БМО 1989

1. Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се сите делители на природниот број n, каде $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Определи ги сите природни броеви, за кои $k \geq 4$ и $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$.

   Решение. Ако n е непарен број, тогаш и неговите делители се непарни броеви, од каде следува дека $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$ е парен број, што е противречност. Според тоа, n е парен број, $d_1 = 1, d_2 = 2$ и $n = 5 + d_3^2 + d_4^2$. Тогаш, само еден од броевите d_3 и d_4 е парен. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја.

   1) Нека d_3 е парен, т.е. $d_3 = 2a, a > 1$. Тогаш a е делител на n кој е поголем од d_1 и е помал од d_3, па затоа $a = d_2 = 2$ и $d_3 = 4$. Според тоа, $n = 21 + d_4^2$, што не е можно бидејќи n е делив со 4.
   2) Нека d_4 е парен, т.е. $d_4 = 2a, a > 1$. Ако $a = 2$, добиваме $d_4 = 4$ и од $2 = d_2 < d_3 < d_4 = 4$ следува $d_3 = 3$. Тогаш $n = 30$, кој не е делив со 4 и значи не е решение на задачата. Според тоа, a е делител на n кој е поголем од $d_2 = 2$ и помал од d_4, т.е. $a = d_3$. Значи, $n = 5(1 + d_3^2)$. Од $d_3 \mid n$ заклучуваме дека $d_3 \mid 5$, т.е. $d_3 = 5$. Тогаш $n = 130$ и тоа е единственото решение на задачата.

2. Нека $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10 a_1 + a_0$ е декаден запис на прост број, каде $n > 1$ и $a_n > 1$. Докажи дека полиномот

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

   е неразложлив, т.е. не може да се претстави како производ на два полиноми со позитивни степени и целобројни коефициенти.

   Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

   Лема. Ако a е комплексен корен на полином со реални коефициенти

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n,$$

   тогаш $|a| < 1 + m$, каде

$$m = \max\{|\frac{a_k}{a_n}| : 0 \leq k \leq n-1\}.$$

   Доказ. Ако $|a| \geq m + 1$, тогаш последователно добиваме

$$0 = |f(a)| \geq |a_n a^n| \cdot |1 + \frac{a_{n-1}}{a_n a} + \frac{a_{n-2}}{a_n a^2} + ... + \frac{a_0}{a_n a^n}|$$

$$\geq |a_n a^n| (1 - |\frac{a_{n-1}}{a_n a}| - |\frac{a_{n-2}}{a_n a^2}| - ... - |\frac{a_0}{a_n a^n}|)$$

$$\geq |a_n a^n|(1-|\tfrac{m}{a}|-|\tfrac{m}{a^2}|-...-|\tfrac{m}{a^n}|)$$
$$\geq |a_n a^n|[1-m(\tfrac{1}{m+1}+\tfrac{1}{(m+1)^2}+...+\tfrac{1}{(m+1)^n})$$
$$>|a_n a^n|[1-m(-1+\tfrac{1}{1-\frac{1}{m+1}})]=0,$$

што е противречност. Според тоа, $|a|<1+m$. ■

Нека претпоставиме дека $P(x)=f(x)g(x)$, каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми со позитивни степени и целобројни коефициенти. Нека корените на $f(x)$ се $x_1,x_2,...,x_k$. Тогаш $x_1,x_2,...,x_k$ се корени на $P(x)$ и согласно со докажаната лема модулите им се помали од $1+\frac{9}{2}<9$. Според тоа, ако b е коефициентот пред највисокиот степен на $f(x)$, тогаш

$$|f(10)|=|b|\cdot|\prod_{i=1}^{k}(10-x_i)|\geq|b|\prod_{i=1}^{k}(10-|x_i|)>1$$

и аналогно $|g(10)|>1$. Според тоа, $P(10)=f(10)g(10)$ не е прост број, што противречи на условот на задачата.

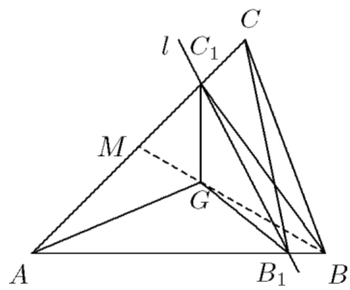
3. Нека BAC е триаголник со тежиште G и нека l е права која ги сече страните AB и AC соодветно во точките B_1 и C_1 така што A и G лежат во иста полурамнина во однос на l. Докажи дека

$$P_{BB_1GC_1}+P_{CC_1GB_1}\geq\tfrac{4}{9}P_{ABC}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Заради пократко запишување да означиме $P_{ABC}=P, P_{AB_1C_1}=P_0, P_{AB_1G}=P_1$ и $P_{AC_1G}=P_2$. Од условот на задачата следува, дека $P_0\geq P_1+P_2$. Имаме

$$P_{BB_1GC_1}=P_{ABC_1}-P_1-P_2 \text{ и}$$
$$P_{CC_1GB_1}=P_{ACB_1}-P_1-P_2.$$



Од $P_{ABG}:P_{AMG}=2:1=P_{BGC_1}:P_{MGC_1}$ следува дека $P_{ABC_1}=3P_2$. Аналогно се докажува дека $P_{ACB_1}=3P_1$. Тогаш

$$P_{BB_1GC_1}+P_{CC_1GB_1}=P_{ABC_1}-P_1-P_2+P_{ACB_1}-P_1-P_2=P_1+P_2.$$

Останува да докажеме дека $P_1+P_2\geq\frac{4P}{9}$. Имаме

$$P_1=\frac{P_{AB_1C}}{3}=\frac{P\cdot\overline{AB_1}}{3\overline{AB}} \text{ и } P_2=\frac{P\cdot\overline{AC_1}}{3\overline{AC}}.$$

Тогаш

$$P_1+P_2=\frac{P}{3}\left(\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}\right)\geq\frac{2P}{3}\sqrt{\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}}=\frac{2P}{3}\sqrt{\frac{P_0}{P}}=\frac{2}{3}\sqrt{P(P_1+P_2)}\ ,$$

од каде што следува саканото неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако правата l минува низ G и е паралелна со BC .

4. Нека F е множество, чии елементи се подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ и кои ги имаат следниве својства:

   1) Ако $A\in F$, тогаш $|A|=3$.

   2) Ако $A,B\in F$ и $A\neq B$, тогаш $|A\cap B|\leq 1$.

   Нека $f(n)$ е максималната вредност на $|F|$ за сите такви множества F . Докажи дека за $n\geq 3$ важи

$$\tfrac{n^2-4n}{6}\leq f(n)\leq\tfrac{n^2-n}{6}\ .$$

Решение. Нека F е произволна фамилија од триелементни подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ која ги има саканите својства. Секој $A\in F$ има 3 двоелементни подмножества, при што заради 2) за $A,B\in F$, $A\neq B$ не е можно да содржат едно исто двоелементно подмножество. Тоа значи, дека множествата од F заедно содржат $3|F|$ различни двоелементни подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Според тоа, $3|F|\leq\binom{n}{2}$, па затоа $f(n)\leq\frac{n^2-n}{6}$.

Нека $F_n=\{\{x,y,z\}:x,y,z\in\{1,2,...,n\},\ x+y+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)\}$. Ќе докажеме, дека F_n ги има саканите својства и

$$|F_n|\geq[\tfrac{n^2-3n+6}{6}]\geq[\tfrac{n^2-4n}{6}].$$

Очигледно условот 1) е исполнет. Ако претпоставиме дека $A,B\in F_n$, $A\neq B$ и $|A\cap B|=2$, тогаш без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $A=\{x,y,z_1\},\ B=\{x,y,z_2\}$ при што $z_1\neq z_2$. Но, од дефиницијата на F_n имаме $n\,|\,(x+y+z_1)-(x+y+z_2)$, што е можно ако и само ако $z_1=z_2$, противречност.

Да означиме

$$G_1=\{\{x\}:x\in\{1,2,...,n\},\ 3x\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)\},\ a=|G_1|,$$

$$G_2=\{\{x,y\}:x,y\in\{1,2,...,n\},\ 2x+y\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)\},\ b=|G_2|\ .$$

Понатаму, збирот $a+3b+6|F_n|$ е еднаков на бројот на тројките (x,y,z), $x,y,z\in\{1,2,...,n\}$ кои ја задоволуваат конгруенцијата $x+y+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)$. Од друга страна, бројот на овие тројки е еднаков на n^2 , бидејќи секој избор на x и y еднозначно го определува z .

Лесно се докажува дека $a=1$ ако n не е делив со 3 и дека $a=3$ ако n е делив со 3. Понатаму, важи $b=n$, бидејќи секој избор на x еднозначно го определува y. Според тоа,

$$|F_n| \geq \frac{n^2-a-3b}{6} \geq \frac{n^2-3n+6}{6},$$

со што доказот е завршен.