Ади Дани, Струга

ОПШТА ФОРМУЛА ЗА ЗБИРОТ НА СТЕПЕНИТЕ НА ПРВИТЕ n-ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Во математичката литература која е во широка употреба често се задаваат задачи чиј доказ се базира на принципот на математичка индукција. Најчесто тоа е некоја особина која ја поседува некоја фамилија од математички објекти. Една таква типична задача е следната

Задача 1. Докажи дека равенствата

а) $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

б) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

в) $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{6}$

се исполнети за секој природен број.

Најчесто задачите од ваков тип, заради одреденост, т.е. ученикот да се насочи да го користи принципот на математичка индукција, се задаваат експлицитно на следниот начин:

Задача 1'. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека равенствата

а) $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

б) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

в) $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{6}$

се исполнети за секој природен број n.

Можеме да забележиме дека равенствата под а) може да се докажат непосредно, без примена на математичка индукција, со користење на збир на аритметичка низа чиј прв член е 1 и нараснување кое е исто така 1, т.е. $a_1=1$ и $d=1$. Ако замениме во формулата за збирот S_n на првите n членови на таквата аритметичка низа добиваме:

$$1+2+...+n=S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2\cdot 1+(n-1)\cdot d)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

За равенствата под б) и в) од претходната задача не може да се примени сличен метод како во случајот под а), т.е. да се искористи збирот на аритметичка низа. Меѓутоа со помош на принципот на математичка индукција лесно се докажува дека равенствата под б) и в) се навистина точни за било кој природен број n.

Намерата во оваа статија е да се покаже како се добиваат тие равенства и не само тие туку и поопшти равенства од тој тип.

На почеток за вежба реши ја следната задача.

Задача 2. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека

$$1^4+2^4+...+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Со $S_m(n)$ го означуваме збирот на $m-$тите степени на првите n природни броеви, односно $S_m(n)=1^m+2^m+...+n^m$. Од самата дефиниција јасно е дека $S_\circ(n)=n$. Ќе покажеме дека за $m\geq 1$ е точна рекурентната формула

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left((n+1)^{m+1}-1-\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(n)\right). \tag{*}$$

За доказот на оваа формула ќе го користиме збирот $\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}S_i(n)=I$, биномната формула, својствата на биномните коефициенти и својствата на операторот $\sum$.

Збирот I ќе го запишеме на следниот начин:

$$I=\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}S_i(n)=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(n)+\binom{m+1}{m}S_m(n)+\binom{m+1}{m+1}S_{m+1}(n).$$

Заради равенствата $\binom{m+1}{m}=m+1$ и $\binom{m+1}{m+1}=1$ добиваме

$$I=\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}S_i(n)=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(n)+(m+1)S_m(n)+S_{m+1}(n). \tag{1}$$

Од друга страна, изразот I можеме да го запишеме на следниот начин

$$\begin{aligned}I&=\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}S_i(n)=\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}\left(1^i+2^i+...+n^i\right)\\&=\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}+\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}2^i+...+\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}n^i.\end{aligned}$$

Ако во биномна формула $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$ ставиме $a=1$, $b=l\in\mathrm{N}$, $n=m+1$ имаме $(1+l)^{m+1}=\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}l^i$, од каде добиваме

$$I=2^{m+1}+3^{m+1}+...+(n+1)^{m+1}.$$

Јасно е дека последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$I=1^{m+1}+2^{m+1}+3^{m+1}+...+(n+1)^{m+1}-1.$$

Бидејќи $1^{m+1}+2^{m+1}+...+n^{m+1}=S_{m+1}(n)$, добиваме

$$I=S_{m+1}(n)+(n+1)^{m+1}-1. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(n)+(m+1)S_m(n)+S_{m+1}(n)=S_{m+1}(n)+(n+1)^{m+1}-1.$$

Ако последното равенство го решиме по $S_m(n)$ добиваме дека е точно равенството (*), т.е.

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left((n+1)^{m+1}-1-\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(n)\right).$$

Според (*), имајќи предвид дека $S_{\circ}(n)=n$, за $m=1$ добиваме

$$
\begin{aligned}
1+2+\ldots+n=S_1(n)&=\tfrac{1}{1+1}\left((n+1)^{1+1}-1-\sum_{i=0}^{1-1}\binom{1+1}{i}S_i(n)\right)\\
&=\tfrac{1}{2}\left((n+1)^2-1-\binom{2}{0}S_{\circ}(n)\right)=\tfrac{1}{2}(n^2+2n+1-1-1\cdot n)\\
&=\tfrac{1}{2}(n^2+n)=\tfrac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Значи,

$$1+2+\ldots+n=\tfrac{1}{2}(n^2+n)=\tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Понатаму, за $m=2$ според (*) добиваме

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+n^2=S_2(n)&=\tfrac{1}{3}\left((n+1)^3-1-\sum_{i=0}^{2-1}\binom{3}{i}S_i(n)\right)\\
&=\tfrac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n+1-1-\binom{3}{0}S_{\circ}(n)-\binom{3}{1}S_1(n)\right)\\
&=\tfrac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n+1-1-n-\tfrac{3n^2+3n}{2}\right)=\tfrac{1}{6}(2n^3+6n^2+4n-3n^2-3n)\\
&=\tfrac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)=\tfrac{n}{6}(2n^2+2n+n+1)=\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

Задача 3. Користејќи ги изразите за $S_{\circ}(n)$, $S_1(n)$ и за $S_2(n)$ докажи дека

$$S_3(n)=1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Во завршниот дел на оваа работа ќе се задржиме на случајот $m=4$. Според (*) имаме

$$
\begin{aligned}
S_4(n)=1^4+2^4+\ldots+n^4&=\tfrac{1}{5}\left((n+1)^5-1-\binom{5}{0}S_1(n)-\binom{5}{1}S_2(n)-\binom{5}{3}S_3(n)\right)\\
&=\tfrac{1}{5}\left(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n++1-1-n-5\tfrac{n^2+n}{2}-10\tfrac{2n^3+3n^2+n}{6}-10\tfrac{n^4+2n^3+n^2}{4}\right)\\
&=\tfrac{1}{5}\left(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+4n+-\tfrac{5n^2+5n}{2}-\tfrac{10n^3+15n^2+5n}{3}-\tfrac{5n^4+10n^3+5n^2}{2}\right)\\
&=\tfrac{1}{5}\tfrac{6n^5+30n^4+60n^3+60n^2+24n-15n^2-15n-20n^3-30n^2-10n-15n^n-30n^3-15n^2}{6}\\
&=\tfrac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).
\end{aligned}
$$

Полиномот $P_4(x)=6x^4+15x^3+10x^2-1$ има рационални корени $x_1=-1$ и $x_2=-\frac{1}{2}$, па заради тоа

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\tfrac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)=\tfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Со тоа, воедно ја решивме и следната задача:

Задача 4. Докажете дека изразот $6n^5+15n^4+10n^3-n$ е делив со 30 за секој природен број n.

На крај, на стрпливите читатели им препорачуваме самостојно да го најдат изразот за $S_5(n)$ со помош на рекурентната формула (*). Да напоменеме дека тој е полином од шести степен во однос на променливата n.