xf(y) - yf(x) = f(\tfrac{y}{x}). \qquad (1)$$

Решение. Ако во равенката замениме $x = 1$, тогаш $f(1) = 0$.

Ако пак замениме $y = 1$, заради $f(1) = 0$, добиваме

$$f(\tfrac{1}{x}) = -f(x). \qquad (2)$$

Ако пак сега во (1) замениме $y = \frac{1}{x}$, заради (2) добиваме

$$xf(\tfrac{1}{x}) - \tfrac{1}{x} f(x) = f(\tfrac{1}{x^2}) = -f(x^2)$$

$$-xf(x) - \tfrac{1}{x} f(x) = -f(x^2)$$

односно

$$f(x^2) = (x\tfrac{1}{x}) f(x). \qquad (3)$$

Во (1) ќе направиме замени на x со x^2 и на y со y^2, при што добиваме

$$x^2 f(y^2) - y^2 f(x^2) = f(\tfrac{y^2}{x^2}).$$

Со примена на (3) имаме

$$x^2(y + \tfrac{1}{y}) f(y) - y^2(x + \tfrac{1}{x}) f(x) = (\tfrac{y}{x} + \tfrac{x}{y}) f(\tfrac{y}{x}). \qquad (4)$$

Ако во (4) $f(\frac{y}{x})$ го замениме со $xf(y) - yf(x)$, ја добиваме равенката

$$y(x^2 - 1) f(y) - x(y^2 - 1) f(x) = 0,$$

кај која променливите може да се раздвојат на следниот начин

$$\frac{f(x)}{x - \frac{1}{x}} = \frac{f(y)}{y - \frac{1}{y}}.$$

Од произволноста на x и y добиваме $\frac{f(x)}{x-\frac{1}{x}} = c$, т.е. $f(x) = c(x - \frac{1}{x})$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ваквите функции ја задоволуваат почетната равенка, за произволен $c \in \mathbb{R}$.

17. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x - f(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x).$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Ќе ја разгледаме дадената равенка

$$f(x-f(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x) \qquad (*)$$

за $x = 0$, при што таа го добива обликот

$$f(-f(y)) = yf(0) + g(0) . \qquad (1)$$

Заради последниот облик, важни се два случаи.

Случај 1. $f(0) = 0$. Ако во (*) замениме $y = 0$, тогаш $f(x) = g(x)$. Од друга страна, од (1) имаме $f(-f(y)) = 0$. Пак ако во (*) на местото на y ставиме $-f(y)$, тогаш равенката заради последните равенства, го добива обликот

$$f(y)f(x) = 0 .$$

Од последното равенство имаме $f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Според тоа, $f(x) = g(x) = 0$, за $x \in \mathbb{R}$. Непосредно се проверува дека овие функции се решение на равенката.

Случај 2. $f(0) \neq 0$. Тогаш од (1) имаме дека f е биективно пресликување.

а) Ако $f(u) = f(v)$, тогаш $-f(u) = -f(v)$, односно $f(-f(u)) = f(-f(v))$. Заради (1) имаме $-uf(0) + g(0) = -vf(0) + g(0)$, односно $u = v$. Значи, f е инјекција.

б) Ако $z \in \mathbb{R}$, тогаш за $y = \dfrac{g(0) - z}{f(0)}$ имаме $f(-f(y)) = z$, т.е. f е сурјекција.

Бидејќи f е биекција, постои $c \in \mathbb{R}$ таков што $f(c) = 0$. За $y = c$ со замена во (*)

$$f(x) = -cf(x) + g(x)$$

$$(1+c)f(x) = g(x)$$

Сега е јасно дека $g(c) = 0$. Ако во (*) замениме $x = c$, тогаш

$$f(c - f(y)) = cf(y) .$$

Ако за $f(y)$ избереме $c - x$ (бидејќи f е сурјекција) се добива

$$f(x) = c(c - x)$$

$$g(x) = (1+c)(c^2 - cx)$$

Не е тешко да се провери дека $f(x) = c(c-x)$ и $g(x) = (1+c)(c^2 - cx)$ се решение на (*), без разлика на изборот на c.

Јасно за $c = 0$ се добива решението $f(x) = g(x) = 0$.

18. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција, таква што

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$. Определи ја $f(x)$.

Решение. Ако избереме $y = 0, x \in \mathbb{R}$, тогаш лесно добиваме дека $f(0) = 0$. Навистина

$$f(x) = f(x) + f(0) + 2x \cdot 0 = f(x) + f(0) \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = 0 .$$

Ако избереме $x = 1$ и $y = -1$, тогаш добиваме

$$f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = f(1) + f(-1) - 2 ,$$

односно $f(1) + f(-1) = 2$.

Понатаму, за $x \in \mathbb{R}$ и $y = -x$ имаме

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= f[x+(-x)] = f(x) + f(-x) + 2x(-x) \\ &= f(x \cdot 1) + f(x \cdot (-1)) - 2x^2 \\ &= f(x)f(1) + f(x)f(-1) - 2x^2 \\ &= f(x)[f(1) + f(-1)] - 2x^2 \\ &= 2f(x) - 2x^2 \end{aligned}$$

Значи, $f(x) = x^2$.

Не е тешко да се провери дека добиената функција ги задоволува дадените равенки.

19. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$, такви што за секои $x, y > 0$

$$f(f(x)+y) = xf(1+xy). \tag{1}$$

Решение. Ќе покажеме дека f е нерастечка функција. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека постојат $a,b \in (0,+\infty)$ такви што $a < b$ и $f(a) < f(b)$. За реалниот број $w = \frac{bf(b)-af(a)}{b-a}$ не е тешко да се докаже дека $w > 0$ и $w > f(b)$.

Ако $x = a$ и $y = w - f(a)$ замениме во (1) се добива $f(w) = af(1+ab\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$

Ако пак замениме $x = b$ и $y = w - f(b)$ добиваме $f(w) = bf(1+ab\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$.

Според тоа $a = b$ што е во спротивност со претпоставката. Значи f е нерастечка функција, т.е. ако $0 < a < b$, тогаш $f(b) \le f(a)$.

Ако избереме $x = y = 1$, тогаш $f(f(1)+1) = 1f(1+1\cdot 1) = f(2)$. Ако избереме $x = 1$, $y = 2$ добиваме $f(f(1)+2) = f(1+2) = f(3)$. Ако пак избереме $x = 2$, $y = 1$, добиваме $f(f(2)+1) = 2f(1+2) = 2f(3)$. Сега

$$\begin{aligned} 2f(3) &= f(f(2)+1) = f(f(f(1)+1)+1) \\ &= (f(1)+1)f(1+(f(1)+1)\cdot 1) \\ &= (f(1)+1)f(2+f(1)) \\ &= (f(1)+1)f(3). \end{aligned}$$

Од тоа што $f(3) > 0$, следува $f(1)+1 = 2$, т.е. $f(1) = 1$.

Нека $x > 1$ и ако избереме $y = 1 - \frac{1}{x}$, тогаш

$$f(f(x)+1-\tfrac{1}{x}) = xf(1+x(1-\tfrac{1}{x})) = xf(x). \tag{2}$$

Ако $f(x) > \frac{1}{x}$, тогаш $f(x) - \frac{1}{x} + 1 > 1$ и заради монотоноста

$$f(f(x)+1-\tfrac{1}{x}) \le f(1) = 1.$$

Тогаш од (2), $xf(x) \le 1$, т.е. $f(x) \le \frac{1}{x}$ што е во спротивност со претпоставката.

Значи $f(x) \le \frac{1}{x}$.

Ако претпоставиме дека $f(x) < \frac{1}{x}$ со аналогни разгледувања следува $f(x) \ge \frac{1}{x}$

Од претходните разгледувања добиваме $f(x) = \frac{1}{x}$ за $x > 1$.

Ако $x > 0$, тогаш $f(x)+1 > 1$ и според тоа

$$f(f(x)+1) = \frac{1}{f(x)+1}. \qquad (3)$$

Ако пак во во почетната равенка замениме $y = 1$, добиваме

$$f(f(x)+1) = xf(1+x) = \frac{x}{1+x}. \qquad (4)$$

Од (3) и (4) лесно се добива $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

20. Да се определат сите функции $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ такви што

$$x\,f(x+\tfrac{1}{y}) + y\,f(y) + \tfrac{y}{x} = y\,f(y+\tfrac{1}{x}) + x\,f(x) + \tfrac{x}{y},$$

за секои $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Решение. Доволно е да се воведе помошната функција $g(x) = f(x) - x$. Тогаш се добива функционалната равенка

$$xg(x+\tfrac{1}{y}) + yg(y) = yg(y+\tfrac{1}{x}) + xg(x). \qquad (1)$$

а) Ако во (1) замениме $y = 1$ се добива равенката

$$g(1+\tfrac{1}{x}) = xg(x+1) + g(1) - xg(x). \qquad (2)$$

Ако наместо x во (2) замениме $\frac{1}{x}$ се добива равенката

$$g(1+\tfrac{1}{x}) = xg(x+1) - xg(1) + g(\tfrac{1}{x}). \qquad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме

$$xg(x) + g(\tfrac{1}{x}) = (x+1)g(1). \qquad (4)$$

б) Ако (1) замениме $y = -1$, равенката го добива обликот

$$g(\tfrac{1}{x}-1) = xg(x) + g(-1) - xg(x-1). \qquad (5)$$

Ако наместо x замениме $\frac{1}{x}$ добиваме

$$g(\tfrac{1}{x}-1) = g(\tfrac{1}{x}) - xg(x-1) + xg(-1) \qquad (6)$$

Од (5) и (6) добиваме

$$xg(x) - g(\tfrac{1}{x}) = -(x-1)g(-1). \qquad (7)$$

Сега од (4) и (7) имаме

$$g(x) = \frac{g(1)-g(-1)}{2} + \frac{g(1)+g(-1)}{2}\frac{1}{x},$$

односно

$$f(x) = \frac{g(1)-g(-1)}{2} + \frac{g(1)+g(-1)}{2}\frac{1}{x} + x.$$

Бидејќи $g(1)$ и $g(-1)$ се произволни, добиваме $f(x) = A + \frac{B}{x} + x$, а не е тешко да се провери дека секоја ваква функција е решение на равенката.

21. Да се определат сите функции f за кои

$$\tfrac{1}{x} f\left(-x\right) - f(\tfrac{1}{x}) = x, \tag{1}$$

за $x \neq 0$.

Решение. Ако во равенката (1) воведеме смена $\frac{1}{x} = -t$, т.е. $t = -\frac{1}{x}$, $x = -\frac{1}{t}$, $-x = \frac{1}{t}$, добиваме

$$-tf(\tfrac{1}{t}) + f(-t) = -\tfrac{1}{t}$$

$$t^2 f(\tfrac{1}{t}) - tf(-t) = 1,$$

т.е.

$$x^2 f(\tfrac{1}{t}) - xf(-x) = 1. \tag{2}$$

Равенката (1) ќе ја помножиме со x, при што добиваме

$$f(-x) + xf(\tfrac{1}{x}) = x^2. \tag{3}$$

Ако сега пак равенката (3) ја помножиме со x и од неа ја одземеме (2), добиваме

$$2xf(-x) = x^3 - 1$$

$$f(-x) = \tfrac{x^3-1}{2x}$$

Сега, со смена $-x = z$, имаме

$$f(z) = \tfrac{z^3+1}{2c}.$$

Не е тешко да се провери дека функцијата $f(x) = \frac{x^3+1}{2x}$ е решение на равенката.

22. Нека $a, b \in \mathbb{R}$ се такви што $a + b \neq 0$ и за функцијата $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е исполнето равенството

$$af(x) + bf(1-x) = x,$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Докажи дека

а) $f(x) + f(1-x) = \frac{1}{a+b}$

б) Ако $a \neq b$, тогаш $f(x) = \frac{1}{a-b} x - \frac{b}{a^2-b^2}$.

Решение. а) Ако во $af(x) + b(f(1-x) = x$ x го замениме со $1-x$, тогаш добиваме

$$af(1-x) + bf(x) = 1 - x. \tag{1}$$

Ако почетната равенка ја собереме со (1) добиваме

$$(a+b)f(1-x) + (a+b)f(x) = 1$$

$$(a+b)[f(1-x) + f(x)] = 1$$

Бидејќи $a + b \neq 0$, добиваме $f(x) + f(1-x) = \frac{1}{a+b}$.

б) *Случај* 1. Ако $b = 0$, тогаш $a \neq 0$ па непосредно од почетната равенка добиваме

$$f(x) = \tfrac{1}{a} x = \tfrac{1}{a-b} x - \tfrac{b}{a^2-b^2}.$$

Случај 2. Ако $a \neq b \neq 0$, тогаш од равенството $f(1-x) + f(x) = \frac{1}{a+b}$ добиваме

$$af(x)+b(\tfrac{1}{a+b}-f(x))=x$$
$$f(x)(a-b)=x-\tfrac{b}{a+b}$$
$$f(x)=\tfrac{1}{a-b}x-\tfrac{b}{a^2-b^2},$$

за секој $x\in\mathbb{R}$.

23. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, такви што

$$f(x^y)=(f(x))^{f(y)},$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Решение. Да забележиме дека $f(x)=1$ е функција која е решение на дадената равенка.

Нека претпоставиме дека постои $a\in\mathbb{R}^+$ таков што $f(a)\neq 1$. Од равенството

$$f(a)^{f(xy)}=f(a^{xy})=f(a^x)^{f(y)}=f(a)^{f(x)f(y)},$$

добиваме

$$f(xy)=f(x)f(y) \tag{1}$$

за произволни $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Сега, од равенството

$$f(a)^{f(x+y)}=f(a^{x+y})=f(a^xa^y)=f(a^x)f(a^y)=f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)}=f(a)^{f(x)+f(y)}$$

добиваме

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{2}$$

За произволни $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Сега, од (1) имаме

$$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)f(1),$$

т.е. $f(1)=1$.

Од (1) и (2) и од последното равенство добиваме

$$f(n)=f(1+1+...+1)=F91)+f(1)+...+f(1)=n$$
$$f(\tfrac{m}{n})n=f(\tfrac{m}{n})f(n)=f(\tfrac{m}{n}n)=f(m)=m\ ,$$

односно, за секои $m,\,n\in\mathbb{N}$ е исполнето

$$f(\tfrac{m}{n})=\tfrac{m}{n}\ . \tag{3}$$

Ќе претпоставиме дека $f(x)\neq x$ за некој $x>0$. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $f(x)<x$. Ќе избереме број $y=\frac{m}{n}$, така што

$$f(x)<y<x \tag{4}$$

Тогаш,

$$f(x)=f(y+(x-y))=f(y)+f(x-y)>f(y)=y\ ,$$

што е спротивно на (4). Значи, $f(x)=x$ и не е тешко да се види дека таа е решение на почетната равенка.

6. ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1. Најди прв извод на функцијата:

а) $y = 4x^3 - 12x^2 + e^x$,

б) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$,

в) $y = e^x \cos x + 3x^4 \sin x$

г) $y = \operatorname{tg} x$.

Решение. а) За функцијата $y = 4x^3 - 12x^2 + e^x$ имаме

$$\begin{aligned} y' &= (4x^3 - 12x^2 + e^x)' = (4x^3)' - (12x^2)' + (e^x)' \\ &= 4 \cdot 3x^{3-2} - 12 \cdot 1x^{1-1} + e^x \\ &= 12x^2 - 12 + e^x. \end{aligned}$$

б) За функцијата $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ имаме

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+1)'(x^2+1) - (x^2+1)'(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(1+0)(x^2+1) - (2x+0)(x+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2-2x}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

в) За функцијата $y = e^x \cos x + 3x^4 \sin x$ имаме

$$\begin{aligned} y' &= (e^x \cos x + 3x^4 \sin x)' = (e^x \cos x) + (3x^4 \sin x)' \\ &= (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' + 3(x^4)' \sin x + 3x^4 (\sin x)' \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x + 12x^3 \sin x + 3x^4 \cos x. \end{aligned}$$

г) Нека $y = \operatorname{tg} x$. Ако ја искористиме формулата (3), тогаш за секој $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$ добиваме

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Аналогно, за секој $x \neq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ добиваме $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

2. Најди прв извод на функцијата

$$f(x) = x^{\alpha}, \ x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R} .$$

Решение. Ако го искористиме равенството $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, добиваме

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha} \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} .$$

3. За функцијата $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$ пресмеstaj $0,001 f'(0,01)$.

Решение. Имаме

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x} = 1 - 2x^{-1/2} + x^{-1} ,$$

па затоа

$$f'(x)=(1-2x^{-1/2}+x^{-1})'=-2(-\tfrac{1}{2})x^{-3/2}+(-1)x^{-2}=\tfrac{1}{\sqrt{x^3}}-\tfrac{1}{x^2}\,.$$

Според тоа,

$$f'(0,01)=\frac{1}{\sqrt{0{,}01^3}}-\frac{1}{0{,}01^2}=1000-1000=-9000\,,$$

па затоа

$$0,001f'(0,01)=0,001\cdot(-9000)=-9\,.$$

4. Дадена е функцијата $y=u^v$, каде $u=u(x)>0,\quad v=v(x)$. Докажи дека

$$y'=u^v v'\ln u+vu'u^{v-1} \qquad (1)$$

Решение. Дадената функција можеме да ја запишеме во видот $y=e^{v\ln u}$. Сега,

$$y'=(e^{v\ln u})'=e^{v\ln u}(v\ln u)'=e^{v\ln u}(v'\ln u+v\tfrac{1}{u}u')=u^v v'\ln u+vu'u^{v-1}\,.$$

5. Најди прв извод на функцијата $y=x^x$, $x>0$.

Решение. За дадената функција имаме $u(x)=v(x)=x$ и бидејќи

$$u'(x)=v'(x)=1\,,$$

со замена во формулата (1) од задача 4 наоѓаме $y=x^x(\ln x+1)$.

6. Најди прв извод на функцијата $y=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|$, $x\neq\pm a$.

Решение. За дадената функција имаме

$$y'=\tfrac{1}{2a}\tfrac{x+a}{x-a}\left(\tfrac{x-a}{x+a}\right)'=\tfrac{1}{2a}\tfrac{x+a}{x-a}\tfrac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2}=\tfrac{1}{x^2-a^2}\,.$$

7. Најди y' ако $y=(x^2+1)^{\sin x}$.

Решение. Бидејќи $x^2+1>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$ можеме да логаритмираме. Притоа добиваме

$$\ln y=\sin x\ln(x^2+1)\,,$$

од што следува

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln(x^2+1)+\tfrac{2x\sin x}{x^2+1}\,,$$

односно

$$y'=(x^2+1)^{\sin x}[\cos x\ln(x^2+1)+\tfrac{2x\sin x}{x^2+1}]\,.$$

8. Најди y' ако

а) $y=(x^2+3)^{25}$, б) $y=(1-2\sqrt{x})^4$, в) $y=(\frac{x+1}{x-1})^5$,

г) $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$, д) $y=\ln(1+x^2)$, ѓ) $y=e^{-x^2}$.

Решение. а) Имаме

$$y' = [(x^2+3)^{25}]' = 25(x^2+3)^{25-1}\cdot(x^2+3)'$$
$$= 25(x^2+3)^{24}\cdot(2x+0) = 50x(x^2+3)^{24}.$$

б) Имаме

$$y' = [(1-2\sqrt{x})^4]' = 4(1-2\sqrt{x})^{4-1}(1-2\sqrt{x})' = 4(1-2\sqrt{x})^3(0-2\tfrac{1}{2\sqrt{x}}) = \tfrac{-4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}.$$

в) Имаме

$$y' = [(\tfrac{x+1}{x-1})^5]' = 5(\tfrac{x+1}{x-1})^4(\tfrac{x+1}{x-1})' = 5(\tfrac{x+1}{x-1})^4\,\tfrac{(x+1)'(x-1)-(x-1)'(x+1)}{(x-1)^2} = 5(\tfrac{x+1}{x-1})^4\,\tfrac{-2}{(x-1)^2}.$$

г) Имаме

$$y' = (\sqrt{\tfrac{x^2-1}{x^2+1}})' = \tfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}}(\tfrac{x^2-1}{x^2+1})' = \tfrac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot\tfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \tfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\tfrac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

д) Имаме

$$y' = [\ln(1+x^2)]' = \tfrac{1}{1+x^2}(1+x^2)' = \tfrac{2x}{1+x^2}.$$

ѓ) Имаме

$$y' = (e^{-x^2})' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2xe^{-x^2}.$$

9. Најди го изводот на функцијата $y = f(x)$ која е имплицитно зададена со равенката

$$x^2+3xy+y^2+1=0.$$

Решение. Диференцираме по x, при што сметаме дека y е функција од x и добиваме

$$(x^2+3xy+y^2+1)' = 0',$$

т.е.

$$2x+3y+3xy'+2yy' = 0,$$

од каде наоѓаме

$$y'(3x+2y) = -(2x+3y),$$

т.е.

$$y' = -\tfrac{2x+3y}{3x+2y}.$$

10. Најди го $n-$тиот извод на функцијата:

а) $y = x^n$,

б) $y = a^x,\ a>0,$

Решение. а) Ако $y = x^n$, тогаш

$$y' = nx^{n-1},\ y'' = (y')' = (nx^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2},...,$$
$$y^{(n)} = n!,\ y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = ... = 0.$$

б) Ако $y = a^x,\ a>0,$ тогаш

$$y' = a^x\ln a,\ y'' = (a^x\ln a)' = a^x\ln^2 a, ...,\ y^{(n)} = a^x\ln^n a,$$

за секој природен број n. Јасно, ако $a=e$, тогаш $(e^x)^{(n)}=e^x$, за секој природен број n.

11. Најди го вториот извоид на функцијата

а) $y=xe^x$, б) $y=x\ln x$

Решение. а) Ако $y=xe^x$, тогаш

$$y'=(xe^x)'=1\cdot e^x+xe^x=(x+1)e^x,$$

па за вториот извод добиваме

$$y''=(y')'=[(x+1)e^x]'=(1+0)e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x.$$

б) Ако $y=x\ln x$, тогаш

$$y'=(x\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\tfrac{1}{x}=\ln x+1,$$

па за вториот извод добиваме

$$y''=(y')'=(\ln x+1)'=\tfrac{1}{x}+0=\tfrac{1}{x}.$$

Третиот извод на оваа функција е

$$y'''=(y'')'=(\tfrac{1}{x})'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=\tfrac{-1}{x^2}.$$

7. ПРИМЕНА НА ИЗВОДИТЕ

1. Најди

а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg}x}$ г) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x})$

д) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x$.

Решение. а) Имаме

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=(\tfrac{0}{0}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to-2}\frac{(x^3+3x^2+2x)'}{(x^2-x-6)'}=\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+6x+2}{2x-1}=\frac{12-12+2}{-5-1}=-\frac{1}{3}.$$

б) Имаме

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=(\tfrac{0}{0}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=(\tfrac{0}{0}=?)$$

$$\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1.$$

в) Имаме

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg}x}=(\tfrac{\infty}{\infty}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\ln 5x)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\sin x=1\cdot0=0.$$

г) Имаме

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-\tfrac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\tfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=(\tfrac{0}{0}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\tfrac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\tfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\tfrac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=(\tfrac{0}{0}=?)$$

$$\overset{\text{l.p.}}{=}-\lim_{x\to 0}\tfrac{(x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=-\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\tfrac{0}{2}=0.$$

д) Имаме

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=(0\cdot\infty=?)=\lim_{x\to 0}\tfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=(\tfrac{\infty}{\infty}=?)\overset{\text{l.p.}}{=}\lim_{x\to 0}\tfrac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 0}\tfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0\ .$$

2. Испитај ја монотоноста на функцијата:

а) $f(x)=x-\sin x$, б) $f(x)=xe^{-x}$.

Решение. а) За функцијата $f(x)=x-\sin x$ имаме $f'(x)=1-\cos x$ и како $|\cos x|\leq 1$, за секој реален број x добиваме дека $f'(x)\geq 0$ за секој реален број x. Според тоа, оваа функција монотоно расте на целата реална права.

б) За функцијата $f(x)=xe^{-x}$ имаме $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$.

Бидејќи $e^{-x}>0$, за секој реален број x, од $x>1$ следува $f'(x)<0$ што значи дека функцијата $f(x)=xe^{-x}$ монотоно опаѓа на интервалот $(1,+\infty)$, а од $x<1$ следува $f'(x)>0$ што значи дека функцијата $f(x)=xe^{-x}$ моното расте на интервалот $(-\infty,1)$.

3. Определи ги екстремните вредности на функцијата

$$f(x)=x^4-4x^3+4x^2\ .$$

Решение. а) Го наоѓаме првиот извод на функција $f'(x)=4x^3-12x^2+8x$ и ја решаваме равенката $f'(x)=4x^3-12x^3+8x=0$, со што ги наоѓаме стационарните точки. Последната равенка е еквивалентна на равенката $4x(x^2-3x+2)=0$ од каде наоѓаме $x_1=0$ и $x^2-3x+2=0$. Решенија на квадратната равенка се $x_2=1$ и $x_3=2$, што значи дека $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=2$ се стационарни точки на функцијата.

б) Го наоѓаме вториот извод на функцијата и го испитуваме неговиот знак во стационарните точки. Имаме $f''(x)=12x^2-24x+8$, па затоа

- од $f''(x_1)=f''(0)=8>0$ следува дека во $x_1=0$ функцијата има минимум, кој е еднаков на $f(0)=0^4-4\cdot 0^3+4\cdot 0^2=0$,
- од $f''(x_2)=f''(1)=-4<0$ следува дека во $x_2=1$ функцијата има максимум, кој е еднаков на $f(1)=1^4-4\cdot 1^3+4\cdot 1^2=1$ и
- од $f''(x_2)=f''(2)=8>0$ следува дека во $x_2=2$ функцијата има максимум, кој е еднаков на $f(2)=2^4-4\cdot 2^3+4\cdot 2^2=0$.

4. Определи ги локалните екстреми на функцијата

$$f(x) = x^4 - 4x^3.$$

Решение. Имаме,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2,\ f''(x) = 12x^2 - 24x,\ f'''(x) = 24x - 24.$$

Од $f'(x) = 0$ добиваме дека $x_{1,2} = 0$ и $x_3 = 3$ се стационарни точки на функцијата f. Понатаму, бидејќи $f''(3) = 36 > 0$ заклучуваме дека $x_3 = 3$ е точка на локален минимум, а како $f''(0) = 0$, наоѓаме $f'''(0) = -24 < 0$, па од теорема 8.10 следува дека $x_{1,2} = 0$ не е точка на локален екстрем на функцијата $f(x)$.

5. За функцијата $f(x) = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ состави ги равенките на тангентата и нормалата во точка со апциса $x_0 = 2a$.

Решение. За $x_0 = 2a$ наоѓаме $f(x_0) = \frac{8a^3}{4a^2+4a^2} = a$, т.е. точката во која минуваат тангентата и нормалата е $M(2a, a)$.

Од друга страна, $f'(x) = (\frac{8a^3}{4a^2+x^2})' = -\frac{16xa^3}{(4a^2+x^2)^2}$, што значи

$$f'(x_0) = -\frac{16\cdot 2aa^3}{(4a^2+4a^2)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Со замена во $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ за равенката на тангентата наоѓаме

$$y - a = -\frac{1}{2}(x - 2a).$$

Со замена во $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ за равенката на нормалата наоѓаме

$$y - a = 2(x - 2a).$$

6. Докажи дека тангентите на кривата $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, повлечени во точки за кои $y_0 = 1$, се сечат во координатниот почеток.

Решение. За $y_0 = 1$ имаме $1 = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, т.е. $x_0 = -1$ и $x_1 = 1$. Од друга страна $y'(x) = \frac{16x}{(3+x^2)^2}$, па затоа $y'(1) = 1$ и $y'(-1) = -1$. Со замена во равенката за тангента $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ за тангентите во точките $M_0(-1,1)$ и $M_1(1,1)$ добиваме $y = -x$ и $y = x$, соодветно. Јасно, овие прави се сечат во координатниот почеток.

7. Најди ја најголемата вредност на функцијата $y = x^2\sqrt{9 - x^2}$.

Решение. Функцијата е дефинирана за $9 - x^2 \geq 0$, односно за $-3 \leq x \leq 3$. Исто така заради $(-x^2)\sqrt{9-(-x)^2} = x^2\sqrt{9 - x^2}$ доволно е да најдеме најголема вредност на функцијата за $0 \leq x \leq 3$.

Првиот извод на функцијата е $y' = -3x\frac{x^2-6}{\sqrt{9-x^2}}$, па тој е еднаков на нула, ако и само ако, $x = 0$ или $x = \pm\sqrt{6}$. Имајќи предвид дека за $0 < x < \sqrt{6}$ функцијата расте ($y' > 0$), а за $\sqrt{6} < x < 3$ опаѓа, добиваме дека најголемата вредност на y е $(\sqrt{6})^2\sqrt{9-\sqrt{6^2}} = 6\sqrt{3}$.

8. Да се најдат сите диференцијабилни функции f, такви што за кои било $x, y \in \mathbb{R}$ да важи равенството

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Решение. Лесно се проверува дека функциите $f(x) = kx$, каде што k е произволен реален број се решенија на (1). Да докажеме: (1) нема други решенија освен спомenатите.

Да го фиксираме $y \in \mathbb{R}$; тогаш двете страни на (1) определуваат функции од променливата x, и бидејќи тие се еднакви, еднакви се и нивните изводи. Бидејќи y е фиксиран, имаме

$$(f(x+y))' = f'(x+y), \qquad f'(y) = 0.$$

Следствено, го добиваме идентитетот

$$f'(x+y) = f'(x). \tag{2}$$

Ова важи за кој било $x \in \mathbb{R}$ и кој било $y \in \mathbb{R}$. Сепак $x+y$ и x се два произволни реални броја и затоа од идентитетот (2) следува дека f' е константна функција. Навистина, за било кои $a, b \in \mathbb{R}$ (ставајќи $x = b$, $y = a-b$) ќе имаме:

$$f'(a) = f'(a+(b-a)) = f'(b).$$

Нека $f'(x) = k$. Тогаш $f(x) = kx+b$, $b \in \mathbb{R}$, па (1) добива вид

$$k(x+y)+b = (kx+b)+(ky+b).$$

Следствено, (1) е идентитет при кој било k, и $b = 0$, така што условот на задачата го задоволуваат само функциите од видот $f(x) = kx$.

9. Најди го множеството на сите можни позитивни реални броеви, такви што постои правоаголен паралелопипед со следниве својства: неговиот волумен е V, плоштината 18, а збирот на растојанијата од центарот до страните е 6.

Решение. Димензиите на паралелопипедот да ги означиме со a, b, c. Тогаш, $V = abc$, $2(ab+bc+ca) = 18, a+b+c = 6$. Задачата се сведува на: за кои V овој систем има решение кое задоволува $a, b, c > 0$. Според Виетовите формули, a, b и c, се решенија на равенката $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - V = 0$. Треба да определиме кога овој полином има три позитивни реални корени. Разгледувајќи го видот на кубната крива, заклучуваме дека последното е еквивалентно на следниве услови: $f(0) < 0$, локалните екстреми се достигнуваат во позитивни точки, локалниот максимум е ненегативен и локалниот минимум е непозитивен. Бидејќи $V > 0$, имаме $f(0) = -V < 0$. Понатаму, локалните екстреми се достигнуваат во корените на првиот извод $f'(x)=3x^2-12x+9=0$, т.е. во $x=1$ и $x=3$. Добиваме дека во $x=1$ имаме локален максимум $f(1)=4-V$, а во $x=3$ имаме локален минимум $f(3)=-V$. Според тоа, сите услови се исполнети кога $0<V\le 4$. Едноставно се проверува дека постојат три различни корени за $V<4$ и два различни корени за $V=4$.

10. Најди го најголемиот можен волумен на правилна четиристрана пирамида со бочен раб 1.

Решение. Нека S е врвот на пирамидата $SABCD$, нека $ABCD$ е нејзината основа и нека E е подножјето на нормалата од S кон $ABCD$. Триаголникот SEA е правоаголен со хипотенуза $\overline{AS}=1$. Нека $\angle SAE=\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогаш висината на пирамидата е $\overline{SE}=\sin\alpha$, а дијагоналата на квадратот на основата е $2\overline{AE}=2\cos\alpha$, па волуменот на пирамидата е $V(\alpha)=\frac{1}{3}\frac{(2\overline{AE})^2}{2}\overline{SE}=\frac{2}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

I начин. Тогаш,

$$V'(\alpha)=\tfrac{2}{3}\cos\alpha(\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)=\tfrac{2}{3}\cos\alpha(1-3\sin^2\alpha),$$

па $V'(\alpha)>0$ за $0<\sin\alpha<\frac{1}{\sqrt{3}}$, а $V'(\alpha)<0$ за $\frac{1}{\sqrt{3}}<\sin\alpha<1$, односно максимумот се достигнува за $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и изнесува $V=\frac{4}{27}\sqrt{3}$.

II начин. Ставаме смена $t=\sin\alpha$, тогаш   ,   . Ја трансформираме функцијата $V(t)$ до следниот облик

$$V(t)=\tfrac{2\sqrt{3}}{9}-(\tfrac{4\sqrt{3}}{3}-t)(t-\tfrac{\sqrt{3}}{3})^2,$$

при што од   имаме дека $\frac{4\sqrt{3}}{3}-t>\frac{4\sqrt{3}}{3}-1>0$, па $V(t)$ достигнува максимум кога $t-\frac{\sqrt{3}}{3}=0$, т.е. $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и тој изнесува $V=\frac{4}{27}\sqrt{3}$.

11. Докажи дека функцијата $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ не прима вредности поголеми од $\frac{1}{4}$, а помали од 1.

Решение. Нека $y=\frac{x^2-1}{x^2-4}$, тогаш $x=\pm\sqrt{\frac{4y-1}{y-1}}$, односно мора $\frac{4y-1}{y-1}\ge 0$, т.е. $y\in(-\infty,\frac{1}{4}]\cup(1,+\infty)$, што требаше и да се докаже.

12. Најди ја висината на цилиндар со максимален волумен впишан во топка со радиус $\sqrt{3}$.

Решение. Нека r е радиусот на основата на цилиндарот и нека H е висината на цилиндарот. Во пресекот на цилиндарот и рамнината која минува низ неговата оска се добива правоаголник со страни H и $2r$, а дијагонала $2\sqrt{3}$. Тогаш,

$$V(H)=r^2\pi H=((\sqrt{3})^2-(\tfrac{H}{2})^2)\pi H,\ 0<H<2\sqrt{3}.$$

I начин. Имаме, $V'(H)=3\pi(1-\frac{H^2}{4})$, од каде следи дека $V'(H)>0$ за $0<H<2$ и $V'(H)<0$ за $2<H<2\sqrt{3}$, односно максималниот волумен се добива ако се впише цилиндар со висина $H=2$.

II начин. Ја трансформираме функцијата $V(H)$ до следниот облик

$$V(H)=4\pi-\frac{\pi}{4}(H+4)(H-2)^2,$$

при што од $0<H<2\sqrt{3}$ имаме дека $H+4>4>0$, па $V(H)$ достигнува максимум кога $H-2=0$, односно кога $H=2$.

13. Најди точка на елипсата $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$ во првиот квадрант, таква да тангентата на елипсата во таа точка со координатните оски формира триаголник со најмала плоштина.

Решение. Равенката на тангентата во точката $M(a,b), a,b>0$ има вид $\frac{xa}{8}+\frac{yb}{18}=1$. Нејзините пресеци со координатните оски се точките $A(\frac{8}{a},0)$ и $B(0,\frac{18}{b})$. Од $\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{18}=1$ добиваме $b=\frac{3}{2}\sqrt{8-a^2}$, па затоа

$$P_{\triangle ABO}=\frac{72}{ab}=\frac{48}{a\sqrt{8-a^2}}.$$

Бидејќи $P'(a)=\frac{96(a^2-4)}{a^2(8-a^2)^{3/2}}$ важи $P'(a)<0$ за $0<a<2$, $P'(a)>0$ за $2<a<2\sqrt{2}$, т.е. минимумот се достигнува за $a=2$. Значи, бараната точка е $M(2,3)$.

14. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AC}=\overline{BC}=1$ и $\overline{AB}=2x$.

а) Изрази го како функција од x радиусот r на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

б) Определи ја најголемата можна вредност за r.

Решение. а) Од Питагоровата теорема следува дека висината на триаголникот спуштена кон страната AB е $\sqrt{1-x^2}$. Според тоа,

$$r=\frac{P}{s}=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

б) Треба да најдеме максимум на функцијата $f(x)=\frac{x^2(1-x)}{1+x}$ во интервалот $(0,1)$. Имаме $f'(x)=\frac{2x(1-x-x^2)}{(x+1)^2}$. Стационарна точка е $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и функцијата расте на интервалот $(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$, а опаѓа на интервалот $[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$. Според тоа, максимумот на f во $(0,1)$ е $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})=\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$. Значи, најголемата можна вредност на r е $\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

15. Нека α,β и γ се агли во триаголник. Докажи дека

$$\sin\frac{|\alpha-\beta|}{2}+\sin\frac{|\beta-\gamma|}{2}+\sin\frac{|\gamma-\alpha|}{2}<\sqrt{\frac{71+17\sqrt{17}}{32}}$$

Решение. Нека $\alpha\geq\beta\geq\gamma$. Означуваме $\alpha-\beta=2y$ и $\beta-\gamma=2x$. Тогаш $x\geq 0, y\geq 0$ и $2x+y=\frac{\pi}{2}-\frac{3\gamma}{2}$. Оттука $2x+y<\frac{\pi}{2}$ и $x<\frac{\pi}{4}$. Сега

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{|\alpha-\beta|}{2}+\sin\tfrac{|\beta-\gamma|}{2}+\sin\tfrac{|\gamma-\alpha|}{2}&\leq\sin(\tfrac{\pi}{2}-2x)+\sin x+\sin(\tfrac{\pi}{2}-x)\\&=\sin x+\cos x+\cos 2x\\&=\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Ја разгледуваме функцијата $f(t)=\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t^2}$ за $t\in[0,1]$. Бидејќи

$$f'(t)=-\frac{4t^2+t-1}{2\sqrt{1-t^2}(\sqrt{1-t}+2t)}$$

следува дека најголемата вредност на $f(t)$ се достигнува за $t=\frac{\sqrt{17}-1}{8}$ и

$$f(\tfrac{\sqrt{17}-1}{8})=\sqrt{\frac{71+17\sqrt{17}}{32}}.$$

17. Нека P е внатрешна точка во триаголникот ABC. Докажи дека барем еден од аглите PAB, PBC, PCA е помал или еднаков на 30°.

Решение. Нека

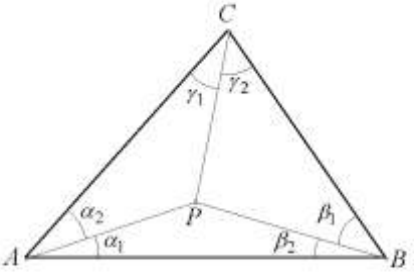
$$\measuredangle PAB=\alpha_1,\ \measuredangle PBC=\beta_1,\ \measuredangle PCA=\gamma_1,\ \measuredangle PAC=\alpha_2,\ \measuredangle PBA=\beta_2,\ \measuredangle PCB=\gamma_2.$$

Од синусната теорема, следува:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=1$$

т.е.

$$\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1=\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2\quad(1)$$



Да претпоставиме дека $\alpha_1>30^\circ$, $\beta_1>30^\circ$ и $\gamma_1>30^\circ$. Од $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1<180^\circ$, следува $\alpha_1<120^\circ$, $\beta_1<120^\circ$ и $\gamma_1<120^\circ$, па затоа

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1>\sin^3 30^0=\tfrac{1}{8}.\quad(2)$$

Од друга страна, користејќи го неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, конвексноста на синусната функција на $[0^\circ,180^\circ]$ и неравенството $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2<90^\circ$, добиваме:

$$\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2\leq(\tfrac{\sin\alpha_2+\sin\beta_2+\sin\gamma_2}{3})^3\leq(\sin\tfrac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{3})^3<\sin^3 30^\circ=\tfrac{1}{8},$$

што противречи на (1) и (2). Од овде следува дека $\min\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}\leq 30^\circ$.

8. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ. ЗАМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ И ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

1. Реши ги интегралите:

а) $\int(\frac{1-x}{x})^2dx$, б) $\int(4\sin x+3-5x^4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+1})dx$

в) $\int(\sqrt{x}-1)^2dx$, г) $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{x^2})dx$,

д) $\int\frac{1-\cos^3x}{\cos^2x}dx$, ѓ) $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

Решение. а) Имаме

$$\int(\frac{1-x}{x})^2dx=\int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx=\int(\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}+1)dx=\int x^{-2}dx-2\int\frac{dx}{x}+\int dx$$

$$=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-2\ln|x|+x+C=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.$$

б) Имаме

$$\int(4\sin x+3-5x^4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+1})dx=4\int\sin xdx+3\int dx-5\int x^4dx+\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-4\cos x+3x-x^5+\ln|x|-2\operatorname{arctg}x+C.$$

в) Имаме

$$\int(\sqrt{x}-1)^2dx=\int(x-2\sqrt{x}+1)dx=\int(x^1-2x^{1/2}+1)dx$$

$$=\frac{x^{1+1}}{1+1}-2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+x+C=\frac{x^2}{2}-\frac{4\sqrt{x}^3}{3}+x+C.$$

г) Имаме

$$\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{x^2})dx=\int(e^x+\frac{1}{x^2})dx=e^x-\frac{1}{x}+C\,.$$

д) Имаме

$$\int\frac{1-\cos^3x}{\cos^2x}dx=\int(\frac{1}{\cos^2x}-\frac{\cos^3x}{\cos^2x})dx=\int(\frac{1}{\cos^2x}-\cos x)dx=\operatorname{tg}x-\sin x+C\ .$$

ѓ) Имаме

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{x^2+1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int(\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}+\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)})dx$$

$$=\int(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2})dx=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x}+C.$$

2. Реши ги интегралите:

а) $\int(3x+2)^{12}dx$, б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$

в) $\int\frac{\ln x+2}{x}dx$, г) $\int x\sin x^2dx$,

д) $\int\operatorname{tg}xdx$, ѓ) $\int e^{\sin x}\cos xdx$

Решение. а) Воведуваме замена $3x+2=t$ и добиваме $(3x+2)'dx=(t)'dt$, т.е. $3dx=dt$ од каде што следува $dx=\frac{1}{3}dt$. Според тоа,

$$\int(3x+2)^{12}dx=\int t^{12}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{13}}{13}+C=\frac{t^{13}}{39}+C=\frac{(3x+2)^{13}}{39}+C\ .$$

б) Воведуваме замена $2-5x=t$ и добиваме $(2-5x)'dx=(t)'dt$, т.е. $-5dx=dt$ од каде што следува $dx=-\frac{1}{5}dt$. Според тоа,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}=-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{t}+C=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C\ .$$

в) Воведуваме замена $\ln x+2=t$ и добиваме $(\ln x+2)'dx=dt$, т.е. $\frac{dx}{x}=dt$ од каде што следува

$$\int\frac{\ln x+2}{x}dx=\int tdx=\frac{t^2}{2}+C=\frac{(\ln x+2)^2}{2}+C\ .$$

г) Воведуваме замена $x^2=t$ и добиваме $(x^2)'dx=dt$ т.е. $2xdx=dt$ од каде што следува $xdx=\frac{1}{2}dt$. Според тоа,

$$\int x\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int\sin tdx=-\frac{1}{2}\cos t+C=-\frac{1}{2}\cos x^2+C\ .$$

д) Имаме

$$\int\operatorname{tg}xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx\ .$$

Воведуваме замена $\cos x=t$ и добиваме $(\cos x)'dx=dt$, односно $\sin xdx=-dt$, па затоа

$$\int\operatorname{tg}xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C\ .$$

ѓ) Воведуваме замена $\sin x=t$ и добиваме $(\sin x)'dx=dt$, т.е. $\cos xdx=dt$. Според тоа,

$$\int e^{\sin x}\cos xdx=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin x}+C\ .$$

3. Пресметај го интегралот $\int\frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx$.

Решение. Од $(1+3x^3-x^6)'=9x^2-6x^5=3(3x^2-2x^5)=-3(2x^5-3x^2)$, следува замената $t=1+3x^3-x^6$. Имаме, $-\frac{1}{3}dt=(2x^5-3x^2)dx$, па затоа

$$\int\frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{3}\ln|t|+C=C-\frac{1}{3}\ln|1+3x^3-x^6|\ .$$

4. Пресметај го интегралот $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение. Воведуваме замена $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, и добиваме

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=6\int(\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1})dt$$

$$=6\int(\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}-\frac{1}{t+1})dt=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=2\sqrt[6]{x^3}-3\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

Според тоа,

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C\ .$$

5. Пресметај го интегралот $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$.

Решение. Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})} = \int \frac{e^x dx}{e^x(3e^x+1)} = \int \frac{3e^x dx}{3e^x(3e^x+1)} = (*) .$$

Воведуваме замена $3e^x = t, \quad 3e^x dx = dt$, и добиваме

$$(*) = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{t+1-t}{t(t+1)} dt = \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C$$

$$= \ln|\frac{t}{t+1}| + C = \ln\frac{3e^x}{3e^x+1} + C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})} = \ln\frac{3e^x}{3e^x+1} + C .$$

6. Пресметај го интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

Решение. Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = (*)$$

Воведуваме замена $3x-1=t, \quad dx = \frac{dt}{3}$, и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3}\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C = \frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}) + C .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}) + C .$$

7. Пресметај го интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Решение. Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-4x+4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = (*) .$$

Воведуваме замена $x-2=t, \quad dx = dt$ и добиваме

$$(*) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(x-2) + C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \arcsin(x-2) + C .$$

8. Пресметај го интегралот:

а) $\int x\ln x dx$, б) $\int \ln(x^2+1)dx$,

Решение. а) Овој интеграл ќе го решиме со парцијална интеграција. Земаме

$$\begin{matrix} u = \ln x \\ dv = xdx \end{matrix} \quad \text{и добиваме} \quad \begin{matrix} du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \\ v = \int xdx = \frac{x^2}{2}. \end{matrix}$$

Со замена во формулата (1) наоѓаме

$$\begin{aligned}\int x\ln xdx &= \tfrac{x^2}{2}\ln x-\int\tfrac{x^2}{2}\cdot\tfrac{dx}{x}\\ &= \tfrac{x^2}{2}\ln x-\tfrac{1}{2}\int xdx\\ &= \tfrac{x^2}{2}\ln x-\tfrac{1}{2}\tfrac{x^2}{2}+C\\ &= \tfrac{x^2}{2}\ln x-\tfrac{x^2}{4}+C.\end{aligned}$$

б) Овој интеграл ќе го решиме со парцијална интеграција. Земаме,

$$\begin{array}{lcl} u=\ln(x^2+1) & & du=\tfrac{2x}{x^2+1}dx \\ & \text{и добиваме} & \\ dv=dx & & v=\int dv=\int dx=x \end{array}.$$

Со замена во формулата (1) наоѓаме

$$\begin{aligned}\int\ln(x^2+1)dx &= x\ln(x^2+1)-2\int\tfrac{x^2}{x^2+1}dx\\ &= x\ln(x^2+1)-2\int\tfrac{x^2+1-1}{x^2+1}dx\\ &= x\ln(x^2+1)-2\int(1-\tfrac{1}{x^2+1})dx\\ &= x\ln(x^2+1)-2\left(x-\operatorname{arctg}x\right)+C\end{aligned}$$

Значи,

$$\int\ln(x^2+1)dx=x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C\,.$$

9. Пресметај го

а) $\int xe^x dx$, б) $\int x\sin xdx$,

в) $\int x\operatorname{arctg}xdx$, г) $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

Решение. а) Земаме

$$\begin{array}{lcl} u=x & & du=dx \\ & \text{и добиваме} & \\ e^x dx=dv & & v=\int e^x dx=e^x. \end{array}$$

Ако замениме во формулата (1) наоѓаме

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C\,.$$

б) Земаме

$$\begin{array}{lcl} u=x & & du=dx \\ & \text{и добиваме} & \\ dv=\sin xdx & & v=\int\sin xdx=-\cos x. \end{array}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= -x\cos x-\int-\cos xdx\\ &= -x\cos x+\int\cos xdx-x\cos x+\sin x+C\end{aligned}.$$

в) Земаме

$$\begin{array}{lcl} u=\operatorname{arctg}x & & du=\tfrac{dx}{1+x^2} \\ & \text{и добиваме} & \\ dv=xdx & & v=\int xdx=\tfrac{x^2}{2}, \end{array}$$

па затоа

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{arctg} x dx &= \tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\int \tfrac{x^2}{2}\cdot\tfrac{dx}{1+x^2}\\ &= \tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}\int \tfrac{x^2+1-1}{1+x^2}dx\\ &= \tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}\int (1-\tfrac{1}{1+x^2})dx\\ &= \tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)+C.\end{aligned}$$

г) Ќе направиме парцијална интеграција со

$$u = x$$

$$dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$$

од што следува

$$du = dx$$

$$v=\int dv=\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \left(\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin dx=dt\end{matrix}\right)=-\int\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{2t^2}=\frac{1}{2\cos^2 x}.^{\cdot}$$

Добиваме

$$\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx=\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C\ .\ \blacksquare$$

10. Пресметај го интегралот $\int x\operatorname{arctg}(x+1)dx$.

Решение. Со примена на методот за парцијална интеграција при

$$\begin{matrix}u=\operatorname{arctg}(x+1)\\ dv = xdx\end{matrix}\quad \text{имаме}\quad \begin{matrix}du=\frac{1}{x^2+2x+2}dx\\ v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{matrix}$$

од што следува

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{arctg}\left(x+1\right)dx &= \tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\tfrac{1}{2}\int\tfrac{x^2}{x^2+2x+2}dx\\ &= \tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\tfrac{1}{2}\int(1-\tfrac{2x+2}{x^2+2x+2})dx\\ &= \tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\int\tfrac{2x+2}{x^2+2x+2}dx=(*)\end{aligned}$$

Сега замена $x^2+2x+2=t$, од што добиваме $(2x+2)dx=dt$, па затоа

$$(*)=\tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\int\tfrac{dt}{t}=\tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C\ .$$

Значи,

$$\int x\operatorname{arctg}(x+1)dx=\tfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C\ .$$

11. Пресметај го интегралот $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

Решение Прво воведуваме замена $x=t^2$. Имаме $dx=2tdt$, па затоа

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^t\,2tdt=2\int te^t dt=(*).$$

Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{matrix} u=t \\ dv=e^t dt \end{matrix} \quad \text{од што следува} \quad \begin{matrix} du=dt \\ v=\int dv=\int e^t dt=e^t \end{matrix} .$$

Имаме,

$$(*)=2(te^t-\int e^t dt)=2(te^t-e^t)+C=2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}})+C .$$

Значи,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}})+C ,\; x>0 .$$

12. Пресметај го интегралот $\int \sin\sqrt{x}dx$

Решение Воведуваме замена $x=t^2$ и добиваме $dx=2tdt$, односно

$$\int \sin\sqrt{x}dx=\int 2t\sin tdt=(*)$$

Сега со парцијална интеграција, при

$$\begin{matrix} u=t \\ dv=\sin tdt \end{matrix} \quad \text{добиваме} \quad \begin{matrix} du=dt \\ v=\int dv=\int \sin tdt=-\cos t \end{matrix} ,$$

од што следува

$$(*)=2\left(-t\cos t+\int \cos tdt\right)=2\left(-t\cos t+\sin t\right)+C=2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C .$$

Значи,

$$\int \sin\sqrt{x}dx=2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C, \quad x>0 .$$

9. ИНТЕГРИРАЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

1. Разложи ја рационалната функција $\frac{x^3-2x^2}{x+2}$.

Решение. Бидејќи степенот на броителот е поголем од степенот на именителот, прво ги делиме полиномите и добиваме

$$\frac{x^3-2x^2}{x+2}=x^2-4x+8-\frac{16}{x+2} .$$

2. Разложи ја рационалната функција $\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}$.

Решение. Имаме,

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} ,$$

каде броевите A и B се непознати. Десната страна на последното разложување ја сведуваме под заеднички именител и добиваме

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)} .$$

Според тоа,

$$x+2=(A+B)x+(-2A-B)$$

и ако ги изедначиме коефициентите пред еднаквите степени на x го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} 1-A-B=0 \\ 2+2A+B=0, \end{cases}$$

чие решение е $A=-3$ и $B=4$. Според тоа,

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{4}{x-2}\,.$$

3. Разложи ја рационалната функција $\frac{1}{x(x+1)^2}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}\,.$$

каде броевите A, B и C се непознати. Според тоа,

$$1=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

и ако ги изедначиме коефициентите пред еднаквите степени на x го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

чие решение е $A=1, B=C=-1$. Според тоа

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

4. Разложи ја рационалната функција $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x-1)}$$

каде броевите A, B и C се непознати. Според тоа,

$$x^2+1=(A+C)x^2+(A+B)x+B$$

и ако ги изедначиме коефициентите пред еднаквите степени на x го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{cases}$$

чие решение е $A=-1, B=1, C=2$. Според тоа,

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\,.$$

5. Разложи ја рационалната функција $\frac{1}{x(x^2+1)}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}\,,$$

од каде го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

чие решение е $A=1, B=-1, C=0$. Според тоа,

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

6. Разложи ја рационалната функција $\frac{x^2}{x^4-1}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{x^2}{(x^2)^2-1}=\frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

од каде го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=1 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{cases}$$

чие решение е $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{2}$. Според тоа,

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2+1}.$$

7. Пресметаме интегралот $\int\frac{x^3-2x^2}{x+2}dx$.

Решение. Ако го искористиме разложувањето од задача 1 добиваме:

$$\int\frac{x^3-2x^2}{x+2}dx=\int(x^2-4x+8-\frac{16}{x+2})dx=\frac{x^3}{3}-2x^2+8x-16\ln|x+2|+C.$$

8. Пресметај го интегралот $\int\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}dx$.

Решение. Ако го искористиме разложувањето од задача 2 добиваме:

$$\int\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}dx=\int(\frac{-3}{x-1}+\frac{4}{x-2})dx=-3\int\frac{1}{x-1}dx+4\int\frac{4}{x-2}dx$$

$$=-3\ln|x-1|+4\ln|x-2|+C.$$

9. Пресметај го интегралот $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

Решение. Ако го искористиме разложувањето од задача 3 добиваме:

$$\int\frac{dx}{x(x+1)^2}=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2})dx=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C_1.$$

10. Пресметај го интегралот $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

Решение. Ако го искористиме разложувањето од задача 4 добиваме:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx = \int \frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2}\,dx = \int (\frac{x^3-x^2}{x^3-x^2} + \frac{x^2+1}{x^3-x^2})dx = \int (1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2})dx = x + \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx$$

$$= x + \int (-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1})dx = x - \ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C_1 .$$

11. Пресметај го интегралот $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

Решение. Ако го искористиме разложувањето од задача 5 добиваме:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})dx = \ln|x| - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left(\substack{x^2+1=t \\ 2xdx=dt}\right)$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \ln x - \frac{1}{2}\ln|t| + C_1$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C_1 = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1 .$$

12. Пресметај го интегралот $\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$.

Решение. Ако го искористиме разложувањето од задача 6 добиваме:

$$\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C_1 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002

41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007
42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E. , Rouseau, C.. Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković-Veljan, Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pavković-Veljan: Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
67. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
68. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
69. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
70. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
71. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
72. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
73. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
74. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
75. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
76. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
77. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
78. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
79. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
80. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
81. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
82. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
83. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје

84. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
85. Арсеновић, М.; Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
86. Арсланагиħ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
87. Арсланагиħ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје
88. Арсланагиħ, Ш., Муминагиħ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
89. Арсланагиħ, Ш., Муминагиħ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
90. Арсланагиħ, Ш., Муминагиħ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
91. Арсланагиħ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол нма триаголник, Сигма, Скопје
92. Арсланагиħ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
93. Арсланагиħ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
94. Арсланагиħ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
95. Арсланагиħ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиħ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
97. Арсланагиħ,Ш., Муминагиħ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
98. Баралиħ, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
108. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
109. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
110. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
111. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д. Полиномни равенки, Сигма, Скопје
113. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
114. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
115. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
116. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
117. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
118. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
121. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
122. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
123. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
124. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
125. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје

126. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
127. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
128. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
129. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015
130. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
131. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
132. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
134. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
135. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
136. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
137. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
138. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
153. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
154. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
155. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
157. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
158. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
159. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
160. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
161. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
162. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
167. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
168. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
169. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
170. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
171. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970

172. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
173. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
174. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
175. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
176. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
177. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
178. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
179. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје
180. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
181. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
182. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
183. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика$^+$, Софија, 1997
184. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
185. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
188. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
191. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
192. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
193. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
195. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
196. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
197. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
202. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
203. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
204. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001

210. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
211. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
212. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
213. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
214. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
215. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
216. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
217. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
218. Малчески, Р.. Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
219. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
220. Малчески, Р.: Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
221. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995
222. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
223. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
224. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
226. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
227. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
228. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
229. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
230. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
231. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
233. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
234. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
235. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
236. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
237. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
238. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
239. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
240. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
241. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
242. Малчески, Р.:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
248. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
249. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
252. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
253. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
254. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
255. Миличиħ, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013

256. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
257. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
258. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
259. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
260. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
261. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
262. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
263. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
264. Муминагић, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
265. Муминагић, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
266. Мушкаров, О., Грозед, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
267. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
268. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
269. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
270. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
271. Поја, Г.: Математическое открìитие, Москва 1976
272. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
273. Поповска – Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
274. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988
275. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
276. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
277. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
278. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
279. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
280. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
281. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
282. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
283. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
284. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
285. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
286. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
287. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
288. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
291. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
292. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
293. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
294. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
295. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
296. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
297. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
299. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
301. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
302. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011