Ирена Стојменовска, Скопје

ИДЕНТИТЕТИ ОД ИНВЕРЗНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

На конкретни примери ќе илустрираме како со помош на елементарни знаења од тригонометријата, на едноставен начин, можеме да решаваме тригонометриски равенки (или да упростуваме тригонометриски изрази) кои се однесуваат на инверзните тригонометриски функции. Во натамошните разгледувања, заради еднозначност на инверзните функции, ќе сметаме дека тригонометриските функции се зададени на основната периода.

Задача 1. Реши ја равенката $\arcsin x + \arccos\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6}$. (1)

Решение: Нека $\arcsin x = \theta \Rightarrow \sin\theta = x$, а $\arccos\frac{x}{2} = \varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x}{2}$, со што дадената равенка добива облик

$$\theta + \varphi = \frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta + \varphi) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}$$

одовде, (имајќи во предвид дека $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \pi$), добиваме:

$$x\frac{x}{2} + \sqrt{1-x^2}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{4-x^2} = 1-x^2.$$

Со квадрирање на двете страни од последната равенка (внимавај: со тоа може да "вметнеш" уште некое решение), добиваме:

$$4-5x^2+x^4 = 1-2x^2+x^4 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

но, за $x=-1$, $\arcsin(-1) + \arccos(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \ne \frac{5\pi}{6}$,

значи $x=-1$ не е решение на (1).

Лесно се проверува дека $x=1$ ја задоволува равенката (1), па тоа е и нејзино единствено решение.

Задача 2. Упрости го изразот $arctgx + arctg\frac{1-x}{1+x}$.

Решение: Нека $\alpha = arctgx \Rightarrow tg\alpha = x$; $\beta = arctg\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow tg\beta = \frac{1-x}{1+x}$.

Ползувајќи $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$, имаме

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\frac{1-x}{1+x}} = \frac{x^2+1}{1+x^2} = 1$$

Следува, $tg(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \alpha+\beta = arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$,

значи $arctg\,x + arctg\frac{1-x}{1+x} \equiv \frac{\pi}{4}$.

Задача 3. Упрости го изразот $\sin(2\,arctg\, x)$.

Решение: Нека $\operatorname{arctg} x = \theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = x$. Тогаш

$$\sin(2\operatorname{arctg} x) = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta;$$

поради $\sin^2\theta = \dfrac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta}$; $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+tg^2\theta}$; и поради $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, имаме

$$\sin(2\operatorname{arctg} x) = 2\left(\pm\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \pm 2\frac{|x|}{1+x^2}$$

$$= \begin{cases} 2\dfrac{x}{1+x^2}, & 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -2\dfrac{(-x)}{1+x^2}, & -\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0 \end{cases} = \frac{2x}{1+x^2}$$

значи $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Задача 4. Докажи дека $\operatorname{arctg} 3 + 2\operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arcctg} 3$.

Решение: Ставајќи $\operatorname{arctg} 3 = \theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 3$ и $\operatorname{arctg} 2 = \varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 2$, левата страна од разгледуваното равенство добива облик $\theta + 2\varphi$.

Поради $\operatorname{tg}(\theta + 2\varphi) = \dfrac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}2\varphi}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\varphi}$ и поради $\operatorname{tg}2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \dfrac{4}{1-4} = -\dfrac{4}{3}$,

добиваме: $\operatorname{tg}(\theta + 2\varphi) = \dfrac{3-\dfrac{4}{3}}{1-3(-\dfrac{4}{3})} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \theta + 2\varphi = \operatorname{arc tg}\dfrac{1}{3} = \operatorname{arcctg} 3$

т.е. $\operatorname{arctg} 3 + 2\operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arcctg} 3$, што требаше да се докаже.

Задача5. Реши ја равенката $\arcsin\dfrac{x}{x-1} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{\pi}{2}$. (2)

Решение: Од условот $-1 \le \dfrac{x}{x-1} \le 1$ имаме $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$. Во продолжение ќе направиме уште неколку ограничувања. Поради $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin\dfrac{x}{x-1} \le \dfrac{\pi}{2}$ $-\pi < 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1} < \pi$, и непарноста на функциите $y = \arcsin x$ и $y = arctgx$, (2) е исполнето кога е исполнет еден од следните два услова:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} \ge 0 \\ \dfrac{1}{x+1} > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} > 0 \end{cases}$$

од каде следува $x \in (-1,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$, па во согласност со претходниот услов, решенијата на равенката (2) ќе ги бараме во интервлот $\left(-1, \frac{1}{2}\right]$.

Нека $\quad \arcsin \frac{x}{x-1} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x-1} = \sin\alpha$,

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} = \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+1} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

со што равенката (2) добива облик $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \cos\beta$.

Поради $\quad \cos\beta = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$, добиваме

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1-\frac{1}{(x+1)^2}}{1+\frac{1}{(x+1)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x-1} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$$

$$\Rightarrow \quad x(x^2+2x+2) = (x^2+2x)(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -4$$

Но, $-4 \notin \left(-1, \frac{1}{2}\right]$ значи $x = 0$ е единствено решение на разгледуваната равенка.

Задачи за самостојна работа

Докажи дека:

1. $\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}$
2. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$
3. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \arccos\frac{3}{5}$
4. $2\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \arccos\frac{7}{25}$
5. $4\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{24}{7} = \pi$

Реши ги равенките:

1. $\operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} x$
2. $\operatorname{arctg}(1+x) + \operatorname{arctg}(1-x) = \operatorname{arctg} 2$

Упрости ги изразите:

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$
2. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)$