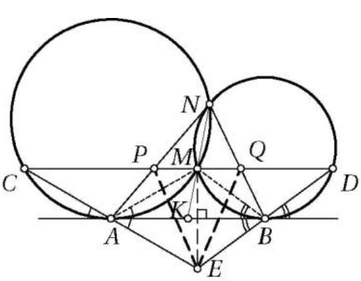
XLI олимпијада

1. Кружниците Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките M и N. Нека правата AB ги допира кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките A и B соодветно, така што точката M е поблиску до правата AB од точката N. Нека правата која минува низ точката M и е паралелна со правата AB по втор пат ги сече кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките C и D соодветно. Правите CA и DB се сечат во точката E, правите CA и DB се сечат во точката E, правите AN и CD во точката P, а правите BN и CD во точката Q. Докажи дека $\overline{EP}=\overline{EQ}$.

Решение. Нека правите MN и AB се сечат во точката K. Од степенот на точка во однос на кружница следува



$$\overline{KA}^2=\overline{KM}\cdot\overline{KN}=\overline{KB}^2,$$

т.е. K е средина на отсечката AB, па затоа и M е средина на отсечката PQ. Бидејќи

$$\measuredangle BAM=\measuredangle ACM=\measuredangle EAB$$

и слично $\measuredangle ABM=\measuredangle EBA$, добиваме дека точките E и M се симетрични во однос на правата AB, па затоа $EM\perp AB\,||\,PQ$. Според тоа, триаголниците EMP и EMQ се складни, па затоа $\overline{EP}=\overline{EQ}$.

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(a-1+\tfrac{1}{b})(b-1+\tfrac{1}{c})(c-1+\tfrac{1}{a})\leq 1.$$

Решение. Од $abc=1$ следува дека $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ за некои $x,y,z>0$. Даденото неравенство се сведува на неравенството

$$\frac{x-y+z}{y}\cdot\frac{y-z+x}{z}\cdot\frac{z-x+y}{x}\leq 1. \qquad (1)$$

Ги воведуваме ознаките $p=z-x+y,\ q=x-y+z,\ r=y-z+x$ и неравенството (1) го запишуваме во обликот

$$8pqr\leq(p+q)(q+r)(r+p). \qquad (2)$$

Меѓу броевите p,q,r најмногу еден е негативен. На пример, ако $p<0$, тогаш левата страна на (2) е негативна, а десната страна е позитивна. Ако $p,q,r\geq 0$, тогаш неравенството (2) се добива со множење на неравенствата

$$p+q\geq 2\sqrt{pq},\ q+r\geq 2\sqrt{qr} \text{ и } r+p\geq 2\sqrt{rp}.$$

3. Нека $n\geq 2$. На хоризонтална права се наоѓаат n болви но така што не се

сите во една точка. За позитивен број λ *потез* се дефинира на следниов начин: се избираат две болви кои се наоѓаат во произволни точки точки A и B при што точката A се наоѓа лево од точката B; болвата од точката A скока во точката C, која на дадената права се наоѓа десно од B така да важи $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \lambda$.

Определи ги сите вредности на λ така што за секоја точка M на дадената права и произволен почетен распоред на $n-$те болви постои конечна низа потези после која сите болви ќе се најдат десно од точката M.

Решение. Ќе докажеме дека за $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$ сите болви може да отидат произволно далеку во десно. Со d и δ да го означиме најголемото и најмалото растојание меѓу две болви во дадениот момент, соодветно. Јасно, $d \geq (n-1)\delta$. Ако крајната лева болва ја прескокне крајната десна, тогаш најмалото растојание меѓу две болви нема да се намали бидејќи $\lambda d \geq \delta$, а притоа позицијата на крајната десна болва се поместила во десно за најмалку δ. Со низа на вакви скокови на болвите се постигнува целта.

Сега нека $\lambda < \frac{1}{n-1}$. На секоја болва нека и ја придружиме координатата на нејзината положба на реалната права. Со w_k и s_k да ги означиме координатата на крајната десна болва и збирот на координатите на сите болви по k скокови, соодветно. Ако во $(k+1)-$от скок болвата од точка a прескокне преку болвата во точка b во точка c, тогаш

$$s_{k+1} - s_k = c - a = \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geq \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k).$$

Ако за $k = 0,1,2,...,i-1$ ги собереме овие неравенства добиваме

$$nw_i \geq s_i \geq s_0 + \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(w_i - w_0), \text{ т.е. } (\tfrac{1+\lambda}{\lambda} - n)w_i \leq \tfrac{1+\lambda}{\lambda} w_0 - s_0,$$

што покажува дека низата w_i е ограничена бидејќи $\frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Според тоа, во овој случај сите болви не може да стасаат произволно далеку.

4. Маѓионичар има 100 карти нумерирани со броевите од 1 до 100. Тој ги става сите карти во три кутии – црвена, бела и сина, така што секоја кутија содржи барем една карта. Гледач од публиката прво избира две кутии, а потоа избира по една карта од секоја од избраните кутии и го соопштува збирот на броевите на избраните карти. Знаејќи го тој збир маѓионичарот ја определува кутијата од која не е избрана карта.

   На колку начини маѓионичарот може да ги распореди картите во кутиите така што овој трик секогаш биде успешен? (Два распореди се различни ако барем една карта не е двата пати ставена во иста кутија.)

   Решение. Нека a,b,c и d се карти такви што a,b,c се во различни кутии и $c+d = a+b$. Тогаш картите c и d мора да се во иста кутија, бидејќи во спротивно ако гледачот го соопшти збирот $a+b$ маѓионичарот нема да може да даде сигурен одговор.

Нека претпоставиме дека за некој i картите $i, i+1, i+2$ се во различни кутии. Бидејќи $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, заклучуваме дека картите i и $i+3$ се во иста кутија. Слично, $i-1$ е во иста кутија како $i+2$ (ако $i>1$). Со едноставна индукција се докажува дека картите 1, 4, 7, ..., 100 се во една кутија, картите 2, 5, ..., 98 во друга и картите 3, 6, ..., 99 во трета кутија. Така во овој случај имаме 6 можни распореди.

Да претпоставиме дека не постојат три последователно нумерирани карти кои не се во различни кутии. Нека картата 1 е во кутијата A и нека b и c се картите со најмали броеви кои се во кутиите B и C, соодветно, при што на пример $b<c$. Картата $b-1$ е во кутијата A, па по претпоставка $b+1$ не е во C, што значи $c>b+1$. Ако сега $c<100$, тогаш од $b+c=(b-1)+(c+1)$ следува дека $c+1$ е во A, но тогаш од $b+(c+1)=(b+1)+c$ следува дека $b+1$ е во C, што е противречност. Според тоа, $c=100$, и тоа е единствената карта во C. Понатаму, од $99+b=100+(b-1)$ следува дека 99 е во B. Сега, кутијата A не може да содржи ниту една од картите k за $2 \le k \le 99$, бидејќи во спротивно од $99+k=100+(k-1)$ ќе следува дека $k-1$ е во C, што не е можно. Според тоа, во A е само картата 1, а картите 2, 3, ..., 99 се во B. И во овој случај имаме 6 можни распореди, па затоа вкупнот број распореди е 12.

5. Дали постои природен број n кој е делив со точно 2000 различни прости броеви, таков што бројот 2^n+1 е делив со n?

Решение. Со индукција по k ќе докажеме дека за секој $k \in \mathbb{N}$ постои $n_k \in \mathbb{N}$ кој има точно k различни прости делители и важи $n_k \mid 2^{n_k}+1$ и $3 \mid n_k$.

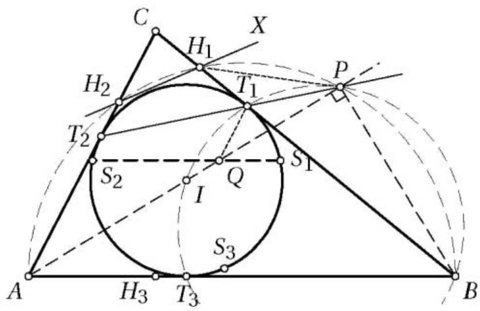
За $k=1$ бројот $n_1=3$ го задоволува условот. Нека претпоставиме дека $k \ge 1$ и $n_k=3^a m$, каде $3 \nmid m$, па m има $k-1$ прости делители. Тогаш бројот $3n_k=3^{a+1}m$ има точно k прости делители и

$$2^{3n_k}+1=(2^{n_k}+1)(2^{2n_k}-2^{n_k}+1)$$

е делив со $3n_k$, бидејќи $3 \mid 2^{2n_k}-2^{n_k}+1$. Ќе земеме прост број p кој не е делител на n_k и нека $n_{k+1}=3pn_k$. Доволно е да се земе p така што $p \mid 2^{3n_k}+1$ и $p \nmid 2^{n_k}+1$.

Последното е можно, бидејќи за секој природен број $a>2$ постои прост број p кој е делител на $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$, но не е делител на $a+1$. Навистина, од $a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3$ следува дека $\mathrm{NZD}(a+1,a^2-a+1)\,|\,3$ и $3^2 \nmid a^2-a+1$, па за p може да се земе било кој прост делител на бројот a^2-a+1 поголем од 3.

6. Нека AH_1, BH_2, CH_3 се висините на остроаголниот триаголник ABC. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките T_1, T_2, T_3, соодветно. Нека правите l_1, l_2, l_3 се симетрични на правите H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 во однос на правите T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, соодветно. Докажи дека правите l_1, l_2, l_3 определуваат триаголник чии темиња лежат на впишаната кружница на триаголникот ABC.



Решение. За аглите на триаголникот ABC ќе ги користиме стандардните ознаки α, β, γ. Нека I е центарот на вписаната кружница на триаголникот ABC и нека точките S_1, S_2, S_3 се симетрични на точките T_1, T_2, T_3 во однос на правите AI, BI, CI, соодветно. Ќе докажеме дека бараниот триаголник е триаголникот $S_1S_2S_3$. Нека правата AI ја сече правата T_1T_2 во точката P. Бидејќи $\measuredangle BIP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle BT_1P$, четириаголникот BIT_1P е тетивен, па затоа важи $\measuredangle APB = \measuredangle IT_1B = 90^\circ$. Оттука следува дека точките A, B, P, H_1 лежат на една кружница, па затоа

$$\measuredangle APH_1 = \measuredangle ABH_1 = \beta = 2\measuredangle IBT_1 = 2\measuredangle APT_1,$$

што значи дека правите H_1P и AP се симетрични во однос на правата T_1T_2. Според тоа, точката $Q \in l_3$ симетрична на точката H_1 во однос на T_1T_2 лежи на правата AP.

Сега,

$$\measuredangle T_1QS_1 = 2\measuredangle T_1QP = 2\measuredangle T_1H_1P = 2\measuredangle BAP = \alpha = \measuredangle CH_1H_2 = \measuredangle T_1H_1X$$

за произволна точка X на правата H_1H_2 (важи $H_2 - H_1 - X$), од каде заклучуваме дека правата QS_1 е симетрична на правата H_1H_2 во однос на T_1T_2, т.е. $S_1 \in l_3$. Аналогно важи $S_2 \in l_3$, $S_1, S_3 \in l_2$ и $S_2, S_3 \in l_1$.