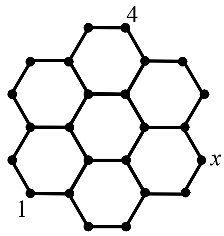
III и IV ГОДИНА

<u>Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени</u>



1. На цртежот, на местото на секоја точка треба да се стави број, така што збирот на броевите на краевите на секоја отсечка (која е нацртана) да е ист. Два броја се веќе запишани. Која е вредноста на бројот x?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) нема дов. информации

Решение. Во краевите на крајните отсечки од фигурата, од точката со број 1 до точката со број x гледајќи обратно од стрелките на часовникот, нека се запишани броевите a,b,c,d,e,f,u,v,w,y.

Тогаш од условот на задачата

$$1+a=a+b=b+c=c+d=d+e=e+f=f+4=4+u=u+v=v+w=w+y=y+x.$$

Од овие равенки непосредно се добива

$$a=c=e=4=v=y$$
$$1=b=d=f=u=w=x.$$

Значи, бараниот број е $x=1$.

2. Тројца возачи, Михаел, Фернандо и Себастијан, учествувале во трка на Формула 1. Веднаш по стартот, Михаел бил прв, Фернандо втор, а Себастијан трет. За време на трката Михаел и Френандо се претекнале меѓусебно 9 пати, Фернандо и Себастијан 10 пати, а Михаел и Себастијан 11 пати.

Во кој редослед тројцата возачи стигнале на целта?

(A) Михаел, Фернандо, Себастијан

(B) Фернандо, Себастијан, Михаел

(C) Себастијан, Михаел, Фернандо

(D) Себастијан, Фернандо, Михаел

(E) Фернандо, Михаел, Себастијан

Решение. Ако двајца спортисти парен број пати си ги променат местата во текот на трката, тогаш во финишот на трката ќе влезат во редослед еден по друг како и после стартот на трката.

Значи, Фернандо и Себастијан во финишот ќе влезат Фернандо пред Себастијан.

Ако двајца спортисти непарен број пати си ги променат местата во текот на трката, тогаш во финишот ќе стасаат во обратен редослед одошто на почетокот на трката, т.е. после стартот.

Според тоа, Себастијан во финишот ќе стаса пред Михаел, и исто така Фернандо на финишот ќе стаса пред Михаел.

Значи тие на целта ќе стасаат во следниот редослед:

Фернандо, Себастијан, Михаел

3. Ако $2^x=15$, $15^y=32$ тогаш xy е еднаков на:

(A) 5 (B) $\log_2 15+\log_{15} 32$ (C) $\log_2 47$ (D) 7 (E) $\sqrt{47}$

Решение. Од особините на логаритми $\log_2 2^x = \log_2 15$, т.е. $x = \log_2 15$. Исто

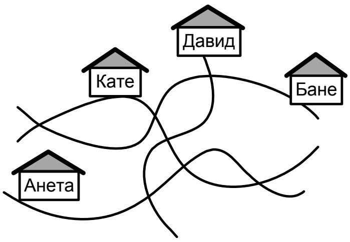
$$\log_{15} 15^y = \log_{15} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 15} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 15} = \frac{5}{\log_2 15}, \text{ т.е. } y = \frac{5}{\log_2 15}.$$

Сега

$$xy = (\log_2 15)\frac{5}{\log_2 15} = 5.$$

4. Симона, која не била добар цртач, сакала да направи мапа на своето село. Таа успеала да нацрта четири улици, нивните раскрсници и куќите на своите пријатели. Но улиците Леринска, Воденска и Солунска се прави. Четвртата улица е Прилепска.

Кој живее на улицата Прилепска?



(A) Анета (B) Бране (C) Кате (D) Давид

(E) од скицата на Симона не може да се дознае

Решение. Улицата на која живее Кате не може да е права. Нека таа е права. Бидејќи таа има пет раскрсници со три улици кои се прави, со барем една од нив ќе има две раскрсници, односно две заеднички точки, што не е можно (улицата на Кате и таквата улица би се поклопиле, не би биле различни прави улици).

Значи, Кате живее на улицата Прилепска.

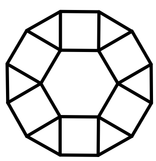
5. Сите четирицифрени броеви со збир на цифрите 4 се запишани во опаѓачки редослед. На кое место по ред се наоѓа бројот 2011?

(A) $6-$то (B) $7-$мо (C) $8-$мо (D) $9-$то (E) $10-$то

Решение. Четирицифрени броеви кои имаат збир на цифри 4 се

$4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002, ,1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1021, 1012$

Во исто време тие се запишани во опаѓачки редослед. Бројот 2011 се наоѓа на деветото место.



6. На цртежот е прикажана фигура која се состои од правилен шестаголник со страна 1, шест триаголници и шест квадрати. Колку е периметарот на фигурата?

(A) $6(1+\sqrt{2})$ (B) $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) 12 (D) $6+3\sqrt{2}$ (E) 9

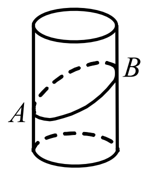
Решение. Од претпоставките на задачата страната на квадратот е еднаква на 1. Според тоа, должините на две страни на секој од шесте триаголници е 1. Аголот меѓу нив е

$$\alpha = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 60^\circ.$$

Значи, секој триаголник е рамностран.

Сега, периметарот на дадената фигура е

$$L = 12 \cdot 1 = 12.$$



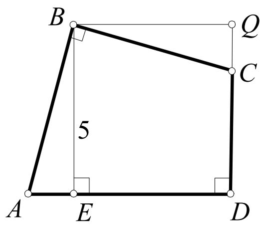
7. Правоаголно парче хартија е завиткано околу цилиндер. Потоа цилиндерот заедно со хартијата се пресечени по рамнина која минува низ точките A и B. Долното парче хартија потоа е одвиткано. Кој цртеж го прикажува долното пресечено парче хартија?

(A) (B) (C) (D) (E)

Решение. Пресеченото парче не може да има шпиц и не може да е дел од круг. Според тоа, одговор е под (C).

8. Колкава е плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако се знае дека:

$\overline{AB} = \overline{BC}, \angle ABC = \angle ADC = 90^0, BE \perp AD, \overline{BE} = 5$.



(A) 20 (B) 22,5 (C) 25 (D) 27,5 (E) 30

Решение. Бидејќи $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 90^\circ$ четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Значи, AC е дијаметар на таа кружница, а од тоа што $\overline{AB} = \overline{BC}$ имаме

$\measuredangle BAC = \measuredangle BCA = 45^\circ$.

Од равенството $\measuredangle BDA = \measuredangle BCA = 45^\circ$ (како агли над ист кружен лак)триаголникот BDE е рамнокрак правоаголен со катети $\overline{BE} = \overline{BD} = 5$.

На полуправата DC ќе избереме точка Q така што $\overline{BE} = \overline{DQ} = 5$. Сега $BEDQ$ е квадрат со страна 5. Но триаголниците AEB и CQB се складни, па според тоа

$P_{ABCD} = P_{BEDS} = 25$.

9. Андреј ги запишал сите непарни броеви од 1 до 2011, а Бранко од нив ги избришал сите содржатели на бројот 3. Колку броеви останале неизбришани?

(A) 335 (B) 336 (C) 671 (D) 1005 (E) 1006

Решение. На таблата се запишани 1006 броеви. Броеви деливи со 3 имаме

$1005 : 3 = 335$.

Според тоа, на таблата ќе останат запишани

$1006 - 3356 = 671$.

10. Марко и Кристијан фрлале коцка за да одлучат кој прв да скока во ладното езеро. Ако не паднат шестки прв скока Марко, ако падне само една шестка прв скока Кристијан и ако паднат две или повеќе шестки тогаш тој ден нема да пливаат. Колку пати тие треба да ја фрлаат коцката последователно за да имаат подеднакво шанси за скокање прв?

(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) 17

Решение. Веројатноста во едно фрлање да не падне шестка е $\frac{5}{6}$, а веројатноста да падне шестка е $\frac{1}{6}$. Сега веројатноста во последователни n фрлања да не падне шестка е $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, а веројатноста во n фрлања да падне точно една шестка е $n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$. Според тоа, тие ќе имаат подеднакви шанси за скокање прв ако и само ако

$n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Од последната равенка добиваме $n=5$.

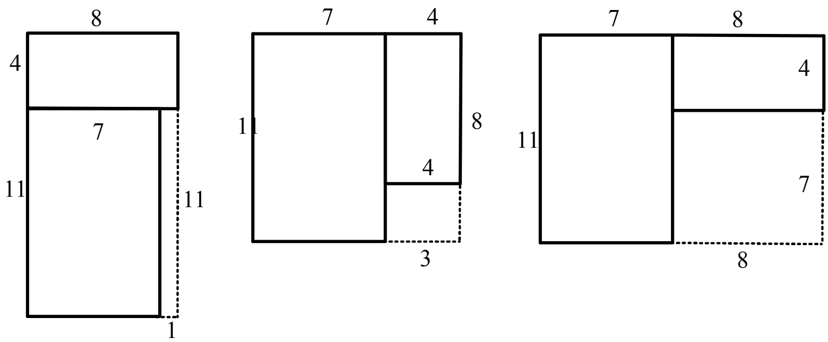
Значи, тие имаат подеднакви шанси за скокање прв, ако и само ако фрлаат пет пати.

Секоја од задачите со реден број од 11 до 20 се вреднува со 4 поени

11. Со комбинација на три правоаголници, без преклопување и нивно свиткување е формиран нов правоаголник.. Едниот од трите правоаголници има димензии 7 и 11, вториот 4 и 8. Третиот правоаголник е избран така што тој да има најголема плоштина. Кои се неговите димензии?

(A) 1 со 11 (B) 3 со 4 (C) 3 со 8 (D) 7 со 8 (E) 7 со 11

Решение. Од сите можни распореди на двата правоаголници, само во три случаи може да се избере трет правоаголник, така што тие да формираат нов правоаголник. Очигледно е



дека бараниот трет правоаголник ќе има димензии 8 и 7 (види цртеж).

12. Мики треба да запише природни броеви во табелата 3×3, при што збирот на броевите во секоја 2×2 ќелија е 10. Четири броеви се веќе запишани како на цртежот. Колку е збирот на преостанатите пет броеви кои треба да се запишат?

(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13

(E) ниту еден од претходните одговори

Решение. Нека x,y,z,u,v се броевите кои Мики треба да ги запише (види цртеж). Тогаш, од условот на задачата

$$\begin{cases} 1+2+x+v=10 \\ 2+3+y+v=10 \\ 3+4+z+v=10 \\ 1+4+u+v=10 \end{cases}$$

x	2	y
1	v	3
u	4	z

Ако сега ги собереме равенките, добиваме

$$2(1+2+3+4)+(x+y+z+u+v)+3v=40$$

$$x+y+z+u+v=20-3v$$

Но равенките $20-3v=9$, $20-3v=10$, $20-3v=12$, $20-3v=13$ немаат решение во множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$. Според тоа, Мики не може да запише броеви за кои е исполнет условот од задачата. Точен е одговорот под (E).

13. 48 деца заминале на скијање. Шест од нив имале по точно еден роднина меѓу децата, девет деца имале точно по двајца роднини, а четири по точно тројца родини.

Останатите деца немале роднини меѓу овие 48 деца. Колку фамилии имале деца на ова патување?

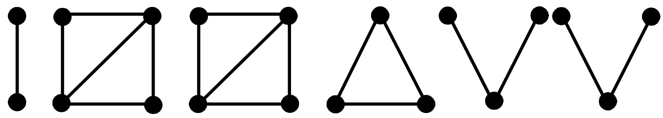
(A) 19 (B) 25 (C) 31 (D) 36 (E) 48

Решение. Ако секоја точка претставува ученик а секоја отсечка роднинска врска, единствен начин за поврзување по роднинска врска според условите од задачата е даден на цртежот кој следува.

Според тоа, на ова патување имало деца од

$$(48-18)+6=36$$

фамилии.

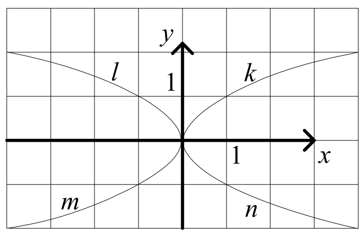


14. Колку од графиците $y=x^2$, $y=-x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=-\sqrt{-x}$, $y=\sqrt{|x|}$, $y=-\sqrt{|x|}$ се прикажани на цртежот?

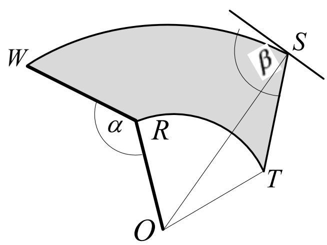
(A) ниеден (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) сите 8

Решение. На цртежот се прикажани две параболи. При тоа на истите се означени нивни делови k,l,m,n (види цртеж). Сега, на цртежот се прикажани графиците на

$y=\sqrt{x}$	со	k
$y=-\sqrt{x}$	со	n
$y=-\sqrt{-x}$	со	m
$y=\sqrt{-x}$	со	l
$y=\sqrt{\lvert x\rvert}$	со	l и k
$y=-\sqrt{\lvert x\rvert}$	со	m и n



Значи, на цртежот се прикажани шест графици.



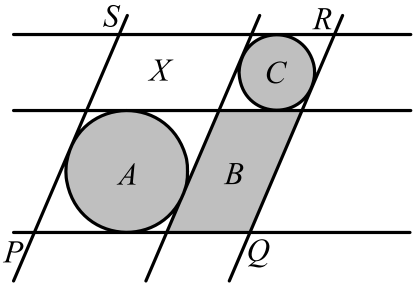
15. Бришачот за предно стакло на автомобил е така конструиран да самиот бришач и држачот на бришачот имаат еднаква должина, а се поврзани меѓу себе под фиксен агол α. Затемнетата површина на цртежот е максималната која бришачот ја чисти. Одреди го аголот β кој го зафаќа бришачот во својата крајна десна положба и тангентата на горната крива која ја опишува бришачот додека чисти.

(A) $\frac{3\pi-\alpha}{2}$ (B) $\pi-\frac{\alpha}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ (D) $\pi+\alpha$ (E) $\pi+\frac{\alpha}{2}$

Решение. Крајните точки на бришачот и држачот во крајната положба ќе ги означиме со S и T соодветно, како на цртежот. Но тогаш OTS е рамнокрак триаголник со основа OS и агол α. Аглите при основата OS на триаголникот се $\frac{\pi-\alpha}{2}$. Бидејќи OS е нормална на тангентата, бараниот агол е

$$\beta=\frac{\pi}{2}+\measuredangle OST=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi-\alpha}{2}=\pi-\frac{\alpha}{2}.$$

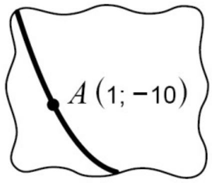
16. На цртежот се повлечени три хоризонтални и три паралелни прави кои ги сечат хоризонталните. Двете кружници имаат по 4 тангенти. Плоштините на круговите се A и C, плоштината на обоениот паралелограм е B, а плоштината на паралелограмот $PQRS$ е D. Кој е најмалиот број на плоштини од означените A, B, C и D, кои треба да ги знаеме за да можеме да ја пресметаме плоштината X на паралелограмот?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(E) плоштината X не може да се пресмета

Решение. Не е тешко да се провери дека доволно е да се знае плоштината на една од површините, на пример B. Доказот изведи го сам.



17. Во Декартов правоаголен координатен систем, на параболата $y = ax^2 + bx + c$ е означена точка $A(1,-10)$. Потоа координатните оски и скоро целата парабола се избришани, како што е прикажано на цртежот. Кое од наведените тврдења е неточно?

(A) $a > 0$ (B) $b < 0$ (C) $a + b + c < 0$ (D) $b^2 > 4ac$ (E) $c < 0$

Решение. Бидејќи на $(-\infty,1)$ параболата е монотоно опаѓачка, имаме $a < 0$. Од друга страна

$$0 > -10 = f(1) = a + b + c \; .$$

Параболата прима позитивни и негативни вредности, па од нејзината непрекинатост добиваме дека има барем една нула. Во тој случај таа има уште една нула. Според тоа $b^2 > 4ac$.

Сега не е тешко да се види дека неточно може да биде тврдењето под E).

18. Сите страни на шестаголникот $PQRSTU$ се тангенти на кружница. Должините на страните PQ, QR, RS, ST и TU се 4, 5, 6, 7 и 8.

Колкава е должината на страната UP?

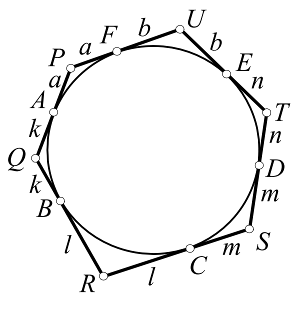
(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

(E) не може да се пресмета од податоците

Решение. Нека $PQRSTU$ е шестаголник во кој е впишана кружница (види цртеж). Допирните точки на PQ, QR, RS, ST, TU, UP со кружницата ќе ги означиме со A, B, C, D, E и F соодветно. Од степен на точка во однос на кружница, имаме

$a = \overline{AP} = \overline{PF}$, $k = \overline{QA} = \overline{QB}$, $l = \overline{BR} = \overline{RC}$,

$m = \overline{SC} = \overline{SD}$, $n = \overline{DT} = \overline{TE}$, $b = \overline{UE} = \overline{UF}$.



Но сега, ако $a + b = x$, имаме

$$\begin{aligned}(k+a)+(k+l)+(l+m)+(m+n)+(n+b)+(b+a) &= \\ = 2k+2l+2m+2n+2a+2b &= \\ = 2(k+l)+2(m+n)+2(a+b)\end{aligned}$$

односно,

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 2x = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + x \; .$$

Според тоа, $\overline{UT} = x = 6$.

19. Најди го збирот на сите природни броеви x помали од 100, за кои x^2-81 е делив со 100.

(A) 200 (B) 100 (C) 90 (D) 81 (E) 50

Решение. Ако x е природен број, тогаш бројот x^2-81 можеме да го запишеме во облик $(x-9)(x+9)$.

Ако $x-9=5k$, т.е. $x=5k+9$ и $5\nmid k$, тогаш $x+9=5k+18=5(k+3)+3\neq 5s$ за било кој $s\in\mathbb{N}$. Според тоа, за да $100\,|\,x^2-81$, исполнет е еден од условите $x-9=25k$ или $x+9=25s$.

Сега, за $k=0, k=1, k=2$ и $k=3$ добиваме

$x=9$

$x=34$

$x=59$

$x=84$,

а за $s=1, s=2, s=3$ или $s=4$ добиваме

$x=16$

$x=41$

$x=66$

$x=91$.

Бидејќи x треба да е непарен број, имаме четири можности $9,59,41,91$, а нивниот збир е $9+59+41+91=200$.

20. Андреј и Бранко точно одговориле на прашањата за бројот на членови на нивниот шаховски клуб. Андреј рекол: "Сите членови на клубот, освен 5 девојчиња, се момчиња." Бранко рекол: "Секоја група од 6 члена секогаш содржи најмалку 4 девојчиња." Колку членови брои клубот?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12 (E) 18

Решение. Бидејќи во клубот има само 5 девојчиња, клубот има најмалку седум членови. Ако покрај Бранко и Андреј има уште едно момче, тогаш ќе постојат шест члена од клубот од кои три се момчиња и три девојчиња. Тоа би била група од шест члена во која има помалку од четири девојчиња. Тоа е во спротивност со условите од задачата.

Значи, клубот брои седум членови.

<u>Секоја од задачите со реден број од 21 до 30 се вреднува со 5 поени</u>

21. Во кошница се ставени топки на кои се запишани природни броеви, сите различни меѓу себе. Број делив со 6 е запишан на 30 топки, број делив со 7 е запишан на 20 топки и број делив со 42 е запишан на 10 топки. Кој е најмалиот број на топки што може да се содржи во кошницата?

(A) 30 (B) 40 (C) 53 (D) 54 (E) 60

Решение. Најмалиот број на топки е

$$10+(20-10)+(30-10)=10+10+20=40$$

На пример тоа можат да бидат топки на кои се запишани броевите

42,	84,	126,	168,	210,	252,	294,	336,	378,	420
6,	12,	18,	24,	30,	36,	48,	54,	60,	66
7,	14,	21,	28,	35,	49,	56,	63,	70,	77
91,	98,	105,	112,	119,	133,	140,	147,	154,	161

22. Дадени се две аритметички прогресии $5, 20, 35, ...$ и $35, 61, 87, ...$. Колку различни аритметички прогресии од природни броеви ги содржат и двете дадени низи како свои поднизи?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 26 (E) бесконечно многу

Решение. Бидејќи $(15, 26) = 1$, добиваме дека d на бараните аритметички прогресии е $d = 1$. Сега, такви низи има 5 и тоа

1, 2, 3, 4, 5, ...
2, 3, 4, 5, 6, ...
3, 4, 5, 6, 7, ...
4, 5, 6, 7, 8, ...
5, 6, 7, 8, 9, ...

23. Низата од функции $f_1(x), f_2(x), ...$ ги задоволува следниве два услови: $f_1(x) = x$ и $f_n(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$. Колку е $f_{2011}(2011)$?

(A) 2011 (B) $-\frac{1}{2010}$ (C) $\frac{2010}{2011}$ (D) 1 (E) -2011

Решение. Од условите на задачата имаме $f_1(x) = x$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$, па според тоа

$$f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad f_5(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} \qquad f_6(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x \qquad f_7(x) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x,$$

Сега, јасно е дека $f_{3k+2}(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_{3k+3}(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_{3k+1}(x) = x$, за $k = 0, 1, 2, 3, ...$.

Бидејќи, $2011 = 3 \cdot 670 + 1$, добиваме

$$f_{2011}(x) = f_1(x) = x$$

$$f_{2011}(2011) = f_1(2011) = 2011.$$

24. Во една кутија има црвени и зелени топки. Ако по случаен избор земаме две од топките, веројатноста тие да се со иста боја е 0,5. Колку може да биде вкупниот број на топки во кутијата?

(A) 81 (B) 101 (C) 1000 (D) 2011 (E) 10001

Решение. Нека x е бројот на црвени а y бројот на зелени топки во кутијата. Од условот на задачата имаме

$$\frac{C_x^1 C_y^1}{C_{x+y}^2} = \frac{1}{2},$$

Од каде добиваме $4xy = (x+y)(x+y-1)$. Сега, ако $x + y = k$, тогаш $xy = \frac{k(k-1)}{4}$. Но тогаш x и y се решенија на равенката

$$t^2 - kt + \frac{k(k-1)}{2} = 0 .$$

Во овој случај

$$t_{1/2} = \frac{k \pm \sqrt{k}}{2} ,$$

па значи, $\sqrt{k}$ е цел број. Тоа е можно само во случајот $k = 81$. Тогаш црвени топки има 45 , а зелени топки 36 или обратно.

Во другите случаи тоа не е можно.

25. Авиокомпанија не наплаќа такса за багаж доколку багажот е под одредена маса. Секој екстра килограм се наплаќа. Господин и госпоѓа Трајковски имале багаж со маса 60 кг и платиле 3 евра. Багажот на господин Милевски тежел исто толку, но платил 10,5 евра. Која е максималната тежина на багаж во килограми, за која не се наплаќа такса?

(A) 10 кг (B) 18 кг (C) 20 кг (D) 25 кг (E) 39 кг

Решение. Нека цената за еден килограм повеќе од предвидената маса за која не се наплаќа такса е y денари, а нека за еден патник се дозволени x килограми маса за која не се наплаќа такса. Тогаш

$$(60-2x)y = 3$$

$$(60-x)y = 10{,}5 .$$

Ако втората равенка ја поделиме со првата, добиваме

$$\frac{60-x}{60-2x} = 3{,}5 .$$

Решение на ова равенка е $x = 25$ kg .

Значи, максималната тежина на багажот за која не се наплаќа такса е 25 kg .

26. Во изразот

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}, \qquad (1)$$

на различни букви одговараат различни цифри на исти букви одговараат исти цифри. Која е најмалата целобројна позитивна вредност на изразот?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

Решение. Вредноста на изразот е иста со вредноста на изразот

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E} . \qquad (2)$$

За да вредноста на изразот е што помала, најдобро е $M = 9$ и $N = 8$. За да таа е целобројна, треба

$$M \cdot E \mid K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O \cdot O .$$

Во тој случај, една од цифрите треба да е 6 , а друга да е 3 , за да $K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O \cdot O$ е делив со 9 . Уште повеќе, во овој случај, една од цифрите треба да е 4 , за да тој е делив со 8 .

Ако избереме $K = 6, A = 3, N = 4$, за да имаме најмала вредност потребно е во овој случај да избереме избереме $R = 2$ и $O = 1$.

Во именител на (2) не може да е ниту цифрата 5 , ниту цифрата 7 , за да количникот е цел број. Но во (1) сега можеме да избереме $G = 5$ или $G = 7$ и во двата случаи добиваме вредност 2 .

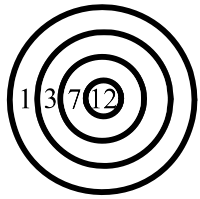
Навистина

$$\frac{6\cdot3\cdot4\cdot5\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}{5\cdot3\cdot9\cdot8}=2\,, \qquad \frac{6\cdot3\cdot4\cdot7\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}{7\cdot3\cdot9\cdot8}=2\,.$$

Сега вредноста на изразот е 2.

Вредност 1 не може да се добие. Секако, вредноста на именителот е најголема можна избрана, а на броителот најмала можна избрана.

27. Робин Худ стрела во мета 3 пати, при што за погодоците освојува поени според цртежот. Сите стрели (на Робин Худ) ја погодуваат целта. Колку различни вкупни збирови може да добие Робин Худ?



(A) 13 $\quad(B)$ 17 $\quad(C)$ 19 $\quad(D)$ 20 $\quad(E)$ 21

Решение. Сите можни погодоци на Робин Худ заедно се нивните пермутации се

1 1 1	1 1 3	1 1 7	1 1 12
3 3 3	3 3 1	3 3 7	3 3 12
7 7 7	7 7 1	7 7 3	7 7 12
12 12 12	12 12 1	12 12 3	12 12 7
1 3 7	1 3 12	1 7 12	3 7 12

Според тоа, различните збирови кои тој ќе ги добие се

$$3,5,7,9,11,13,14,15,16,17,18,20,21,22,25,26,29,31,36\,.$$

28. Нека a, b и c се природни броеви за кои важи $a^2=2b^3=3c^5$. Кој е најмалот број на делители на abc, вклучувајќи ги и 1 и abc?

(A) 30 $\quad(B)$ 49 $\quad(C)$ 60 $\quad(D)$ 77 $\quad(E)$ 1596

Решение. Од равенството $2b^3=3c^5$, заради $(2,3)=1$, добиваме $2\,|\,c$ и $3\,|\,b$. Но тогаш не е тешко да се провери дека и $3\,|\,c$ односно $2\,|\,b$.

Ќе го определиме c во облик $c=2^k3^s$ за да тој е најмал и неговите прости делители имаат најмали степени.Од равенството

$$3c^5=3(2^k3^s)^5=3\cdot2^{5k}3^{5s}=2\cdot2^{5k-1}3^{5s+1}\,.$$

Од условот на задачата имаме $b^3=2^{5k-1}3^{5s+1}$, па според тоа $5k-1=3t$ и $5s+1=3l$ за некои t и l. Од последните равенства, најмала вредност за k е $k=2$, а за s е $s=1$.

Сега,

$$c=2^2 3\,,$$

а од низата равенства

$$3c^5=3\cdot3^5 2^{10}=2\cdot3^6 2^9=2(3^2 2^3)^3=(3^3 2^5)^2$$

добиваме $a=2^5 3^3$ и $b=3^2 2^3$.

Конечно добиваме

$$abc=2^2\cdot3\cdot3^2\cdot2^3\cdot3^3\cdot2^5=3^6 2^{10}\,,$$

а бројот на делители е

$$(6+1)(10+1)=7\cdot11=77\,.$$

29. Дваесет различни природни броеви се запишани во квадратна шема со димензии 4×5. Секои два соседни броја (броеви во ќелии со заедничка страна), имаат заеднички делител поголем од 1.

Која е најмалата можна вредност за бројот n, ако n е најголемиот запишан број на таблата?

(A) 21 (B) 24 (C) 26 (D) 27 (E) 40

Решение. Најмал број, кој е најголем во некое пополнување, по сите можни пополнувања од условот од задачата, е бројот 26. Едно такво пополнување е дадено во таблицата

25	5	20	14	7
15	10	2	12	21
18	22	4	6	9
26	16	8	24	3

Не е тешко да се докаже минималноста на бројот 26. Доволно е да се разгледа број помал од 26 и да се земе во предвид тоа што $23,19,17,13$ се прости броеви. Секако плус треба да се земе предвид дека бројот 1 не може да се употреби во пополнувањето.

30. Една $3\times3\times3$ коцка се состои од 27 мали идентични коцкички. Повлечена е рамнина нормална на дијагоналата на големата коцка која минува низ центарот на коцката. Колку мали коцкички пресекува оваа рамнина?

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

Решение. Ако се направи скица и ако се повлече рамнина не е тешко да се види дека таа рамнина ќе сече 19 од 27-те коцкички (направи цртеж сам).