Junior Balkan MO 2004

Novi Sad, Serbia and Montenegro

$\boxed{1}$ Prove that the inequality

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

holds for all real numbers x and y, not both equal to 0.

$\boxed{2}$ Let ABC be an isosceles triangle with $AC = BC$, let M be the midpoint of its side AC, and let Z be the line through C perpendicular to AB. The circle through the points B, C, and M intersects the line Z at the points C and Q. Find the radius of the circumcircle of the triangle ABC in terms of $m = CQ$.

$\boxed{3}$ If the positive integers x and y are such that $3x + 4y$ and $4x + 3y$ are both perfect squares, prove that both x and y are both divisible with 7.

$\boxed{4}$ Consider a convex polygon having n vertices, $n \geq 4$. We arbitrarily decompose the polygon into triangles having all the vertices among the vertices of the polygon, such that no two of the triangles have interior points in common. We paint in black the triangles that have two sides that are also sides of the polygon, in red if only one side of the triangle is also a side of the polygon and in white those triangles that have no sides that are sides of the polygon.

Prove that there are two more black triangles that white ones.

ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Нови Сад, 26.06.2004 -1.07.2004

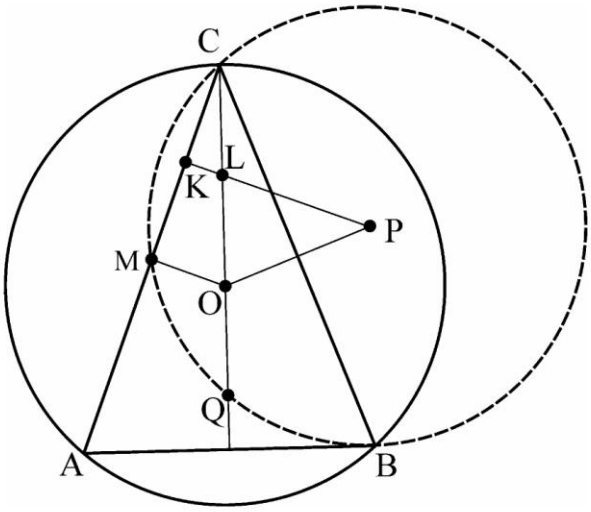
1. Докажи дека $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, за сите реални броеви x и y.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

За доказ на тврдењето преостанува да докажеме дека важат неравенствата $x+y \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$ и $x^2-xy+y^2 \ge \frac{x^2+y^2}{2}$. ♦

2. Нека ABC е рамнокрак триаголник со краци AC=BC, M е средина на AC и CH е права нормална на AB. Кружницата опишана околу триаголникот BCM ја сече CH во точка Q. Најди го радиусот на кружницата опишана околу триаголникот ABC, ако CQ=m.



црт. 1.

Решение. Нека P е центарот на кружницата k_1 опишана околу триаголникот BCM, а O е центарот на кружницата опишана околу триаголникот ABC (црт 1). Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак точката O лежи на правата CH. Нека K е средина на отсечката MC и KP ја сече CH во точка L. Бидејќи KP и OM се нормални на AC, добиваме дека KP||OM. Заради MK=KC следува дека OL=LC. Од друга страна OP е нормална на BC, па ∠LOP=∠COP=90^0−∠BCH. Исто така важи ∠OLP=∠CLK=90^0−∠ACH. Бидејќи ABC е рамнокрак триаголник имаме ∠BCH=∠ACH, од каде што следува дека ∠LOP=∠OLP односно LP=OP. Од CP=PQ следува дека ∠CLP=∠QOP односно CL=OQ. Значи, имаме CL=LO=OQ, па според тоа $CO = \frac{2}{3}CQ$, односно радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC изнесува $R = \frac{2}{3}m$. ♦

3. Ако за природните броеви x и y броевите $3x+4y$ и $4x+3y$ се потполни квадрати, тогаш x и y се деливи со 7.

Решение. Нека

$$3x+4y=m^2\ ,\ 4x+3y=n^2. \qquad (1)$$

Тогаш

$$7(x+y)=m^2+n^2 \qquad (2)$$

од каде што заклучуваме дека $7|m^2+n^2$.

Нека $m=7k+r$, $r\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Тогаш

$$m^2\equiv u(\mathrm{mod}\ 7),\ u\in\{0,1,2,4\}.$$

Слично,

$$n^2\equiv v(\mathrm{mod}7),\ v\in\{0,1,2,4\}.$$

Според тоа $m^2+n^2\equiv 0(\mathrm{mod}7)$ кога $u=v=0$ или $m^2+n^2\equiv w(\mathrm{mod}7)$, каде $w\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Но, заради (2) имаме дека

$$m^2+n^2\equiv 0(\mathrm{mod}7)$$

па според тоа $u=v=0$.

Оттука следува дека

$$m^2+n^2\equiv 0(\mathrm{mod}7^2).$$

Сега, заради (2) имаме

$$7(x+y)\equiv 0(\mathrm{mod}7^2)$$

па

$$x+y\equiv 0(\mathrm{mod}7). \qquad (3)$$

Од (1) следува дека $x-y=n^2-m^2$. Со аналогна постапка добиваме дека $n^2-m^2\equiv 0(\mathrm{mod}7^2)$, односно

$$x-y\equiv 0(\mathrm{mod}7). \qquad (4)$$

Заради (3) и (4) имаме $x+y=7k$, $x-y=7l$, каде k,l се природни броеви. Бидејќи $2x=7(k+l)$, $2y=7(k-l)$, каде $k+l$ и $k-l$ се природни броеви, следува дека $7|2x$ и $7|2y$, односно $7|x$ и $7|y$.♦

4. Конвексен многуаголник со n страни е поделен на триаголници така што темињата на триаголниците се темиња на многуаголникот. Ги боиме црно оние триаголници кои имаат две заеднички страни со страните на многуаголникот, црвено ако имаат по една заедничка страна и бело оние триаголници кои имаат само заеднички темиња со многуаголникот. Докажи дека бројот на црни триаголници е за два поголем од бројот на бели триаголници.

Решение. Да го означиме со b,r,w бројот на црни, црвени и бели триаголници, соодветно. Лесно се докажува дека многуаголникот е поделен на $n-2$ триаголници, па $b+r+w=n-2$. Секоја страна од многуаголникот е страна на точно еден триаголник од поделбата, па $2b+r=n$. Од последните две равенства следува дека $w=b-2$. ♦