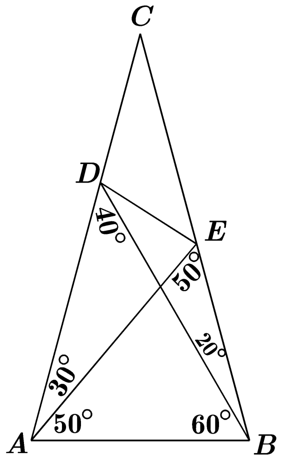
ЕДНА ЗАДАЧА И 12 РЕШЕНИЈА

Валентина Миовска
ПМФ, Скопје

Како што е познато, можно е да има повеќе од еден начин да се реши некоја задача. Со решавањето на една задача на различни начини се стекнуваме со умеења и навики кои ни користат при решавањето на други задачи, но и откриваме некои нови заклучоци кои не биле цел на првичната задача (преформулирање на задачата и формирање на нова/и задача/и).

Овде на повеќе начини ќе ја решиме следнава задача од елементарната евклидова геометрија:

Задача. Даден е рамнокракиот триаголник ABC со краци CA и CB и агол меѓу нив $20°$. Нека D е точка од кракот CA така што $\angle ABD = 60°$, а E е точка од кракот CB така што $\angle BAE = 50°$ (цртеж 1). Пресметај го аголот BDE.



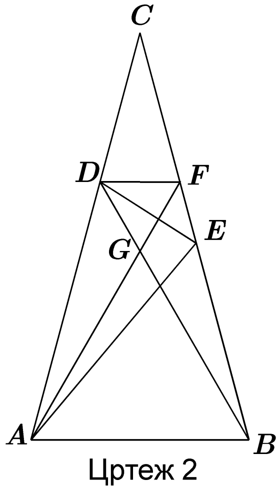
Цртеж 1

Да ја означиме должината на краците на дадениот триаголник со a, а должината на основата со c. Од условот во задачата следува дека $\angle CAB = \angle CBA = 80°$, $\angle CAE = 30°$, $\angle CBD = 20°$, $\angle ADB = 40°$, $\angle AEB = 50°$, $\angle BDC = 140°$. Оттука следува дека триаголниците BCD и EAB се рамнокраки, па $\overline{BE} = \overline{BA} = c$ и нека $\overline{DC} = \overline{DB} = d$. Овие ознаки ќе го имаат истото значење во сите решенија.

Решение 1. Нека F е точка од кракот CB така што DF и AB се паралелни и нека пресечната точка на AF и DB е G (цртеж 2). Тогаш четириаголникот $ABFD$ е рамнокрак трапез па $\angle BAG = \angle ABG = 60°$, односно триаголникот ABG е рамностран, како и триаголникот GFD. Значи $\overline{BG} = \overline{BA} = \overline{BE} = c$ и оттука следува дека триаголникот EGB е рамнокрак. Тогаш

$$\angle BGE = \frac{180° - 20°}{2} = 80° \text{ и}$$

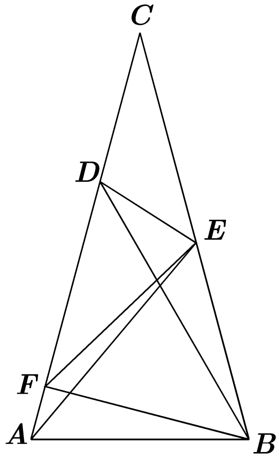
$$\angle FGE = 180° - 80° - 60° = 40°.$$



Цртеж 2

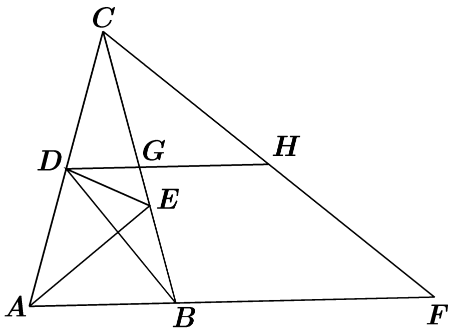
Од $\angle FGE = \angle GFE = 40°$ следува $\overline{EG} = \overline{EF}$, а бидејќи триаголникот GFD е рамностран имаме $\overline{DG} = \overline{DE}$. Затоа четриаголникот $GEFD$ е делтоид, па DE го преполовува аголот GDF, односно $\angle BDE = \frac{1}{2} 60° = 30°$.

Решение 2. Нека F е точка од кракот CA така што $\angle ABF = 20^\circ$ (цртеж 3). Тогаш триаголникот ABF е рамнокрак па $\overline{BF} = c$. Бидејќи и $\overline{BE} = c$, триаголникот EFB е рамнокрак, а од $\angle FBE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ следува дека тој е рамностран. Од друга страна имаме $\angle DBF = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, па затоа и триаголникот BDF е рамнокрак, односно $\overline{DF} = c$. Тогаш, триаголникот EDF е рамнокрак, $\angle FDE = \frac{60^\circ + 80^\circ}{2} = 70^\circ$ и затоа $\angle BDE = \angle FDE - \angle FDB = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.



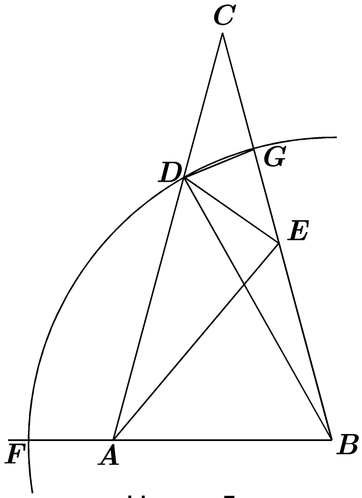
Цртеж 3

Решение 3. Нека F е точка на полуправата AB така што $\overline{BF} = a$, H е точка од CF така што DH и AB се паралелни и нека G е пресечната точка на DH и CB (цртеж 4). Тогаш, од рамнокракиот триаголник FCB следува $\angle BFC = \angle BCF = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.
Бидејќи $\angle AFC = \angle ADB = 40^\circ$ и $\angle FAC = \angle DAB = 80^\circ$, следува дека триаголниците AFC и ADB се слични, па $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, односно $\frac{c+a}{a} = \frac{a-d}{c}$. Тогаш $\frac{c+a-a}{a} = \frac{a-d-c}{c}$ односно $\frac{a-d-c}{c} = \frac{c}{a}$. Оттука имаме $\frac{\overline{EG}}{\overline{BE}} = \frac{a-d-c}{c} = \frac{c}{a} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DB}}$. Од $\frac{\overline{EG}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DB}}$ следува дека DE е симетрала на аголот $\angle BDG = 60^\circ$ и затоа $\angle BDE = 30^\circ$.



Цртеж 4

Решение 4. Нека кружницата $k\left(B, \overline{BD}\right)$ го сече кракот CB во точка G, а полуправата BA во точка F (цртеж 5). Тогаш триаголникот BDF е рамностран и оттука следува $\angle FDA = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$, а триаголникот BGD е рамнокрак и $\angle BDG = \angle BGD = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$. Имаме

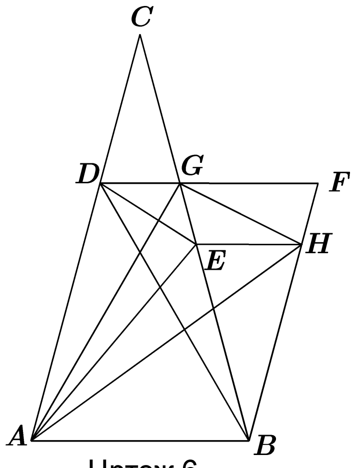


Цртеж 5

$\overline{CD}=\overline{DF}$, $\angle FDA=\angle DCG=20^\circ$ и $\overline{CG}=\overline{BC}-\overline{BG}=\overline{AC}-\overline{CD}=\overline{DA}$ па триаголниците CDG и DFA се складни и оттука $\overline{DG}=\overline{FA}$. Бидејќи $\overline{FA}=\overline{FB}-\overline{AB}=\overline{GB}-\overline{EB}=\overline{GE}$, следува дека триаголникот GDE е рамнокрак, така што $\angle GDE=\angle GED=\frac{180^\circ-80^\circ}{2}=50^\circ$. Тогаш,

$\angle BDE=\angle BDG-\angle EDG=80^\circ-50^\circ=30^\circ$.

Решение 5. Нека F е точка така што четириаголникот $ABFD$ е паралелограм, G е пресечната точка на CB и DF и нека H е точка од FB така што EH е паралелна со AB (цртеж 6). Тогаш $\angle FBG=\angle FBA-\angle GBA=100^\circ-80^\circ=20^\circ$, па BG е симетрала на аголот FBD. Триаголникот BHE е рамнокрак и оттука следува $\overline{BH}=\overline{BE}$. Бидејќи $\overline{BE}=\overline{BA}$, триаголникот ABH е рамнокрак па $\angle AHB=\frac{180^\circ-100^\circ}{2}=40^\circ$. Од $\angle AHB=\angle AGB=40^\circ$ следува дека четириаголникот $ABHG$ е тетивен. Затоа



Цртеж 6

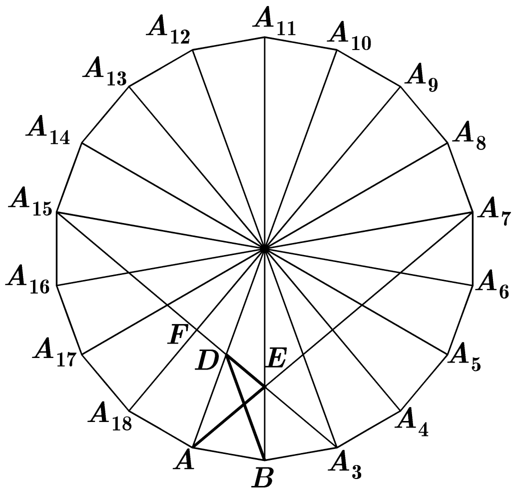
$\angle AGH=180^\circ-\angle ABH=180^\circ-100^\circ=80^\circ$, а бидејќи и $\angle GHA=\angle GBA=80^\circ$ добиваме дека триаголникот AHG е рамнокрак. Тогаш $\angle EGH=\angle AGH-\angle AGE=80^\circ-40^\circ=40^\circ$, односно GH е симетрала на аголот EGH. Бидејќи $FGEH$ е рамнокрак трапез и GH е негова дијагонала, следува дека и дијагоналата FE ќе го преполовува аголот GFH. Значи, за триаголникот BFD имаме BE е симетрала на аголот FBD и FE е симетрала на аголот BFD тогаш DE е симетрала на аголот $\angle BDF=60^\circ$ и оттука следува дека $\angle BDE=30^\circ$.

Решение 6. Нека $ABA_3...A_{18}$ е правилен $18-$ аголник со центар C (цртеж 7). Нека A_3A_{15} ја сече CB во X. Имаме $\angle XA_3B=\angle A_{15}A_3B=$ $=\frac{1}{2}\angle A_{15}CB=\frac{1}{2}100^\circ=50^\circ$.

Тогаш триаголниците ABE и A_3BX се складни бидејќи

$\angle ABE=\angle A_3BX=80^0$,

$\angle EAB=\angle XA_3B=50^\circ$ и

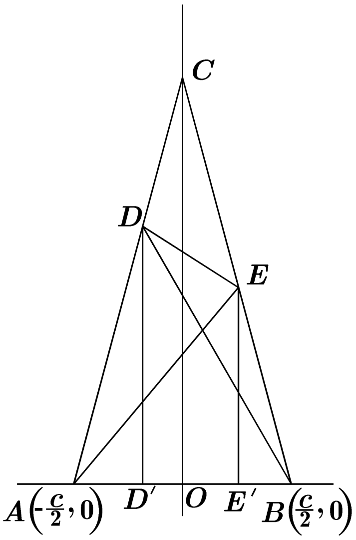


Цртеж 7

$\overline{AB}=\overline{A_3B}$. Тогаш $\overline{BE}=\overline{BX}$, а оттука $X=E$, односно A_3A_{15} ја сече CB во E. Слично се докажува дека AA_7 ја сече CB во E. Нека A_3A_{15} и CA_{18} се сечат во F. Бидејќи $\angle FA_{15}C=\angle A_3A_{15}A_6=\frac{1}{2}\angle A_3CA_6=30^\circ$ и $\angle A_{15}CF=\angle A_{15}CA_{18}=60^\circ$, следува дека $\angle A_{15}FC=90^\circ$ и затоа од рамностраниот триаголник $CA_{15}A_{18}$ добиваме $\overline{A_{18}F}=\overline{FC}$. Бидејќи триаголникот $CA_{18}B$ е рамнокрак и CD е симетрала на аголот спроти основата следува дека $\overline{DA_{18}}=\overline{DB}$. Од $\overline{DA_{18}}=\overline{DB}$ и $\overline{DB}=\overline{DC}$ имаме $\overline{DA_{18}}=\overline{DC}$. Оттука и од тоа што $\overline{A_{18}F}=\overline{FC}$ добиваме дека $\angle DFC=90^\circ$. Тогаш A_{15},F,D,E и A_3 се колинеарни точки па $\angle DA_3B=\angle A_{15}A_3B=50^\circ$. Тогаш од триаголникот A_3DB имаме

$$\angle BDE=\angle BDA_3=180^\circ-\angle DA_3B-\angle DBA_3=180^\circ-50^\circ-\angle DBE-\angle EBA_3=$$
$$=130^\circ-20^\circ-80^\circ=30^\circ.$$

Решение 7. Нека координатниот почеток O е во средината на основата $\overline{AB}=c$ (цртеж 8). Не интересира аголот $\phi=\angle BDE$, односно ќе го пресметаме $tg\phi=\dfrac{k_{DE}-k_{DB}}{1+k_{DE}k_{DB}}$, каде што k_{DE} и k_{DB} се коефициентите на правите DE и DB, соодветно.



Цртеж 8

За k_{DB} имаме $k_{DB}=tg120^\circ=-\sqrt{3}$. Да ги определиме координатите на точките D и E. Од правоаголниот триаголник $EE'B$ следува $\overline{E'B}=c\cos 80^\circ$ и $\overline{EE'}=c\sin 80^\circ$. Тогаш $x_E=\frac{c}{2}-c\cos 80^\circ$ и $y_E=c\sin 80^\circ$. Од правоаголниот триаголник $DD'B$ следува $\overline{D'B}=d\cos 60^\circ=\frac{d}{2}$ и $\overline{DD'}=d\sin 60^\circ=\frac{d}{2}\sqrt{3}$. Бидејќи $\cos 20^\circ=\frac{a}{2d}$ (од триаголникот BCD) и $\cos 80^\circ=\frac{c}{2a}$ (од триаголникот OBC) следува дека

$$d=\frac{c}{4\cos 80\cos 20^\circ}=\frac{c\sin 20^\circ}{2\cos 80\sin 40^\circ}=\frac{c\sin 20^\circ\cos 40^\circ}{\cos 80\sin 80^\circ}=\frac{2c\sin 20^\circ\cos 40^\circ}{\sin 160^\circ}=$$

$=2c\cos 40^\circ$. Затоа $x_D=-\left(\dfrac{d}{2}-\dfrac{c}{2}\right)=\dfrac{c-2c\cos 40^\circ}{2}$ и $y_D=c\sqrt{3}\cos 40^\circ$.

Коефициентот на правата DE е

$$k_{DE}=\frac{y_D-y_E}{x_D-x_E}=\frac{c\sqrt{3}\cos 40^\circ-c\sin 80^\circ}{\dfrac{c-2c\cos 40^\circ}{2}-\dfrac{c}{2}+c\cos 80^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 40^\circ-\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ-\cos 40^\circ}.$$

Тогаш имаме:

$$tg\phi=\frac{k_{DE}-k_{DB}}{1+k_{DE}k_{DB}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{3}\cos 40^\circ-\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ-\cos 40^\circ}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}\cos 40^\circ-\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ-\cos 40^\circ}}=\frac{\sqrt{3}\cos 80^\circ-\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ-4\cos 40^\circ+\sqrt{3}\sin 80^\circ}=$$

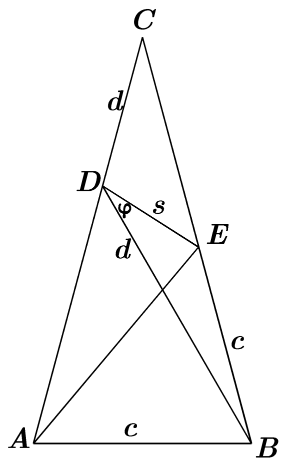
$$=\frac{\sin 60^\circ\cos 80^\circ-\cos 60^\circ\sin 80^\circ}{\sin 30^\circ\cos 80^\circ+\cos 30^\circ\sin 80^\circ-2\cos 40^\circ}=\frac{-\sin 20^\circ}{\sin 110^\circ-2\cos 40^\circ}=$$

$$=\frac{-\sin 20^\circ}{\sin 110^\circ-2\cos 40^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ-2\sin\dfrac{40^\circ+20^\circ}{2}\sin\dfrac{40^\circ-20^\circ}{2}}=$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ-\sin 10^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ-\cos 80^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{-2\sin\dfrac{40^\circ+80^\circ}{2}\sin\dfrac{40^\circ-80^\circ}{2}}=$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{2\sin 60^\circ\sin 20^\circ}=\frac{1}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Оттука следува дека $\phi=30^\circ$.



Цртеж 9

Решение 8. Нека бараниот агол го означиме со ϕ, а должината на отсечката DE со s (цртеж 9). Од триаголникот ABC следува $a=\dfrac{c}{2\cos 80^\circ}$, а од триаголникот BCD $d=\dfrac{a}{2\cos 20^\circ}$. Оттука $d=2c\cos 40^\circ$ (како во решение 7). Со примена на косинусната теорема на триаголникот BED имаме:

$$s^2=d^2+c^2-2dc\cos 20^\circ=c^2\left(4\cos^2 40^\circ+1-4\cos 20^\circ\cos 40\right.,$$

$$=c^2\left(4\cos^2 40^\circ+1-4\frac{\cos\left(20^\circ+40^\circ\right)+\cos\left(20^\circ-40^\circ\right)}{2}\right)=$$

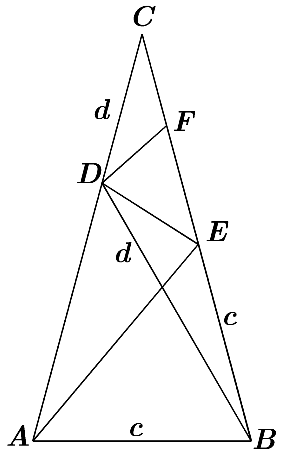
$$= c^2\left(4\cos^2 40^\circ - 2\cos 20^\circ\right) = c^2\left(4\frac{1+\cos 80^\circ}{2} - 2\cos 20^\circ\right) =$$

$$= c^2\left(2+2\left(\cos 80^\circ - \cos 20^\circ\right)\right) = c^2\left(2-4\sin\frac{80^\circ+20^\circ}{2}\sin\frac{80^\circ-20^\circ}{2}\right) =$$

$= c^2\left(2-2\sin 50^\circ\right) = 2c^2\left(1-\cos 40^\circ\right) = 2c^2\cdot 2\sin^2 20^\circ$, односно $s = 2c\sin 20^\circ$.

Со примена на синусната теорема на триаголникот BED добиваме $\frac{s}{\sin 20^\circ} = \frac{c}{\sin\phi}$, а оттука

$\sin\phi = \frac{c}{s}\sin 20^\circ = \frac{c}{2c\sin 20^\circ}\sin 20^\circ = \frac{1}{2}$. Бидејќи аголот ϕ е остар (зошто?), следува дека $\phi = 30^\circ$.



Цртеж 10

Решение 9. Нека F е точка од BC така што DF и AE се паралелни (цртеж 10). Тогаш триаголниците CDF и CAE се слични и важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CE}}$, односно $\overline{FC} = \frac{d(a-c)}{a}$. Бидејќи $d = 2c\cos 40^\circ$ и $a = \frac{c}{2\cos 80^\circ}$ (види решение 7 или 8) имаме:

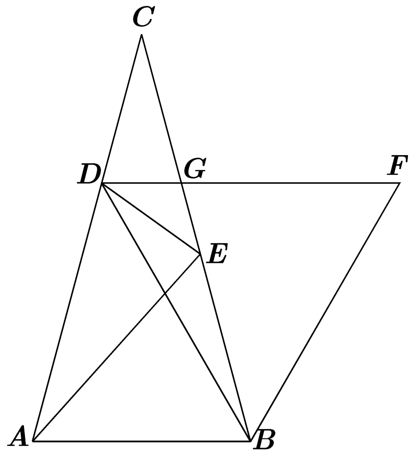
$$\overline{FC} = \frac{d(a-c)}{a} = 2c\cos 40^\circ\left(1-2\cos 80^\circ\right) =$$

$$4c\cos 40^\circ\left(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ\right) = 4c\cos 40^\circ\left(-2\sin 70^\circ\sin\left(-10^\circ\right)\right) =$$

$$= 8c\cos 40^\circ\sin 70^\circ\sin 10^\circ = \frac{4c\cos 40^\circ\cos 20^\circ\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{2c\cos 40^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{c\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = c.$$

Тогаш триаголниците DFC и DEB се складни, па $\angle BDE = \angle CDF = 30^\circ$.



Цртеж 11

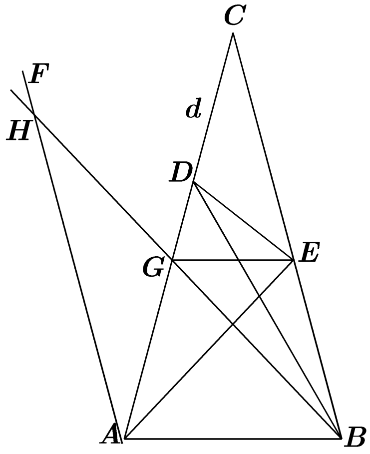
Решение 10. Нека на правата низ D паралелна со AB е избрана точка F така што $\overline{BD} = \overline{DF}$ и нека G е пресечната точка на DF и BC (цртеж 11). Бидејќи $\angle CDG = 80^\circ$, $\angle FDB = 60^\circ$ па триаголникот BFD е рамностран. Тогаш, од $\overline{BD} = \overline{FB}$, $\overline{AD} = \overline{GB}$ и $\angle BDA = \angle FBG = 40^\circ$, следува дека триаголниците BDA и FBG се складни и затоа $\overline{AB} = \overline{GF} = c$. Користејќи дека $d = 2c\cos 40^\circ$, од косинусната теорема за триаголникот FBG имаме:

$$\overline{EF}^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos 40^\circ =$$

$$= c^2\left(1+4\cos^2 40^\circ - 4\cos^2 40^\circ\right) = c^2.$$

Значи $\overline{EF}=c$. Од $\overline{EF}=\overline{EB}$, следува дека E лежи на симетралата на аголот BDF, односно $\angle BDE=30^\circ$.

Решение 11. Нека G е точка од кракот AC така што EG и AB се паралелни прави и нека BG ја сече правата AF која е паралелна со BC во точка H (цртеж 12). Тогаш $\angle HAC=20^\circ$, $\angle HBA=50^\circ$ и затоа $\angle AHB=30^\circ$. Со примена на синусната теорема на триаголникот ABH добиваме $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AH}}{c}=\frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sin 50^\circ=2\cos 40^\circ$. Но, $\frac{d}{c}=2\cos 40^\circ$ па $\overline{AH}=d$. Тогаш од $\overline{AH}=\overline{BD}$, $\overline{AG}=\overline{BE}$ и $\angle HAG=20^\circ=\angle DBE$ следува дека триаголниците HAG и DBE се складни и оттука $\angle BDE=\angle AHG=30^\circ$.



Цртеж 12

Решение 12. Со примена на синусната теорема на триаголникот AEC добиваме

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{a}{a-c}=\frac{\sin 130^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sin 130^\circ=2\cos 40^\circ.$$

Но, $\frac{d}{c}=2\cos 40^\circ$ па $\frac{a}{a-c}=\frac{d}{c}$. Значи, важи $\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{EB}}$ и $\angle ECA=20^\circ=\angle EBD$ и затоа триаголниците ECA и EBD се слични. Тогаш $\angle BDE=\angle CAE=30^\circ$.

И на крај, ќе наведеме три задачи кои произлегуваат од различните начини на решавање на дадената задача.

Задача 1. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со остар агол 80°. Дијагоналите на трапезот се сечат во точка E под агол од 60°. Нека F е точка од кракот BC така што $\overline{BF}=\overline{BA}$. Докажи дека DF и AC се земно нормални прави.

Задача 2. Даден е паралелограмот $ABCD$ со $\angle BAD=100^\circ$ и $\angle CAD=60^\circ$. Нека E е точка од страната AB така што $\angle AED=40^\circ$, F е точка од страната BC така што $\angle FAB=20^\circ$ и нека правата низ E, паралелна со BC, ја сече AF во G. Докажи дека:

а) DG и EF се заемно нормални прави;

б) точката G е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC.

Задача 3. Нека A, B и C се точки од кружницата $k(O,r)$ така што триаголникот AOC е рамностран триаголник а $\angle AOB=80^\circ$. Нека D е точка од радиусот AO така што $\angle ACD=20^\circ$ и E е точка од радиусот OB така што $DO=OE$. Ако F е пресечната точка на AB и CE, докажи дека четириаголникот $AOEF$ е тетивен.

Користена литература

Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, *Challenging problems in geometry*, Dover Publ., New York, 1996