СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 13 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса? *Алексей Воропаев*
4	2. Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P. *Артемий Соколов*
4	3. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые 2 соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые 2 фишки, между которыми стоят ровно 3 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *Егор Бакаев*
5	4. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, \ldots, a_{1000}^2$. Сумма любых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{1000}$ делится на 41? *Борис Френкин*
5	5. У Васи есть неограниченный запас брусков $1 \times 1 \times 3$ и уголков из трёх кубиков $1 \times 1 \times 1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m \times n \times k$, где m, n и k — целые числа, большие чем 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками. *Михаил Евдокимов*

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 13 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса? *Алексей Воропаев*
4	2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ такой, что $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K. Докажите, что $BK \parallel AE$. *Егор Бакаев*
4	3. Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[\frac{x}{2}]$ (наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{x}{2}$). Докажите, что если вначале написано 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число. *Владислав Новиков*
5	4. Дан многоугольник, у которого любые две соседние стороны перпендикулярны. Назовем две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно. *Михаил Скопенков*
5	5. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые 2 соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые 2 фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *Егор Бакаев*

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 27 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Назовём *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые (например, сложность чисел 4 и 6 равна 2). Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

2 а) не больше, чем у n;

2 б) меньше, чем у n?

Борис Френкин

7 2. Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 лежит внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 — соответственно площади этих треугольников. Докажите, что

$$\frac{S}{AB+AC} > \frac{S_1}{A_1B_1+A_1C_1}\,.$$

Наири Седракян, Илья Богданов

7 3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

Владислав Новиков

7 4. Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.

Артемий Соколов

8 5. Назовём пару (m, n) различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если mn и $(m+1)(n+1)$ — точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое $n > m$, что пара (m, n) хорошая.

Юрий Маркелов

8 6. У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке дорогой книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке дешёвой (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало — сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги хотя бы 5 тысяч рублей?

Татьяна Казицына

10 7. В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?

Александр Грибалко

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 27 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Многочлен $P(x, y)$ таков, что для всякого целого $n \geqslant 0$ каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x, x)$ иметь нечётную степень?

Борис Френкин

5 2. Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведённые хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P — точка пересечения высот треугольника ABC.

Григорий Гальперин

6 3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

Владислав Новиков

10 4. Дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

бесконечная в обе стороны. Пусть b_k — наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, …, либо с некоторого момента постоянна.

Иван Митрофанов

5. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна $MA \cdot MC + MB \cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

6 а) вписанный;

6 б) описанный.

Наири Седракян

6. Куб, состоящий из $(2N)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2N$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

6 а) Докажите, что можно выбрать такие $2N^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

6 б) Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

Никита Гладков, Александр Зимин

12 7. Некоторые из чисел 1, 2, 3, …, n покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b - c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше, чем $\varphi(n)$ (количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n).

Александр Семенов

41-й Международный математический Турнир городов
Решения задач, младшие классы
Базовый вариант

1. [4] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса?

(Алексей Воропаев)

Ответ: при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

Стратегия 1. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

Стратегия 2. Пусть зритель всегда угадывает номер положения T. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

2. [4] Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P. *(Артемий Соколов)*

Решение. Так как $YH \perp OX \perp AP$, то $YH \parallel AP$, а прямая YH содержит среднюю линию треугольника APC. Аналогично, прямая XH содержит среднюю линию этого треугольника. Эти средние линии пересекаются в точке H – середине стороны AC.

3. [4] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *(Егор Бакаев)*

Ответ. За 50 рублей.

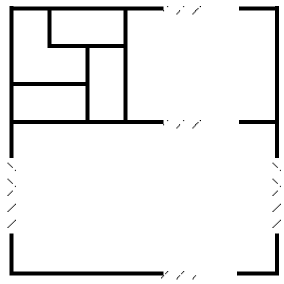
Решение. *Оценка*. Каждая фишка должна поменять чётность своего номера. Бесплатная операция не меняет чётность, а платная меняет её у двух фишек. Поэтому потребуется хотя бы 50 рублей.

Пример. Занумеруем фишки по порядку числами от 0 до 99. Покрасим клетки в четыре цвета: $abcdabcd\ldots d$. Бесплатная операция меняет фишки в соседних одноцветных клетках. Поэтому в клетках одного цвета фишки можно бесплатно переставить в любом порядке. Поменяем фишки во всех парах bc и da – это 49 платных операций. В клетках цвета b и c фишки уже можно расставить нужным образом бесплатно. В клетках цвета a и d сделаем так, чтобы фишки 0 и 99 встали рядом. Поменяем их последней платной операцией и дорасставим все фишки в нужном порядке.

4. [5] Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, \ldots, a_{1000}^2$. Сумма каждых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{1000}$ делится на 41? *(Борис Френкин)*

Ответ: верно. **Решение**. Из условия следует, что $a_{k+41}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ (индексы считаем зацикленными, то есть за 1000 следует 1). Значит, $a_{k+41n}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ при любом n. Так как числа 41 и 1000 взаимно просты, то квадраты всех чисел на круге дают при делении на 41^2 один и тот же остаток. Следовательно, $41a_k^2$ делится на 41^2, поэтому a_k^2 делится на 41, а поскольку 41 – простое число, то и a_k делится на 41.

5. [5] У Васи есть неограниченный запас брусков $1\times1\times3$ и уголков из трёх кубиков $1\times1\times1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m\times n\times k$, где m, n и k – целые числа, большие 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками. *(Михаил Евдокимов)*



Решение. Так как mnk делится на 3, то один из множителей делится на 3; пусть это высота k. Достаточно заполнить коробку $m\times n\times 3$. Из двух уголков можно сложить *кирпич* $1\times2\times3$. Если mn чётно, то основание коробки можно разбить на доминошки 2×1 и поставить на них по кирпичу, заполнив тем самым коробку. Иначе разобьём основание коробки на квадрат 3×3 и два прямоугольника (возможно пустых), см. рис. Прямоугольники разобьём на доминошки, а квадрат – как на рисунке. На доминошки поставим по кирпичу, а в оставшееся место положим три уголка. Коробка заполнена уголками.

Сложный вариант

1. Назовём *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые. Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

а) [2] не больше, чем у n; **б**) [2] меньше, чем у n? *(Борис Френкин)*

Ответ. **а**) Для $n = 2^k$; **б**) таких чисел нет. **Решение**. **а**) Очевидно, 2^k – наименьшее число сложности k. Поэтому все числа между 2^k и 2^{k+1} имеют сложность не больше k. Пусть n – не степень двойки. Тогда между n и $2n$ есть степень двойки (можно взять наибольшую степень двойки, меньшую n, и удвоить её). Очевидно, её сложность больше, чем у n.

б) В силу пункта а), достаточно рассмотреть случай $n = 2^k$, где k натуральное. Но число $3\cdot2^{k-1}$ имеет такую же сложность, как и n, и находится между n и $2n$.

Для знатоков. Утверждение **б**) следует из *постулата Бертрана*: если p – простое число, то следующее простое меньше $2p$. Действительно, представим n в виде pr, где p – простое, r – натуральное. Пусть q – следующее за p простое число. Тогда $n < qr < 2n$, а сложность qr равна сложности n.

2. [7] Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 – внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 – соответственно площади этих треугольников. Докажите, что $\dfrac{S}{AB+AC} > \dfrac{S_1}{A_1B_1 + A_1C_1}$. *(Наири Седракян, Илья Богданов)*

Решение. Пусть точки D и D_1 симметричны точкам A и A_1 относительно BC. Проведём биссектрисы AK и A_1K_1 наших треугольников. Заметим, что K и K_1 – центры окружностей, вписанных в четырёхугольники $ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$, а требуемое неравенство превратилось в очевидное неравенство $r > r_1$, где r и r_1 – радиусы указанных окружностей.

3. [7] Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание? (*Владислав Новиков*)

Решение 1. (*А. Шаповалов*) Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем $k + 1$ взвешивание и определены веса k монет, причём среди них есть серебряная или две медных. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1 и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет z с числом взвешиваний v. Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые монеты с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть A – более лёгкая, а B – более тяжёлая из затронутых монет. Далее сравниваем незатронутые монеты с B, пока снова не получим неравенство. Теперь у нас $v = z - 1$; есть одна или несколько монет одинакового веса a, одна или несколько монет другого веса $b > a$ и одна монета C веса $c \neq b$. Сравним C с A. Возможны два случая.

1) $c = a$. Сравним B с $A+C$, то есть b с $2a$. Возможны варианты: $b = 3$, $a = 1$ (если $b > 2a$); $b = 2$, $a = 1$ ($b = 2a$); $b = 3$, $a = 2$ ($b < 2a$). Во всех случаях ситуация победная: $v = z + 1$, веса z монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2) $c \neq a$. Значит a, b, c – три разных веса, они как-то упорядочены ($c > b > a$, $b > c > a$ или $b > a > c$), поэтому определены однозначно. При этом $v = z$ – ситуация победная.

Замечание. Иногда некоторые взвешивания можно не проводить: например, если C тяжелее B, то уже $c > b > a$; если при первом неравенстве уже есть ещё монета веса a, её можно взять за C.

Решение 2. (*А. Рябичев*) Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное

Утверждение 1. Пусть есть k монет, среди которых все три типа представлены, причём про пару монет A, a уже известно, что $A > a$. Тогда можно определить, какая из k монет какого типа, за $k - 1$ взвешивание.

База. Если монет три, сравнив оставшуюся монету с A и с a, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты, кроме A и a. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для $k - 1$ монеты. Если они не равны, скажем что получилась пара $B > b$. Теперь сравним $A+a$ и $B+b$. Если веса пар равны, то $A=B$ и $a=b$, так что мы можем выкинуть B и b (запомнив, что они совпадают по весу с A и a), и воспользоваться предположением индукции для $k - 2$ монет.

Пусть веса пар различны, для определённости, $A+a > B+b$. Заметим, что тогда обязательно $A = 3$ и $b = 1$. Монеты в паре (B, a) имеют либо веса (2,1), либо (2,2), либо (3,2). Итак, сравнив $A+b$ с $B+a$, мы однозначно восстановим веса всех четырёх монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся $k - 4$ взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции следующее утверждение, усиливающее требуемое в задаче:

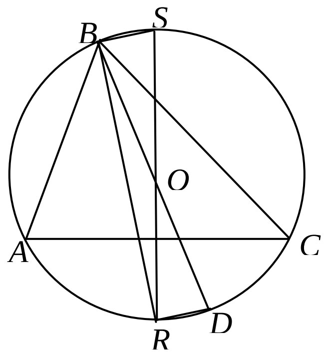
Утверждение 2. Если есть k монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, *за k взвешиваний*.

База. Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю $k - 1$ монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара $A > a$ и воспользуемся утверждением 1.

Замечание. Мы сделали на одно взвешивание меньше, чем предполагалось в условии. Кроме того, мы использовали только то, что сумма весов двух серебряных монет равна сумме весов медной и золотой; тот факт, что серебряная монета вдвое тяжелее медной, для данного решения не важен.

4. [7] Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB. (*Артемий Соколов*)



Решение. Проведём гомотетию с центром B и коэффициентом 2. Точка O перейдёт в точку D, диаметрально противоположную вершине B на описанной окружности Ω, точка P – в точку R пересечения биссектрисы угла B с Ω, точка Q – в диаметрально противоположную R точку S, «отрезок, соединяющий…» – в сторону AC. Осталось заметить, что диаметр RS проходит через середину стороны AC, так как R – середина дуги AC.

5. [8] Назовём пару (m, n) различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если mn и $(m + 1)(n + 1)$ – точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое $n>m$, что пара (m, n) хорошая. (*Юрий Маркелов*)

Решение. Пара $(m, m(4m + 3)^2)$ хорошая. Действительно,
$(m + 1)(m(4m + 3)^2 + 1) = (m + 1)(16m^3 + 24m^2 + 9m + 1) = (m + 1)^2(16m^2 + 8m + 1) = ((m + 1)(4m + 1))^2$.

Путь к решению. Естественно попытаться найти такое n, что оно есть квадрат, умноженный на m, и при этом $n+1$ есть квадрат, умноженный на $m+1$. Тогда $n+1$ имеет вид $k^2(m+1)$. Так как n, поделённое на m, тоже квадрат, имеем: $(k^2(m+1) - 1)/m = k^2 + (k^2 - 1)/m$ – квадрат. Самый простой способ это обеспечить – положить $(k^2 - 1)/m$ равным $4k+4$, тогда $(k - 1)/m = 4$, откуда $k = 4m+1$.

6. [9] У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке *дорогой* книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке *дешёвой* (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало – сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги хотя бы 5000 рублей? *(Татьяна Казицына)*

Решение 1. Посмотрим, сколько мелочи Петя мог получить.

Рассмотрим самую последнюю дешёвую покупку, которая увеличила количество мелочи. Пусть стоимость этой покупки x, тогда перед этим было не более $x - 1$ рублей мелочи, а значит, после этого её станет не больше чем $x - 1 + 100 - x = 99$ рублей. Так как дорогие покупки количество мелочи не уменьшают, то все предыдущие покупки вместе с рассмотренной дали в сумме не более 99 руб. мелочи. Тем более все *дешёвые* покупки в сумме принесли не более 99 рублей.

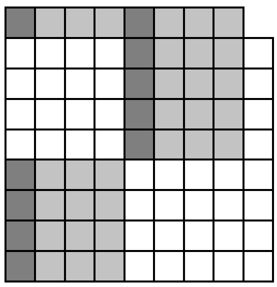
Пусть было n покупок дороже 100 рублей. Каждая из них добавляет не более 99 рублей мелочи. Если бы других покупок совсем не было, то на дорогие было бы потрачено не менее $2n$ сотен, а сдача составила бы не более $99n$ – меньше половины потраченного. Поэтому другие покупки есть. Но тогда у Пети было не менее $2n + 1$ сторублёвки, а мелочи в конце стало не больше $99n + 99$. Значит, $(2n + 1)50 \le 99n + 99$, откуда $n \le 49$. Таким образом, мелочи останется не более $99 \cdot 49 + 99 < 5000$ руб. Значит, и потрачено менее 5000 рублей.

Решение 2. Пусть какой-то товар куплен за x рублей мелочью. Эта мелочь появилась как сдача при предыдущих покупках. Увеличим стоимость этих покупок на соответствующие величины, в сумме составляющие x рублей, а данную покупку отменим. Аналогично избавимся от всех покупок за мелочь. На каждом шаге количество мелочи уменьшается, поэтому новых покупок за мелочь не появится.

Имеется покупка стоимостью не больше 50 рублей (*маленькая*), иначе осталось бы меньше половины всех денег. Маленькая покупка только одна, так как вторая маленькая покупка была бы сделана на сдачу за первую, а покупок за мелочь теперь нет.

Разность между сдачей за маленькую покупку и её ценой не больше $99 - 1 = 98$ руб. Для каждой другой покупки эта разность отрицательна, и она чётна (так как сумма цены и сдачи кратна 100, то есть чётна). Значит, эта разность не меньше -98 и не больше -2. Поэтому остальных покупок не больше $98:2 = 49$, и за каждую из них отдано не больше двух сторублёвок (иначе указанная разность не больше $99 - 201 < -98$). Следовательно, всего сторублёвок было не больше $1 + 2 \cdot 49 = 99$, а половина от этой суммы не больше $9900:2 = 4950 < 5000$.

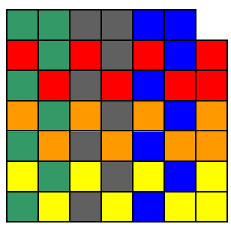
7. [10] В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные? (*Александр Грибалко*)



Ответ. Мог. **Решение**. Покажем, что любой квадрат $(2N+1)\times(2N+1)$ без угловой клетки можно получить, $2N$ раз приложив печать из $2N + 2$ клеток. Для пояснения приведём рисунок для $N = 4$.

Квадрат без правого верхнего угла представим как квадрат $2N\times2N$ с двумя приклееными сверху и справа полосками $1\times2N$. Разобьём квадрат $2N\times2N$ на четыре квадратика $N\times N$. Покрасим левый нижний и правый верхний квадратики $N\times N$ и верхнюю полоску в серый цвет. Теперь белая часть получается из серой поворотом на 90° по часовой стрелке (относительно центра квадрата $2N\times2N$). Левый край каждого серого квадратика $N\times N$ и две клетки серой полоски на тех же вертикалях сделаем тёмными. Это будет первый отпечаток. Сдвинув его вправо на одну клетку, сделаем второй отпечаток, и т.д. Тогда N отпечатков покроют в точности серую область. Развернув печать на 90°, N отпечатками покроем белую область.

Замечание. Есть и другие варианты печатей. Например, такой (для простоты рассмотрен случай $N = 3$):



41-й Международный математический Турнир городов
Решения задач, старшие классы
Базовый вариант

1. [3] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса? (*Алексей Воропаев*)

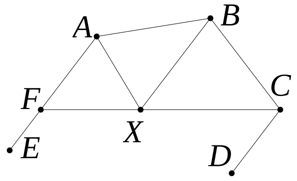
Ответ: при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

Стратегия 1. Зритель всегда называет номер положения T. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

Стратегия 2. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

2. [4] Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K. Докажите, что $BK \parallel AE$. (*Егор Бакаев*)



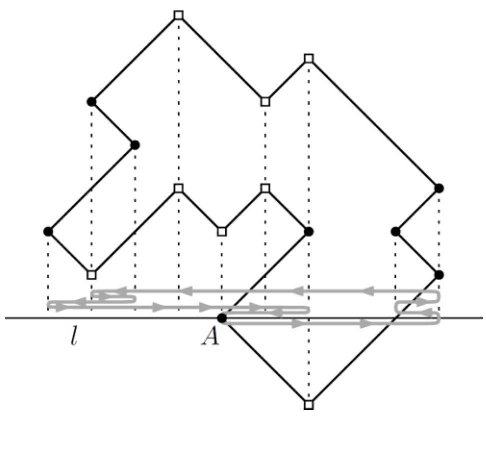
Решение. Пусть биссектриса угла C пересекает прямую AE в точке F, а прямая, проходящая через B параллельно AE, пересекает отрезок CF в точке X. Тогда $\angle BXC = \angle DCX = \angle BCX$. Отсюда $BX = BC = BA$. Значит, $\angle BAX = \angle BXA = \angle FAX$. Следовательно, AX – биссектриса угла A, поэтому X совпадает с K и $BK \parallel AE$.

Замечание. На рисунке точка F лежит на стороне AE, но в решении это не используется. Можно, впрочем, доказать, что биссектриса угла C не может пересекать сторону AB (а сторону ED – может).

3. [4] Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[x/2]$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число. (*Владислав Новиков*)

Решение. Индукция. Число 1 написано. Покажем, как получить натуральное $n > 1$, если умеем получать все меньшие числа. Число n представимо в одном из трёх видов: $3k - 1$, $3k$ или $3k + 1$, где k – натуральное. 1) $2k - 1 \to 6k - 2 \to 3k - 1$; 2) $2k \to 6k + 1 \to 3k$; 3) $k \to 3k + 1$.

4. [5] Дан многоугольник, у которого каждые две соседние стороны перпендикулярны. Назовём две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно. (*Михаил Скопенков*)



Решение 1. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Пусть вертикальных сторон k, тогда горизонтальных сторон тоже k. Все вершины многоугольника делятся на 4 типа: ┌ , ┐, └ , ┘. Пусть вершина A имеет тип 2 (без ограничения общности). Тогда не дружные с ней – вершины типа 1 и 4.

Рассмотрим любую горизонтальную сторону. Её левый конец может быть только типа 1 или 3. Всего левых вершин у горизонтальных сторон столько же, сколько левых сторон, то есть k, откуда суммарное число вершин типа 1 и 3 равно k. Пусть вершин типа 1 всего x, тогда вершин типа 3 всего $k - x$. Рассматривая нижние концы вертикальных сторон, получаем аналогично, что вершин типа 3 и 4 всего k, откуда вершин типа 4 всего $k - (k - x)$, то есть x. Но тогда вершин типа 1 и 4 всего $2x$ (чётное число), а это и есть вершины, которые не дружны с A.

Решение 2. Расположим многоугольник так, чтобы биссектриса l данной вершины A была горизонтальна. Пусть некая точка движется по периметру многоугольника с постоянной скоростью, начав и закончив в вершине A. Тогда её проекция на l также движется с постоянной скоростью, причём проекция меняет направление движения ровно в те моменты, когда точка проходит через вершину, дружную с A, или через саму A. Учитывая, что всего вершин чётное число, получаем требуемое.

Решение 3. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Поскольку они чередуются, число вершин чётно (пусть их $2n$). При этом угловой коэффициент биссектрисы равен 1 или –1.

Занумеруем вершины против часовой стрелки числами от 1 до $2n$ и поставим в i-й вершине число a_i, равное 1, если угол в ней равен 90°, и –1, если угол в ней равен 270°. Обходя многоугольник по контуру против часовой стрелки, в каждом угле в 90° мы поворачиваем на 90° против часовой стрелки, а в каждом угле в 270° – на 90° по часовой. Вернувшись в исходное положение после полного обхода, мы повернулись в итоге на 360° против часовой стрелки, откуда количество углов в 270° на 4 меньше, чем в 90°, то есть равно $(2n - 4)/2 = n - 2$, поэтому $a_1a_2...a_{2n} = (-1)^{n-2}$.

Заметим, что направления биссектрис в соседних вершинах совпадают тогда и только тогда, когда углы в них разные. Можно считать, что угловой коэффициент биссектрисы в первой вершине равен a_1. Тогда для каждого i знак b_i углового коэффициента биссектрисы в i-й вершине совпадает с a_i, если i нечётно, и совпадает с $-a_i$, если i чётно. Поэтому $b_1b_2...b_{2n} = a_1a_2...a_{2n}(-1)^n = (-1)^{2n-2} = 1$. Следовательно, число «отрицательных» (а потому и «положительных») биссектрис чётно.

5. [5] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *(Егор Бакаев)*

Ответ. За 61 рубль. **Решение**. Занумеруем фишки и клетки по порядку от 0 до 99. Бесплатная операция не меняет остаток номера клетки при делении на 5.

Оценка. Мысленно расположим кучки фишек по кругу. Сначала кучка фишек с остатком 0, потом – с 1, и так далее до 4. Платная операция переставляет пару фишек из соседних кучек. Фишки из нулевой кучки должны участвовать хотя бы в одной такой замене, чтобы добраться до четвёртой кучки. Аналогично для фишек из четвёртой кучки. Фишки из первой кучки должны участвовать хотя бы в двух заменах, чтобы добраться до третьей кучки. Аналогично для третьей кучки. Значит, потребуется хотя бы $(20 + 20 + 40 + 40):2 = 60$ рублей. Но если будет потрачено только 60 рублей, то фишкам из первой кучки придётся идти через вторую кучку, поэтому хотя бы одна фишка из второй кучки будет участвовать в заменах. Следовательно, необходимо больше 60 рублей.

Алгоритм. Ясно, что бесплатными операциями можно расставить фишки внутри кучки в любом порядке. Поэтому правильно расставить все фишки из нулевой и четвёртой кучек можно за 20 рублей. Рассмотрим оставшиеся три кучки. Мысленно оставим только одну фишку A во второй кучке. Поменяем её с фишкой из первой кучки. Каждый раз будем передвигать дальше фишку, пришедшую во вторую кучку, за счёт новой фишки. Тогда за 40 рублей мы перетащим все фишки из первой кучки в третью, а из третьей – в первую кроме одной: она останется во второй кучке, не дойдя до первой. Поменяем ее с A, и все фишки окажутся в нужных кучках.

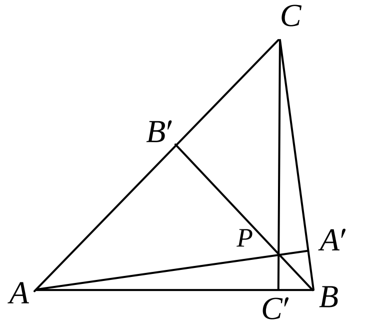
Сложный вариант

1. [5] Многочлен $P(x, y)$ таков, что для всякого целого $n \geq 0$ каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x, x)$ иметь нечётную степень? (*Борис Френкин*)

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть наибольшая степень, в которой встречается x, равна m, а наибольшая степень, в которой встречается y, равна n, Для определенности положим $n \geq m$. Запишем многочлен $P(x, y)$ в виде $A(x)y^n + B(x)y^{n-1} + \ldots$, где $A(x), B(x), \ldots$ – многочлены от x. Поскольку при всех целых $0 \leq k < n$ степень многочлена $P(k, y) = A(k)y^n + B(k)y^{n-1} +\ldots$ меньше n, то $A(0) = A(1) = \ldots = A(n - 1) = 0$. У многочлена $A(x)$ есть n различных корней, поэтому его степень не меньше n. Но она не больше m, значит, $m = n$. При этом одночлен $x^n y^n$ заведомо встречается в произведении $A(x)y^n$ и не встречается в остальных произведениях, поэтому $\deg P(x, x) = 2n$.

Замечание. Можно показать, что условию задачи удовлетворяют все многочлены следующего вида и только они: $c_0 + xy(c_1 + (x - 1)(y - 1)(c_2 + \ldots + (c_k + ((x - k)(y - k)c_{k+1})\ldots)$, где k – неотрицательное целое число, $c_0, \ldots, c_{k+1}$ – константы.

2. [5] Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведённые хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P – точка пересечения высот треугольника ABC. (*Г. Гальперин*)



Решение. Пусть $2x$ – длина указанных хорд. По теореме о произведении отрезков хорд $x^2 = AP{\cdot}A'P = BP{\cdot}B'P = CP{\cdot}C'P$. По обратной теореме точки A, A', B и B' лежат на одной окружности. Значит, $\angle AA'B = \angle AB'B$.

Аналогично $\angle AA'C = \angle AC'C$, $\angle BB'C = \angle BC'C$. Следовательно, $\angle AA'B = \angle AB'B = 180° - \angle BB'C = 180° - \angle BC'C = \angle AC'C = \angle AA'C$, то есть AA' – высота. Аналогично BB' и CC' – высоты.

3. [6] Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание? (*Владислав Новиков*)

Решение 1. (*А. Шаповалов*) Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем $k + 1$ взвешивание и определены веса k монет, причём среди них есть серебряная или две медных. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1 и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет z с числом взвешиваний v. Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые монеты с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть A – более лёгкая, а B – более тяжёлая из затронутых монет. Далее сравниваем незатронутые монеты с B, пока снова не получим неравенство. Теперь у нас $v = z - 1$; есть одна или несколько монет одинакового веса a, одна или несколько монет другого веса $b > a$ и одна монета C веса $c \neq b$. Сравним C с A. Возможны два случая.

1) $c = a$. Сравним B с $A{+}C$, то есть b с $2a$. Возможны варианты: $b = 3$, $a = 1$ (если $b > 2a$); $b = 2$, $a = 1$ ($b = 2a$); $b = 3$, $a = 2$ ($b < 2a$). Во всех случаях ситуация победная: $v = z + 1$, веса z монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2) $c \neq a$. Значит a, b, c – три разных веса, они как-то упорядочены ($c > b > a$, $b > c > a$ или $b > a > c$), поэтому определены однозначно. При этом $v = z$ – ситуация победная.

Замечание. Иногда некоторые взвешивания можно не проводить: например, если C тяжелее B, то уже $c > b > a$; если при первом неравенстве уже есть ещё монета веса a, её можно взять за C.

Решение 2. (*А. Рябичев*) Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное

Утверждение 1. Пусть есть k монет, среди которых все три типа представлены, причём про пару монет A, a уже известно, что $A > a$. Тогда можно определить, какая из k монет какого типа, за $k - 1$ взвешивание.

База. Если монет три, сравнив оставшуюся монету с A и с a, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты, кроме A и a. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для $k-1$ монеты. Если они не равны, скажем что получилась пара $B > b$. Теперь сравним $A+a$ и $B+b$. Если веса пар равны, то $A=B$ и $a=b$, так что мы можем выкинуть B и b (запомнив, что они совпадают по весу с A и a), и воспользоваться предположением индукции для $k-2$ монет.

Пусть веса пар различны, для определённости, $A+a > B+b$. Заметим, что тогда обязательно $A = 3$ и $b = 1$. Монеты в паре (B, a) имеют либо веса (2,1), либо (2,2), либо (3,2). Итак, сравнив $A+b$ с $B+a$, мы однозначно восстановим веса всех четырёх монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся $k-4$ взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции следующее утверждение, усиливающее требуемое в задаче:

Утверждение 2. Если есть k монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, *за k взвешиваний*.

База. Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю $k-1$ монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара $A > a$ и воспользуемся утверждением 1.

Замечание. Мы сделали на одно взвешивание меньше, чем предполагалось в условии. Кроме того, мы использовали только то, что сумма весов двух серебряных монет равна сумме весов медной и золотой; тот факт, что серебряная монета вдвое тяжелее медной, для данного решения не важен.

4. [10] Дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

бесконечная в обе стороны. Пусть b_k – наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, ..., либо с некоторого момента постоянна. *(Иван Митрофанов)*

Решение. Очевидно, что $b_1=1$, а при $k > 1$ отношение из условия меньше k, поэтому $b_k \le k$ при всех натуральных k. Если последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ не совпадает с натуральным рядом, то $b_k \le k-1$ при некотором k. Тогда $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+k-1} \le (k-1)a_{i+k-1}$ для каждого целого i, откуда $ka_i < (k-1)a_{i+k-1}$. Обозначив $t = \frac{k-1}{k} < 1$, получаем $a_i < ta_{i+k-1} < ta_{i+k}$ при всех целых i. Следовательно,

$$a_i < t\cdot a_{i+k} < t^2\cdot a_{i+2k} < \ldots < t^q\cdot a_{i+qk} < \ldots \qquad (*)$$

Фактически (так как (a_i) возрастает) мы доказали, что если есть два номера m и n, где $m > n$, то отношение $\frac{a_n}{a_m}$ меньше 1, когда $m-n < k$; $\frac{a_n}{a_m} < t$, когда $m-n < 2k$; $\frac{a_n}{a_m} < t^2$, когда $m-n < 3k$, и т.д. Чтобы оценить сверху произвольное b_n, оценим сверху отношение

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} = \frac{a_{i+n}}{a_{i+n}} + \frac{a_{i+n-1}}{a_{i+n}} + \ldots + \frac{a_{i+1}}{a_{i+n}}.$$

В этой сумме первые k слагаемых не превосходят 1, следующие k не превосходят t, следующие k не превосходят t^2 и т.д. Итак,

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} < k(1 + t + t^2 + \ldots) = \frac{k}{1-t} = k^2.$$

Это значит, что $b_n \le k^2$ при любом натуральном n. Поскольку последовательность (b_n), очевидно, не убывает, то она стабилизируется на числе, не большем k^2.

5. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $MA\cdot MC + MB\cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

а) [6] вписанный; **б**) [6] описанный. *(Наири Седракян)*

Решение. **а**) Опустим перпендикуляры MP, MQ, MR, MT на прямые AB, BC, CD, DA соответственно. Тогда $S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} + S_{DMA} \le (S_{AMP} + S_{BMP}) + (S_{BMQ} + S_{CMQ}) + (S_{CMR} + S_{DMR}) + (S_{DMS} + S_{AMT}) = (S_{AMP} + S_{CMR}) + (S_{BMP} + S_{DMR}) + (S_{BMQ} + S_{DMT}) + (S_{CMQ} + S_{AMT})$. Заметим, что прямоугольные треугольники AMP и CMR имеют равные катеты MP и MR, поэтому из них можно сложить треугольник Δ, две стороны которого равны MA и MC, а значит, $S_{AMP} + S_{CMR} = S_\Delta \le ½\ MA{\cdot}MC$. Аналогично $S_{BMP} + S_{DMR} \le ½\ MB{\cdot}MD$, $S_{BMQ} + S_{DMS} \le ½\ MB{\cdot}MD$, $S_{CMQ} + S_{AMS} \le ½\ MA{\cdot}MC$. Следовательно, $S_{ABCD} \le MA{\cdot}MC + MB{\cdot}MD$. Из условия видно, что все предыдущие неравенства на самом деле являются равенствами. Это значит, что, во-первых, точки P, Q, R, T лежат на соответствующих сторонах четырёхугольника и, во-вторых, треугольник Δ прямоугольный, то есть $\angle MAP + \angle MCR = 90°$. Аналогично $\angle MAD + \angle MCQ = 90°$, откуда $\angle BAD + \angle BCD = (\angle MAP + \angle MCR) + (\angle MAT + \angle MCQ) = 180°$, то есть четырёхугольник вписанный.

б) Из прямоугольного треугольника Δ (см. **а**) видно, что $AP + RC = \sqrt{MA^2 + MC^2}$. Аналогично $BP + RD = \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Тогда $AB + CD = \sqrt{MA^2 + MC^2} + \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Вычисляя похожим образом сумму $BC + DA$, мы получим тот же результат.

Замечание. Можно доказать, что площадь любого вписано-описанного четырёхугольника $ABCD$ равна $MA{\cdot}MC + MB{\cdot}MD$, где M – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$.

6. Куб, состоящий из $(2n)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2n$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

а) [6] Докажите, что можно выбрать такие $2n^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

б) [6] Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

(Никита Гладков, Александр Зимин)

Решение. (*А. Шаповалов*) Пусть ребра куба параллельны осям координат.

а) Разобьём куб на слои толщиной 1, параллельные плоскости Oxy. Рассмотрим только спицы направлений Ox и Oy. В каждом слое найдём максимум числа таких спиц, идущих в одном направлении. Точно также найдём максимумы числа спиц для каждого слоя параллельного Oxz и параллельного Oyz. Пусть k – минимум из $6n$ этих максимумов.

Рассмотрим слой K, где максимум равен k. В слое можно выбрать $2n - k$ строк и $2n - k$ столбцов, через которые не проходят спицы слоя. На пересечении выбранных рядов есть $(2n - k)^2$ кубиков, их протыкают $(2n - k)^2$ спиц, перпендикулярных K. Покрасим эти $(2n - k)^2$ спиц в синий цвет. Выберем грань P куба, перпендикулярную слою K. Рассмотрим слои, параллельные P и не содержащие синих спиц. Их ровно k. В каждом таком слое можно выбрать не менее k спиц одного направления, всего не менее k^2 спиц. Добавим к ним синие спицы. По известному неравенству

$$k^2 + (2n - k)^2 \ge ½\,(k + (2n - k))^2 = 2n^2.$$

б) Ответ. $2n^2$ спиц. Выделим в нашем кубе два меньших куба со стороной n, примыкающие к противоположным вершинам. Они состоят из $2n^3$ единичных кубиков. Проткнём каждый выделенный кубик тремя перпендикулярными спицами. Тогда и все невыделенные единичные кубики тоже проткнуты. Заметим, что каждая спица протыкает ровно n выделенных кубиков. Значит, если спицы выбраны так, что никакой кубик не проткнут дважды, то спиц не более чем $2n^3 : n = 2n^2$.

7. [12] Некоторые из чисел 1, 2, 3, ..., n покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b - c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше чем $\varphi(n)$. (*Александр Семенов*)

Лемма. Пусть D – некоторое множество различных простых делителей числа n. Количество натуральных чисел, не превосходящих n и не кратных ни одному числу из D, равно $n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Доказательство. Раскрыв скобки, получаем формулу включений-исключений. □

Пусть красных чисел больше $\varphi(n)$. Тогда некоторые красные числа имеют с n общий простой делитель. Пусть q – наибольшее из таких простых и a – красное число, кратное q. Для противоречия достаточно найти различные красные числа b и c, сравнимые по модулю $\frac{n}{q}$, а для этого достаточно показать, что $\varphi(n)$ больше количества возможных остатков красных чисел по модулю $\frac{n}{q}$.

По лемме, $\varphi(n) = n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$, где D – множество всех простых делителей у n, а указанное количество остатков не больше, чем $\frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Достаточно доказать, что $n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Сокращая на n и на скобки, в которых $p>q$, получаем

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\prod_{p\in D,\, p<q}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \frac{1}{q},\quad \text{что равносильно неравенству}\quad q-1 \geq \prod_{p\in D,\, p<q}\frac{p}{p-1}.$$

Оно верно, поскольку $q-1 = \frac{q-1}{q-2}\cdot\frac{q-2}{q-3}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}$.

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 15 марта 2020 г.

---

1. В строку записано 2020 натуральных чисел. Каждое из них, начиная с третьего, делится и на предыдущее, и на сумму двух предыдущих. Какое наименьшее значение может принимать последнее число в строке?

А. Грибалко

2. На высотах AA_0, BB_0, CC_0 остроугольного неравностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

Е. Бакаев

3. На клетчатой плоскости отметили 40 клеток. Всегда ли найдётся клетчатый прямоугольник, содержащий ровно 20 отмеченных клеток?

М. Евдокимов

4. Для бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ её *первая производная* — это последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ (где $n = 1, 2, \ldots$), а её *k-я производная* — это первая производная её $(k-1)$-й производной $(k = 2, 3, \ldots)$. Назовём последовательность *хорошей*, если она и все её производные состоят из положительных чисел. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — хорошие последовательности, то и $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots$ — хорошая последовательность.

Р. Салимов

5. На сфере радиуса 1 дан треугольник, стороны которого — дуги трёх различных окружностей радиуса 1 с центром в центре сферы, имеющие длины меньше π, а площадь равна четверти площади сферы. Докажите, что четырьмя копиями такого треугольника можно покрыть всю сферу.

А. Заславский

6. Дан бесконечный запас белых, синих и красных кубиков. По кругу расставляют любые N из них. Робот, став в любое место круга, идёт по часовой стрелке и, пока не останется один кубик, постоянно повторяет такую операцию: уничтожает два ближайших кубика перед собой и ставит позади себя новый кубик того же цвета, если уничтоженные одинаковы, и третьего цвета, если уничтоженные двух разных цветов. Назовём расстановку кубиков *хорошей*, если цвет оставшегося в самом конце кубика не зависит от того, с какого места стартовал робот. Назовём N *удачным*, если при любом выборе N кубиков все их расстановки хорошие. Найдите все удачные N.

И. Богданов

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 15 марта 2020 года.

Предварительные решения задач.

У-1. *В строку записано 2020 натуральных чисел. Каждое из них, начиная с третьего, делится и на предыдущее, и на сумму двух предыдущих. Какое наименьшее значение может принимать последнее число в строке?* *(А. Грибалко)*

Ответ: 2019!. **Решение.** *Пример.* Условию задачи, очевидно, удовлетворяют числа 1, 1, 2!, 3!, ..., 2019!, так как при любом натуральном k число $(k+2)!$ делится как на $(k+1)!$, так и на $(k+1)!+k! = k!(k+2)$.

Оценка. Пусть a, b, c — три подряд идущих числа в строке, но не первые три числа. Докажем, что $\frac{c}{b} \geqslant \frac{b}{a}+1$. По условию, $\frac{b}{a}=x$, $\frac{c}{b}=y$, где x и y натуральные. Тогда $c = by = axy$, причём c делится на $b+a = ax+a = a(x+1)$. Получаем, что axy делится на $a(x+1)$, откуда xy делится на $x+1$, и так как x и $x+1$ взаимно просты, y делится на $x+1$, то есть $y \geqslant x+1$, что и требовалось.

Заметим, что первые два числа не меньше 1 каждое. Третье число больше второго (так как делится на сумму второго и первого), а значит, хотя бы в два раза больше второго (так как делится на него и не равно ему). По доказанному выше, четвёртое число тогда хотя бы в 3 раза больше третьего, пятое — хотя бы в 3 раза больше четвёртого, и так далее, откуда по индукции получаем, что k-е число не меньше, чем $(k-1)!$ при всех натуральных k.

У-2. *На высотах AA_0, BB_0, CC_0 остроугольного неравностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.* *(Е. Бакаев)*

Решение. Заметим, что если O — центр описанной окружности, то $\angle ACO = \angle C_0CB = \pi/2 - \angle B$. Следовательно, точки O и C_1 симметричны относительно биссектрисы угла C и $IC_1 = IO$, где I — центр вписанной окружности. Аналогично $IO = IA_1 = IB_1$, то есть I — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

У-3. *На клетчатой плоскости отметили 40 клеток. Всегда ли найдётся клетчатый прямоугольник, содержащий ровно 20 отмеченных клеток?* *(М. Евдокимов)*

Ответ. Нет. **Решение 1.** Рассмотрим клетчатый квадрат размером 11×11 и удалим из него внутренний центральный квадрат 9×9, оставив только рамку толщиной 1. В рамке будет как раз 40 клеток. Докажем, что на плоскости нет клетчатого прямоугольника, содержащего ровно 20 из этих 40 клеток.

Допустим, такой прямоугольник есть. Пусть в нём есть клетки из обеих вертикальных сторон рамки. Тогда каждая горизонтальная сторона рамки либо полностью включена в прямоугольник, либо вовсе не включена. Если включена ровно одна горизонтальная сторона, число клеток в прямоугольнике нечётно, если обе — клеток 40 (слишком много), а если ни одной — клеток максимум 9+9=18 (слишком мало).

Значит, в прямоугольнике могут быть клетки лишь из одной вертикальной стороны рамки, и, аналогично, лишь из одной горизонтальной стороны рамки. Но эти стороны соседние, и суммарно в них максимум 19 клеток — слишком мало. Противоречие.

Решение 2. Рассмотрим клетчатый прямоугольник $[1,14]\times[1,3]$, и удалим из него клетки $(7,1)$ и $(7,3)$. Останется ровно 40 клеток. Предположим, что нашёлся клетчатый прямоугольник, в котором ровно 20 отмеченных клеток. Он может затрагивать одну, две или три горизонтали с номерами $1, 2, 3$.

Если он затрагивает одну горизонталь, то в нём не более 14 отмеченных клеток.

Если он задевает 2 горизонтали (одна из них — вторая), то он задевает вертикаль с номером 7 (иначе в нём не более 14 клеток). Тогда эта вертикаль вносит в прямоугольник нечётное число отмеченных клеток, а остальные – чётное. Поэтому общее число отмеченных клеток в прямоугольнике нечётно.

Если он задевает все три горизонтали, то число отмеченных клеток в нём либо кратно 3 (если он не задевает 7-й вертикали), либо имеет остаток 1 при делении на 3 (иначе).

В каждом из случаев получаем противоречие.

Замечание. Возможны другие решения. Например, подходит квадрат 7×7 с вырезанным центральным квадратом 3×3, но доказательство более длинное.

У-4. *Для бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ её* первая производная *— это последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ (где $n = 1, 2, \ldots$), а её k-я* производная *— это первая производная её $(k-1)$-й производной $(k = 2, 3, \ldots)$. Назовём последовательность* хорошей*, если она и все её производные состоят из положительных чисел. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — хорошие последовательности, то и $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots$ — хорошая последовательность.* *(Р. Салимов)*

Решение. Пусть $c_n = a_n \cdot b_n$. Тогда $c'_n = a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n = a_{n+1} \cdot (b_{n+1} - b_n) + b_n \cdot (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} \cdot b'_n + b_n \cdot a'_n$. Так как в сумме все слагаемые положительны, первая производная у c_n (и у произведения любых двух хороших последовательностей) состоит из положительных чисел. Кроме того, мы представили c'_n в виде суммы двух произведений хороших последовательностей. Далее по индукции, пользуясь тем, что производная суммы — это сумма производных и первая производная произведения хороших последовательностей положительна, получаем, что и все производные у c_n состоят из положительных чисел.

У-5. *На сфере радиуса 1 дан треугольник, стороны которого — дуги трёх различных окружностей радиуса 1 с центром в центре сферы, имеющие длины меньше π, а площадь равна четверти площади сферы. Докажите, что четырьмя копиями такого треугольника можно покрыть всю сферу.* *(А. Заславский)*

Решение 1. Пусть O — центр сферы, а ABC — данный сферический треугольник. По формуле площади сферического треугольника $\pi = S_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$, то есть $\angle A + \angle B + \angle C = 2\pi$. (Доказательство формулы площади заключается в применении формулы включений-исключений к трем полусферам, пересечением которых является данный треугольник.)

Построим на сфере точку D, лежащую с C в разных полуплоскостях относительно OAB, и такую, что $\angle DAB = \angle CBA$ и $\angle DBA = \angle CAB$ (имеются в виду сферические углы; иначе говоря, точка D получена из C композицией симметрии относительно OAB и симметрии относительно серединного перпендикуляра к AB). Тогда треугольники ABC и BAD равны. Значит, $BD = AC$ и $AD = BC$. Но из условия имеем $\angle DAC = \angle DBC = \angle ACB$, следовательно, сферические треугольники CDA и DCB также равны треугольнику ABC. Четыре полученных треугольника покрывают сферу.

Решение 2. Пусть A, B, C — вершины данного треугольника. Покажем, что треугольник ABC остроугольный. Действительно, пусть $\angle ACB \geqslant \pi/2$. Если плоскость $\alpha = ABC$ содержит центр O сферы, то сферический треугольник ABC вырожден, и его площадь не такая, как надо. Иначе α отрезает от сферы «шапочку» площади меньше полусферы. Далее, прямая AB (нестрого) разделяет C и проекцию O на ABC; значит, часть шапочки, отсекаемая плоскостью OAB и содержащая C, не больше её половины. Наконец, сферический треугольник ABC лежит в этой области, площадь которой меньше четверти площади сферы — противоречие.

Итак, треугольник ABC остроугольный; тогда существует равногранный тетраэдр $ABCD$ (точки D и O лежат в одной полуплоскости относительно ABC). Пусть O' — центр этого равногранного тетраэдра. Тогда телесные углы $O'ABC$, $O'BCD$, $O'CDA$, $O'DAB$ разбивают пространство, то есть каждый из них равен четверти площади единичной сферы. Однако, если O' ближе в ABC, чем O, то этот телесный угол больше, чем $OABC$, а если O' дальше — то меньше. Оба случая невозможны; значит, $O = O'$, и упомянутые телесные углы дают требуемое разбиение сферы на 4 части.

У-6. *Дан бесконечный запас белых, синих и красных кубиков. По кругу расставляют любые N из них. Робот, став в любое место круга, идёт по часовой стрелке и, пока не останется один кубик, постоянно повторяет такую операцию: уничтожает два ближайших кубика перед собой и ставит позади себя новый кубик того же цвета, если уничтоженные одинаковы, и третьего цвета, если уничтоженные двух разных цветов. Назовём расстановку кубиков* хорошей*, если цвет оставшегося в конце кубика не зависит от места, с которого стартовал робот. Назовём N* удачным*, если при любом выборе N кубиков все их расстановки хорошие. Найдите все удачные N.* *(И. Богданов)*

Ответ. Степени двойки. **Решение 1.** Присвоим цветам остатки $0, 1, 2$ от деления на 3 произвольным образом. Все операции с ними также будем производить по модулю 3. Тогда операция, производимая роботом, такова: если уничтожаются кубики цветов a и b, то появляется кубик цвета $-a - b$.

Если $N = 2^k$, то после каждого прохода полного круга количество кубиков уменьшается вдвое, а их сумма меняет знак. Значит, в конце получится кубик цвета $(-1)^k(a_1 + \ldots + a_N)$, вне зависимости от места старта. Мы доказали, что степени двойки удачны.

Если $N = 2^k + d$, где $1 \leqslant d \leqslant 2^k - 1$, то рассмотрим расстановку из одного красного кубика и $N - 1$ белого. Если робот стартует перед красным кубиком, то после d ходов останутся один синий кубик и $2^k - 1$ белых. Если робот стартует непосредственно после красного кубика, то через d ходов останутся один красный кубик и $2^k - 1$ белых. Вышеприведённые аргументы для степени двойки показывают, что в этих двух ситуациях итоговые цвета будут разными, то есть N неудачно.

Решение 2. Заметим сразу, что, если чётное число N удачно, то и $N/2$ тоже. Действительно, если в расстановке N кубиков робот будет начинать только с чётных позиций, то после $N/2$ ходов он будет получать одну и ту же расстановку, в которой он стоит на всевозможных позициях. Поскольку каждая расстановка $N/2$ кубиков может быть получена таким образом, получаем требуемое.

Рассмотрим две расстановки, отличающиеся ровно в одном месте. Запустим в них по роботу параллельно; тогда получающиеся расстановки всегда будут отличаться ровно в одном месте. В частности, итоговые цвета будут различны.

Отсюда уже следует, что все нечётные $N = 2k+1 > 1$ (а значит, по замечанию, и все N, кроме степеней двойки) неудачны. Действительно, начнём с расстановки с одним красным и $2k$ белыми кубиками. Если робот стоял перед красным кубиком, через $k+1$ ход останутся один красный и $k-1$ белый кубик, робот стоит после красного. Если же робот стартует непосредственно после красного, через $k+1$ ход останутся один синий и $k-1$ белых кубиков, робот стоит непосредственно после синего. Как показано выше, итоговые цвета в этих двух ситуациях будут разными.

Покажем теперь, что, если N — степень двойки, то итоговый цвет не зависит от места старта. Для этого сделаем ещё одно наблюдение по поводу замены цвета. Если цвет одного кубика в расстановке сменить на следующий в циклическом порядке Б$\to$К$\to$С$\to$Б, то после одного использования цвет сдвинется в *противоположную* сторону. Значит, если $N = 2^k$, любая такая замена исходного кубика приведёт к сдвигу цвета итогового кубика в одну и ту же сторону. Осталось заметить, что две расстановки, отличающиеся поворотом, получаются из расстановки всех белых кубиков за одинаковое количество замен «вперёд по циклу».