

БМО 1986

1. Права, која минува низа центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$, ја сече опишаната кружница во точките F и G и впишаната кружница во точките D и E , при што D е меѓу I и F . Докажи, дека $\overline{DF} \cdot \overline{EG} \geq r^2$, каде r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Ќе докажеме дека степенот на центарот I на впишаната кружница во однос на опишаната кружница е еднаков на $2Rr$. Ако L е средината на лакот AB (види цртеж), тогаш од

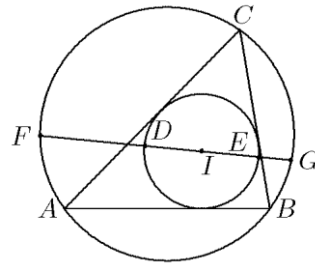
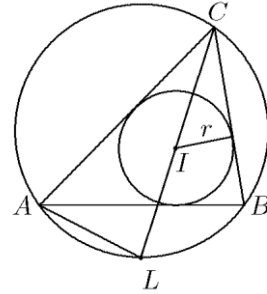
$$\angle LIA = \angle LAI = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

следува $\overline{LI} = \overline{LA}$. Од синусната теорема за $\triangle ACL$ следува дека $\overline{LI} = \overline{LA} = 2R \sin \frac{\gamma}{2}$ и ако искористиме дека $\overline{CI} = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$, добиваме $\overline{CI} \cdot \overline{LI} = 2Rr$. Оттука сле-

дува дека $\overline{FI} \cdot \overline{GI} = 2Rr$. Пресметуваме

$$\begin{aligned} \overline{FD} \cdot \overline{EG} &= (\overline{FI} - r)(\overline{GI} - r) \\ &= \overline{FI} \cdot \overline{GI} - r(\overline{FI} + \overline{GI}) + r^2 \\ &= 2Rr - r\overline{FG} + r^2. \end{aligned}$$

Неравенството $\overline{FD} \cdot \overline{EG} \geq r^2$ е еквивалентно со неравенството $2R \geq \overline{FG}$, кое очигледно важи. Знак за равенство важи ако и само ако FG е дијаметар.



2. Нека $ABCD$ е тетраедар и E, F, G, H, K, L се точки соодветно на рабовите AB, BC, CA, DA, DB, DC . Докажи, дека ако

$$\overline{AE} \cdot \overline{BE} = \overline{BF} \cdot \overline{CF} = \overline{CG} \cdot \overline{AG} = \overline{DH} \cdot \overline{AH} = \overline{DK} \cdot \overline{BK} = \overline{DL} \cdot \overline{CL},$$

тогаш точките E, F, G, H, K, L лежат на една свера.

Решение. Нека $p = \overline{AE} \cdot \overline{BE} = \overline{BF} \cdot \overline{CF} = \overline{CG} \cdot \overline{AG} = \overline{DH} \cdot \overline{AH} = \overline{DK} \cdot \overline{BK} = \overline{DL} \cdot \overline{CL}$ и со Q да го означиме центарот на опишаната свера околу тетраедарот. Пресекот на рамнината определена со точките O, A и B со опишаната свера е кружница. Во оваа кружница степенот на точката E е еднаков на

$$R^2 - \overline{OE}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{BE} = p,$$

па затоа $\overline{OE} = \sqrt{R^2 - p}$. Аналогно

$$\overline{OF} = \overline{OG} = \overline{OH} = \overline{OK} = \overline{OL} = \sqrt{R^2 - p},$$

т.е. шесте точки лежат на свeрата со центар во точката O и радиус $\sqrt{R^2 - p}$.

3. Низата $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ е определена со равенствата

$$a_1 = a, a_2 = b \text{ и } a_{n+1} = \frac{a_n^2 + c}{a_{n-1}}, \text{ за } n \geq 2,$$

каде a, b, c се реални броеви, $ab \neq 0$ и $c > 0$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви ако и само ако a, b и $\frac{a^2 + b^2 + c}{ab}$ се цели броеви.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = c = a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2, n \geq 2$$

т.е.

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = \text{const} = t,$$

па затоа $a_{n+1} = ta_n - a_{n-1}$. Од друга страна

$$t = \frac{a_1 + a_3}{a_2} = \frac{a_1 + \frac{a_2^2 + c}{a_1}}{a_2} = \frac{a^2 + b^2 + c}{ab}.$$

Ако a, b и t се цели броеви, тогаш по индукција ќе следува дека $a_{n+1} = ta_n - a_{n-1}$ исто така е цел број.

Обратно, нека претпоставиме дека a_n е цел број за секој $n = 1, 2, \dots$. Тогаш

$a_1 = a$ и $a_2 = b$ се цели броеви и $t = \frac{a_1 + a_3}{a_2}$ е рационален број. Нека прет-

поставиме дека t не е цел број. Тогаш $t = \frac{p}{q}$, каде p и $q > 1$ се заемно прости

броеви. Од $pa_2 = q(a_1 + a_3)$ следува дека $q \mid a_2$. Понатаму, од

$$pa_n = q(a_{n-1} + a_{n+1})$$

по индукција следува дека $q \mid a_n$ за секој $n \geq 2$. Одново од

$$pa_n = q(a_{n-1} + a_{n+1})$$

следува дека за $n \geq l+1$ важи дека $q^l \mid a_n$. Сега, од $c = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ следува

дека $q^{2l} \mid c$ за секој природен број l , што не е можно. Според тоа $q = 1$ и t е цел број.

4. Триаголникот ABC е таков што во рамнината постои точка P таква, што триаголниците PAB, PBC и PCA имаат еднакви периметри и еднакви плоштини. Докажи, дека

1) Ако P е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е рамностран.

2) Ако P не е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е правоаголен.

Решение. Плоштината на $\triangle ABC$ да ја означиме со S .

а) Бидејќи P е внатрешна точка, од условот следува дека $P_{PAB} = \frac{S}{3}$. Според тоа, должината на висината повлечена од P во $\triangle PAB$ е еднаква на $\frac{1}{3}$ од должината на висината повлечена од C во $\triangle ABC$. Тоа значи дека P лежи на права која минува низ тежиштето G на $\triangle ABC$, која е паралелна на AB . Аналогно P припаѓа на права низ G која е паралелна со BC и затоа P се совпаѓа со G . Сега, од условот следува

$$a + \frac{2}{3}(m_b + m_c) = b + \frac{2}{3}(m_a + m_c) = c + \frac{2}{3}(m_b + m_a).$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \geq b \geq c$. Бидејќи

$$4m_a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2,$$

$$4m_b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3b^2,$$

$$4m_c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3c^2,$$

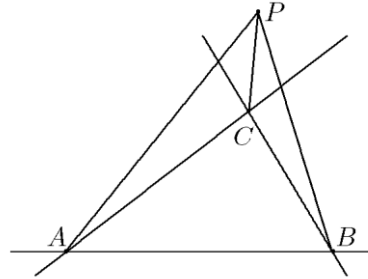
добиваме дека $m_a \leq m_b \leq m_c$. Оттука следува

$$a + \frac{2}{3}(m_b + m_c) \geq b + \frac{2}{3}(m_a + m_c) \geq c + \frac{2}{3}(m_b + m_a),$$

при што равенства се можни само ако $a = b = c$, т.е. $\triangle ABC$ е рамностран.

б) Нека претпоставиме дека точката P лежи во некој од трите надворешни агли при темињата A, B и C (цртеж десно). Тогаш $\triangle PBC$ се содржи во $\triangle PAB$, што значи дека нивните плоштини не може да се еднакви.

Без ограничување на општоста можеме точката P да ја избереме како на цртежот долу лево. Ако



$$P_{PAB} = P_{PAC} = P_{PBC} = t,$$

тогаш

$$S = P_{PAC} + P_{PBC} - P_{PAB} = t,$$

па затоа $S = P_{PAC} = P_{PBC}$. Оттука добиваме дека висината во $\triangle ACP$ повлечена од темето P е еднаква на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето B , т.е. BP е паралелна на AC . Аналогно $PA \parallel BC$, т.е. $PBCA$ е паралелограм. Сега од еднаквоста на периметрите на $\triangle PAB$ и $\triangle PCB$ добиваме

$$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BP},$$

од каде следува $\overline{PC} = \overline{AB}$, т.е. $PBCA$ е правоаголник, т.е. $\angle ACB = 90^\circ$.

