XXVIII олимпијада

1. Нека $S_n = \{1, 2, ..., n\}$. Со $P_n(k)$ го означуваме бројот на пермутации на множеството S_n кои имаат точно k фиксни точки $(k \geq 0, n \geq 1)$. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$$

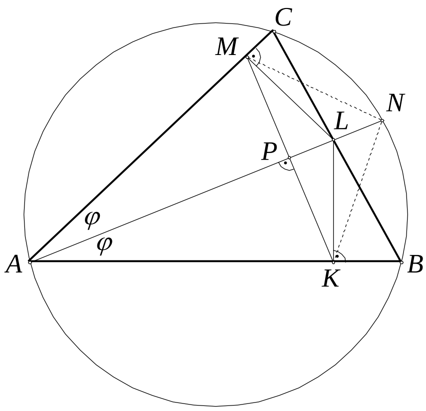
Забелешка. j е фиксна точка за пермутацијата f ако $f(j) = j$.

Решение. Јасно, $P_n(k) = \binom{n}{k} P_{n-k}(0)$, за $0 \leq k \leq n$, при што ставаме $P_o(0) = 1$. Тогаш,

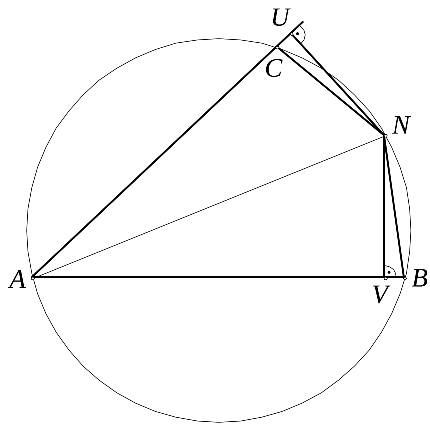
$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} P_{n-k}(0) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} P_{n-k}(0) \\ &= n\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} P_{(n-1)-(k-1)}(0) \\ &= n\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = n(n-1)! = n!.\end{aligned}$$

2. Низ темето A на остроаголниот $\triangle ABC$ повлечена е симетрала на аголот, која ја сече страната BC во точка L, а кружницата опишана околу триаголникот ABC во точки A и N. Од L на AB и на AC спуштени се нормали LK и LM, соодветно, при што $K \in AB$, $M \in AC$. Докажи дека плоштината на четириаголникот $AKNM$ е еднаква на плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека точките се означени како на црт. 28.1: $LM \perp AC$, $LK \perp AB$; $\triangle ALM \cong \triangle ALK$ па според тоа $\overline{ML} = \overline{LK}$.



Црт. 28.1.



Црт. 28.2.

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AKN} + P_{\triangle ALC} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{LK} + \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{LM} = \tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})\cdot\overline{LK}$$

$$P_{AKNM} = P_{\triangle AKN} + P_{\triangle ANM} = \tfrac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{KP} + \tfrac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{MP} = \overline{AN}\cdot\overline{KP}$$

$$= \overline{AN}\cdot\overline{AK}\sin\phi = \overline{AN}\cdot\overline{AL}\sin\phi\cos\phi = \overline{AN}\cdot\overline{LK}\cos\phi.$$

Значи,

$$P_{\triangle ABC} = P_{AKNM} \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}) = \overline{AN}\cos\phi.$$

Ова е точно бидејќи $\triangle NVB \cong \triangle NUC$, (црт. 28.2), па според тоа

$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}) = \tfrac{1}{2}(\overline{AV}+\overline{VB}+\overline{AU}-\overline{UC}) = \overline{AV} = \overline{AN}\cos\phi .$$

3. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Докажи дека за секој природен број $k \geq 2$ постојат цели броеви $a_1, a_2, ..., a_n$, не сите еднакви на нула такви што $|a_i| \leq k-1$ за $i = 1, 2, ..., n$ и

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Решение. Доволно е да го разгледаме случајот кога сите $x_i \geq 0$ (бидејќи ако најдеме такви a_i кои ги задоволуваат условите за $(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$, ќе добиеме соодветни за $(x_1, x_2, ..., x_n)$ со промена на знакот на a_i за негативните x_i).

Од неравенството меѓу аритметичката и квадратна средина следува

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \leq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{n} .$$

Значи, сите броеви од облик $a_1x_1 + ... + a_nx_n$ за $a_1, ..., a_n \in \{1, 2, .., k-1\}$, припаѓаат на интервалот $[0, (k-1)\sqrt{n}]$. Овој интервал го делиме на $k^n - 1$ интервали со еднакви должини. Според принципот на Дирихле, бидејќи броеви од погорниот облик има k^n, два од добиените броеви за различни $n-$торки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ мора да се наоѓаат во ист интервал. Нека тоа се броевите $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ и $b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n$. Тогаш,

$$|(b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n) - (a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n)| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

па решението го добиваме за $a'_1 = a_1 - b_1, ..., a'_n = b_n - a_n$.

4. Докажи дека не постои функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ таква што

$$f(f(n)) = n + 1987 \text{, за секој } n \in \mathbb{N}_0 .$$

Решение. Ако постои таква функција f, тогаш

$$f(f(f(n))) = f(n) + 1987 = f(n + 1987),$$

од што со индукција добиваме $f(n+1987t)=f(n)+1987t$, за $t=0,1,2,...$

Ќе докажеме дека таква функција не постои. Во доказот ќе ја искористиме непарноста на бројот 1987.

Дефинираме функција $g:\{0,1,...,1986\}\to\{0,1,...,1986\}$ со

$$g(k)\equiv f(k)\,(\mathrm{mod}1987),$$

т.е. $g(k)$ е остатокот од делењето на $f(k)$ со 1987. Тогаш $g(g(k))=k$ за $k=0,1,\ldots,1986.$ Навистина од

$f(k)=g(k)+s\cdot 1987$,

$f(f(k))=f(g(k)+s\cdot 1987)=f(g(k))+s\cdot 1987=g(g(k))+(s+t)\cdot 1987$;

$f(f(k))=k+1987$,

следува $g(g(k))=k$. Според тоа,

$$g(g(g(k)))=g(k),$$

па затоа постои $k_0\in\mathbb{N}_0$ таков што $g(k_0)=k_0$. Но, тоа значи дека

$$f(k_0)=g(k_0)+s\cdot 1987$$

за некој $s\in\mathbb{N}$, па затоа

$$k_0+1987=f(f(k_0))=f(k_0+1987s)=f(k_0)+s\cdot 1987=k_0+1987s+1987s,$$

од што следува $2s=1$ што е противречност, од што следува точноста на тврдењето.

5. Докажи дека за секој природен број $n\geq 3$ во рамнината постојат n точки такви што

(a) растојанието меѓу било кои две од нив е ирационален број,

(b) секои три точки определуваат недегенериран триаголник (т.е. се неколинеарни) и тој триаголник има рационална плоштина.

Решение. Произволно избираме n точки во јазлите на целобројна решетка, такви што било кои три од нив не се колинеарни, кои ги означуваме со $T_i=(x_i,y_i)$, $i=1,2,3,...,n$. Тогаш, сите плоштини на триаголниците $T_iT_jT_k$ се рационални броеви. Навистина, секоја од нив е разлика на плоштина на правоаголник и плоштини на правоаголни триаголници чии должини на катети се природни броеви.

Нека $S=\{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\,|\,i\neq j;\,i,j=1,2,...,n\}$. Избираме прост број $p>\max S$. Земаме хомотетија со центар во еден од јазлите на решетката и коефициент $k=\sqrt{p}$, и го пресликуваме множеството од избраните точки. Плоштините на новодобиените триаголници се рационални, бидејќи старите плоштини се зголемуваат p пати, а должини на страните се ирационални броеви. Имено, должините на страните се од облик $\sqrt{ps}$, за некој $s \in S$ и ps не е полн квадрат, бидејќи е делив со p , а не е делив со p^2 .

Јасно, сликите при разгледуваната хомотетија на вака избраните n точки ги задоволуваат условите на задачата.

6. Даден е природен број $p, p \geq 2$. Докажи дека ако бројот $k^2 + k + p$ е прост за секој $k \in \mathbb{N}$ таков што $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{p}{3}}$, тогаш $k^2 + k + p$ е прост за секој $k \in \mathbb{N}$ таков што $0 \leq k \leq p-2$.

Решение. Нека $f(x) = x^2 + x + p$, y е најмалиот природен број таков што $y \leq p-2$ и $f(y)$ не е прост и q е најмалиот прост делител на $f(y)$. Ќе докажеме дека $q > 2y$.

Да го претпоставиме спротивното. Од

$$f(y) - f(x) = (y-x)(y+x+1) ,$$

следува дека кога x се менува од 0 до $y-1$, $y-x$ се менува од 1 до y , а $y+x+1$ се менува од $y+1$ до $2y$. Ако $q \leq 2y$ тогаш ќе постои x , $0 \leq x \leq y-1$, таков што $q | f(y) - f(x)$. Меѓутоа $f(x)$ е прост број и $q | f(y)$, па затоа $f(x) = q$. Сега од

$$y - x \leq p-2 \leq p + x + x^2 = f(x) = q \text{ и}$$

$$y + x + 1 \leq p + x - 1 < p + x + x^2 = f(x) = q$$

следува дека $f(x) = q \nmid (y-x)(y+x+1)$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $q > 2y$.

Бројот q е најмал прост делител на $f(y)$ па затоа $q \leq \sqrt{f(y)}$, т.е. $f(y) \geq q^2$. Затоа

$$y^2 + y + p \geq (2y+1)^2 = 4y^2 + 4y + 1 ,$$

односно $y < \sqrt{\frac{p}{3}}$, што противречни на претпоставката. Затоа $x^2 + x + p$ е прост број за секој цел број k таков што $0 \leq k \leq p-2$.