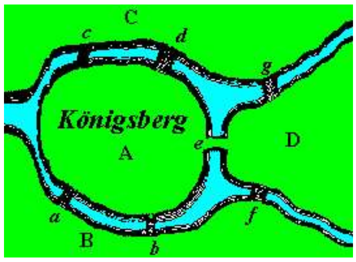
Ана Доневска – Тодорова

Некои поими од теоријата на графови

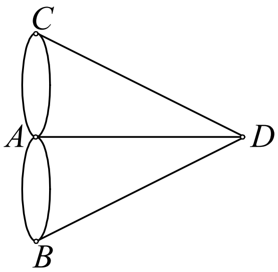
Многу математички загатки бараат да се нацрта некоја фигура со непрекинато движење без подигнување на моливот од хартијата, и при тоа без да се помине некој дел од неа два пати. Проблемите од овој тип се решаваат со помош на Ојлерови кружни патеки и Ојлерови патеки. Градот Konigsberg, Prussia (денешен Kaliningrad, Rusia) бил поделен на четири дела со реката Pregel, кои за време на 18 век меѓусебно биле поврзани со седум мостови.



Цртеж 1

Граѓаните на овој град се прашувале дали е можно да тргнат од едно место во градот, да ги поминат сите мостови по еднаш и да се вратат на истото место од каде што тргнале.

Швајцарскиот математичар Leonard Euler го решил нивниот проблем. Неговото решение, објавено во 1736 година се смета за почеток на основање на *Теоријата на графови.* Тој го проучувал овој проблем користејќи мултиграф чии јазли се четирите региони на градот, а седумте мостови се ребра на графот. Овој мултиграф е прикажан на цртежот 2.



Цртеж 2

Значи, сега прашањето за решавање на овој проблем е: Дали постои едноставна кружна патека во овој мултиграф што го содржи секое ребро? За да одговориме на ова прашање, претходно да ги разгледаме основните поими за графови.

Основни поими од теоријата на графови

Теоријата на графови како математичка дисциплина која ги проучува особините на графовите во голема мера е застапена во информатиката. Неформално, графовите се составени од точки, односно чворови (јазли,темиња) и линии помеѓу нив, односно гранки (рабови или ребра). Графовите не ретко се употребуваат за опис на различни модели и структури на податоци. Структурата на една web- презентација, на пример, може да се претстави со помош на графови, каде што точки ќе бидат страниците, а гранки ќе бидат врските со кои се преминува од една на друга страница. Поручувањето на алгоритмите кои ги решаваат проблемите за употреба на графовите претставува многу значаен дел од информатичката наука.

Дефиниција 1: Два јазли u и v во ненасочен граф G се викаат соседни во G ако $\{u, v\}$ е гранка од G. Ако $e = \{u, v\}$, работ е се вика инцидентен со јазлите u и v или ги поврзува u и v. Јазлите u и v се викаат крајни точки на работ $\{u, v\}$.

Дефиниција 2: Степен на јазол(теме) во ненасочен граф е бројот на рабови(ребра) инцидентни со него, при што јамка околу јазол учествува двојно во степенот на јазолот. Степен на јазол се означува со $\deg(v)$. Јазол со степен нула се вика изолиран јазол. Јазол со степен 1 се вика висечки јазол. Изолираниот јазол не е соседен со ниту еден друг јазол.

Пример 1: Да се определат степените на јазлите во графот G, прикажан на следниот цртеж 3.

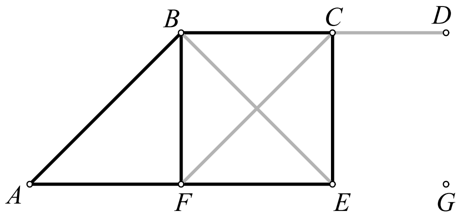
Решение: Во графот G,

$\deg(a) = 2, \deg(b) = \deg(c) = \deg(f) = 4, \deg(d) = 1$, $\deg(e) = 3, \deg(g) = 0$.

Јазолот g во графот е изолиран, а јазолот d е висечки.

Колку изнесува збирот на сите степени на јазлите во еден граф?

Теорема: Нека $G = (V, E)$ е ненасочен граф со е рабови. Тогаш $2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$.



Цртеж 3

Пример 2: Колку рабови има во граф со 8 јазли, секој со степен 5?

Решение: Бидејќи сумата на степените на јазлите е $8 \cdot 5 = 40$, следува дека $2e = 40 \Rightarrow e = 40$.

Теоремата покажува дека сумата на степените на јазлите во ненасочен граф е парен. Овој едноставен факт има многу последици.

Дефиниција 3: Нека (u,v) е раб во графот G со насочени рабови, u се вика соседен на v и обратно. u се вика почетен, а v краен јазол на (u,v). Почетниот и крајниот јазол на јамка се совпаѓаат.

Дефиниција 4: Едноставен граф G=(V,E) се состои од V - непразно множество од јазли(темиња) и E е множество од неподредени парови различни елементи од V, наречени рабови(ребра).

Во праксата најчесто помеѓу два компјутери може да постојат и повеќе од една врски. За ваков случај едноставниот граф е несоодветен за користење, па за негово моделирање се користи мултиграф. Значи, секој едноставен граф е и мултиграф, но не секој мултиграф е едноставен граф.

Дефиниција 5: Мултиграф G=(V,E) се состои од V - непразно множество од јазли и E е множество од рабови и функција од E во $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Рабовите e_1 и e_2 се наречени мултипни или паралелни рабови ако $f(e_1) = f(e_2)$.

Патеки

Дефиниција 1: Патека(маршрута) со должина *n* од *u* до *v*, каде *n* е позитивен цел број, во ненасочен граф е низа од јазли $e_1, e_2, ..., e_n$ на графот, т.ш

$$f(e_1) = \{x_0, x_1\},\ f(e_2) = \{x_1, x_2\}, ..., f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\},$$

каде $x_0 = u, x_n = v$. За едноставен граф патеката се означува со низа од неговите јазли $x_1, x_2, ..., x_n$. Патеката е кружна ако почнува и завршува со ист јазол, односно *u* = *v*. Патека или кружна патека се нарекува едноставна ако не содржи еден ист раб повеќе од еднаш.
Често пати патеката $e_1, e_2, ..., e_n$, каде $f(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}, i = 1, 2, ..., n$ ќе ја означуваме со низата од јазли $x_1, x_2, ..., x_n$.

Дефиниција 2: Ојлерова кружна патека во граф G е едноставна кружна патека што го содржи секое ребро во G. Ојлерова патека во граф G е едноставна патека што го содржи секое ребро во G.

Теорема 1: Поврзан мултиграф има Ојлерова кружна патека ако и само ако секој од неговите јазли е со парен степен.

Сега можеме да го решиме проблемот со седумте мостови на Konigsberg. Бидејќи мултиграфот кој го претставува моделот за овој проблем, прикажан на цртежот 2, има 4 јазли со непарен степен, тој нема Ојлерова кружна патека. Не постои начин да се тргне од една точка, да се помине секој мост точно еднаш и да се врати на истото место.

Слика 1. Најпознатиот Швајцарски математичар Leonhard Euler (1707–1783)

Препораки за понатамошна работа:

Хамилтонова патека и Хамилтонова контура
e-mail: anadonev@gmail.com