

Алија Муминагиќ, Данска
Јенс Карстенсен, Данска

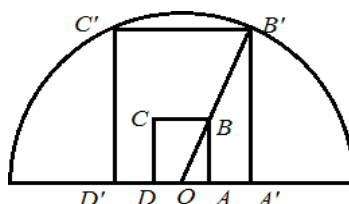
ПО РЕШЕНИЕТО НА ЕДНА ЗАДАЧА

На часовите по математика јчеста активност на учениците е решавањето задачи. Меѓутоа, малку ученици по успешното решавање на одредена задача, разгледуваат дали истата задача може да ја решат и на друг начин, дали тргнувајќи од дадената задача може да состават нива задача, дали во литературата постојат слични задачи и истите да ги решат. Во следните разгледувања ќе покажеме како по решавањето на дадена задача може да се состави нова задача и иостата да се реши.

Задача 1. Во полукружница со радиус r да се впише квадрат.

Решение. Прв начин. *Анализа.* Нека е дадена полукружница $k(O, r)$ и нека во неа е впишан квадрат $A'B'C'D'$ (цртеж десно).

На отсечката OB' избираме произволна точка B и од истата повлекуваме нормала на дијаметарот на полукружницата и нека пресечната точка на нормалата и дијаметарот е точката A . Над отсечката AB го конструираме квадратот $ABCD$. Сега квадратите $ABCD$ и $A'B'C'D'$ се хомотетични со центар на хомотетија O и коефициент на хомотетија $d = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.



Конструкција. Последователно имаме:

- ја конструираме полукружницата $k(O, r)$,
- во внатрешноста на полукружницата $k(O, r)$ над нејзиниот дијаметар конструираме квадрат $ABCD$ за кој центарот O е средината на страната DA ,
- ги повлекуваме правите OB и OC и во пресеците на овие прави со полукружницата ги наоѓаме точките B' и C' , соодветно,
- од точките B' и C' повлекуваме нормали на дијаметарот на полукружницата и во пресек на истите со дијаметарот на полукружницата ги определуваме точките A' и B' , со што е конструиран бараниот квадрат $A'B'C'D'$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има едно и единствено решение.

Втор начин. *Анализа.* Нека е дадена полукружницата $k(O, r)$ и нека во неа е впишан квадратот $ABCD$ (цртеж долу десно). Нека должината на страната на квадратот е $\overline{AB} = 2x$. Јасно, O е средина на страната AB , односно $\overline{AO} = \overline{BO} = x$. Од Питагоровата теорема, применета на триаголникот OBC , следува $r^2 = x^2 + (2x)^2$, т.е. $r = x\sqrt{5}$, од каде добиваме $x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$.

Конструкција. Треба да конструираме отсечка со должина $x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. За та цел прво конструираме отсечка со должина

$$x_1 = r\sqrt{5} = \sqrt{r^2 + (2r)^2},$$

така што во точката E на дијаметарот EF на полукружницата $k(O, r)$ конструираме нормала и на неа ја наоѓаме определуваме точка G таква што $\overline{EG} = r$. Јасно, $\overline{GF} = x_1 = r\sqrt{5}$. Понатаму,

отсечката GF ја делиме на пет еднакви дела и ја добиваме отсечката $\overline{GH} = x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. Понатаму, на дијаметарот EF определуваме точки A и B такви што $\overline{AO} = \overline{OB} = x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. Конечно, во точките A и B повлекуваме нормали на дијаметарот и во пресек со полукружницата ги наоѓаме соодветно точките D и C , со што бараниот квадрат $ABCD$ е конструиран.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има едно и единствено решение. ■

Задача 2. Докажи дека плоштината на квадратот впишан во полукружницата $k(O, r)$ е еднаква на $\frac{2}{5}$ од плоштината на квадратот впишан во кружницата $k'(O, r)$.

Решение. Прв начин. Според вториот начин на решавање на задача 1 должината на страната на квадратот $ABCD$ впишан во полукружницата е еднаква на $2x = \frac{2r\sqrt{5}}{5}$. Оттука следува дека неговата плоштина е

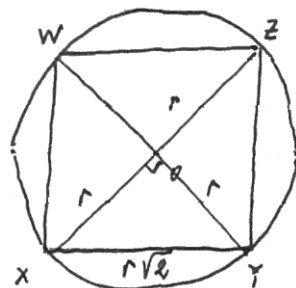
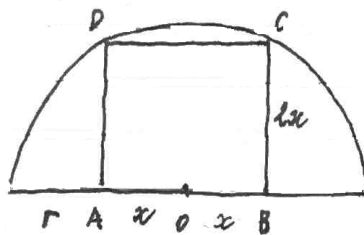
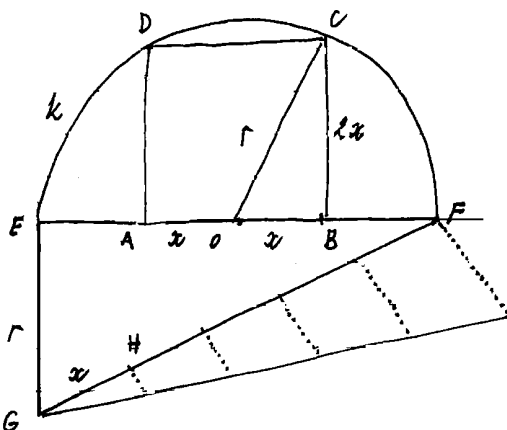
$$P_{\square ABCD} = (2x)^2 = \left(\frac{2r\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{4r^2}{5}.$$

Според Питагоровљата теорема должината на страната на квадратот $XYZW$, кој е впишан во кружницата $k'(O, r)$ е еднаква на

$$\overline{XR} = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2},$$

па затоа неговата плоштина е

$$P_{\square XYZW} = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2.$$



Конечно,

$$\frac{P_{\square ABC}}{P_{\square XYZW}} = \frac{\frac{4r^2}{5}}{2r^2} = \frac{2}{5},$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Како и при првиот начин на решавање на задачата наоѓаме

$$P_{\square XYZW} = 2r^2.$$

Нека $\overline{OE} = \overline{OF} = r$ и $\overline{OA} = \overline{OB} = x$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{EB} = r + x$ и $\overline{BF} = r - x$. Понатаму, правоаголните триаголници EFC , ECB и CFB се слични (зошто), од

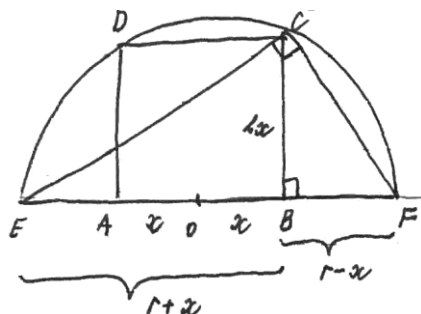
што следува $\frac{2x}{r+x} = \frac{r-x}{2x}$, т.е. $4x^2 = r^2 - x^2$,

па затоа $x = \frac{r}{\sqrt{5}}$. Според тоа,

$$P_{\square ABCD} = (2x)^2 = \left(\frac{2r}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4r^2}{5},$$

па затоа

$$\frac{P_{\square ABC}}{P_{\square XYZW}} = \frac{\frac{4r^2}{5}}{2r^2} = \frac{2}{5}.$$



Трет начин. Квадратите $ABCD$ и $XYZW$ ги цртаме во квадратна мрежа:

$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JE} = 1$,
(цртеж десно). Според тоа,

$$P_{\square ABCD} = 2^2 = 4.$$

Понатаму, од правоаголниот триаголник IXY следува:

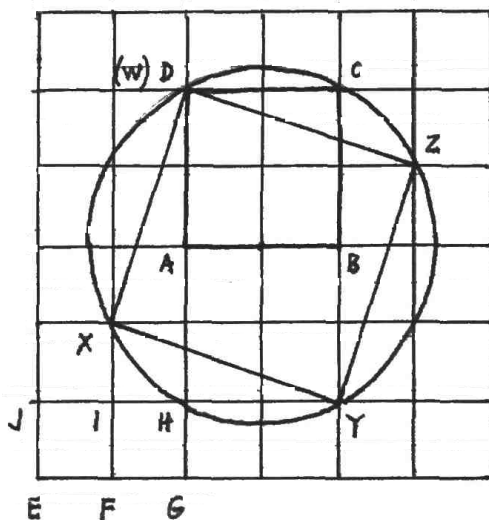
$$\overline{XY}^2 = \overline{IY}^2 + \overline{IX}^2 = 3^2 + 1^2 = 10,$$

па затоа

$$P_{\square XYZW} = \overline{XY}^2 = 10.$$

Конечно,

$$\frac{P_{\square ABC}}{P_{\square XYZW}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}. \blacksquare$$



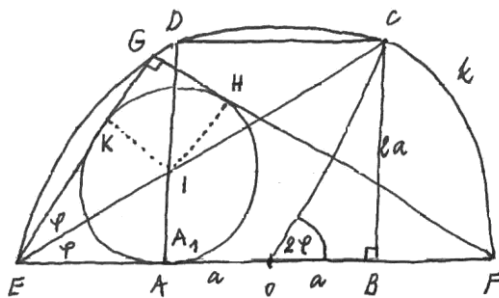
Задача 3. Квадрат $ABCDE$ пишан во полукружница со радиус EF . Точката G припаѓа на полукружницата и притоа важи $P_{\square ABCD} = P_{\triangle EFG}$. Докажи дека центарот I на впишаната кружница во $\triangle EFG$ припаѓа на отсечката AD .

Решение. Нека $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 2a$ и O е центарот на дадената полукружница k со дијаметар EF . Нека $\angle BOC = 2\varphi$ (види цртеж). Тогаш $\angle FEC = \varphi$ (централен и периферен агол над ист лак).

Нека G е точка на полуокружницата таква што $\angle AEG = 2\varphi$. Триаголниците EFG и OBC се правоаголници и имаат еден еднаков остар агол, па затоа се слични. Сега од $\overline{EF} : \overline{OC} = 2 : 1$ следува

$$P_{\triangle EFG} = 4P_{\triangle OBC}$$

и бидејќи $P_{\square ABCD} = 4P_{\triangle OBC}$ следува дека $P_{\square ABCD} = P_{\triangle EFG}$, што значи дека точката G го задоволува условот на задачата.



Да го разгледаме правоаголниот триаголник OBC чии катети се $\overline{OB} = a$ и $\overline{BC} = 2a$, а хипотенузата е $\overline{OC} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$. Значи, односот на неговите страни е $1 : 2 : \sqrt{5}$. Истиот однос важи и за страните на сличниот триаголник EFG , т.е. $\overline{FG} = 2\overline{EG} = 4\overline{OB} = 2\overline{AB} = 4a$.

Со H и K да ги означиме допирните точки на впишаната кружница во триаголникот EFG , чиј центар е I . Нека A_1 е проекцијата на точката I на хипотенузата EF . Тогаш $\overline{EA_1} = \overline{EF}$ и $\overline{AF} = \overline{FH}$, како тангентни отсечки, па затоа

$$\begin{aligned} 2\overline{A_1O} &= 2(\overline{EO} - \overline{EA_1}) = 2\overline{EO} - 2\overline{EA_1} = (\overline{EF} - \overline{EA_1}) - \overline{EA_1} = \overline{AF} - \overline{EK} \\ &= \overline{FH} - \overline{EK} = \overline{FH} - \overline{EK} + (\overline{GH} - \overline{GK}) = \overline{FH} + \overline{GH} - (\overline{EK} + \overline{GK}) \\ &= \overline{FG} - \overline{GE} = 4a - 2a = 2a = 2\overline{AO}. \end{aligned}$$

Според тоа, $\overline{A_1O} = \overline{AO}$, па затоа $A_1 \equiv A$, од што следува дека центарот I на впишаната кружница во $\triangle EFG$ припаѓа на отсечката AD . ■

Задача 4. При ознаки како во решението на задача 3, докажи точката K ја дели отсечката EG во однос златен пресек.

Решение. Од решението на задача 3 следува дека EC е симетрала на $\angle FEG$, па затоа та минува низ центарот I на впишаната кружница. Да означиме $x = \overline{EA} = \overline{BF}$. Од правоаголниот триаголник EFC следува

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{EB} \cdot \overline{BF} \\ (2a)^2 &= (x + 2a)x \\ x^2 + 2ax - 4a^2 &= 0 \\ x &= (\sqrt{5} - 1)a = 2a \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 2a\phi_1. \end{aligned}$$

Познато е дека за радиусот на впишаната кружница во триаголникот EFG важи

$$\overline{KG} = R = \frac{1}{2}(\overline{EG} + \overline{FG} - \overline{EF}) = \frac{1}{2}(2a + 4a - 2\sqrt{5}a) = a(3 - \sqrt{5}).$$

Според тоа,

$$\frac{\overline{KG}}{\overline{EK}} = \frac{r}{x} = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2a\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi_1,$$

што значи дека точката K ја дели отсечката EG во однос златен пресек, што и требаше да се докаже. ■

Литература

1. Малчески, Р., Малчески, А. (1995 и 2019). За златниот пресек, Нумерус и Армаганка, Скопје
2. Иванова, А., Велинов, Д. (2018 и 2019). Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус и Армаганка, Скопје