

XXVII олимпијада

1. Нека d е природен број различен од 2, 5, 13. Докажи дека од множеството $\{2, 5, 13, d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така што $ab-1$ не е квадрат на цел број.

Решение. Доволно е да докажеме дека барем еден од броевите $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ не е полн квадрат. Да го претпоставуваме спротивно, т.е. дека постојат цели броеви x, y, z такви што $2d = x^2 + 1$, $5d = y^2 + 1$, $13d = z^2 + 1$. Според тоа x е непарен, т.е. $x = 2x' + 1$, па $2d = 4x'^2 + 4x' + 2$, што значи дека d е непарен; но тогаш y и z се парни. Нека u и v се цели броеви такви што $y = 2u$, $z = 2v$. Од $8d = z^2 - y^2$ добиваме $2d = (u-v)(u+v)$. За десната страна да е делива со 2 мора u и v да се со иста парност, но тогаш таа е делива и со 4, а левата не е делива со 4, што е противречност.

2. Во рамнина е даден $\triangle A_1 A_2 A_3$ и точка P_0 . Ставаме $A_s = A_{s-3}$ за секој цел број $s \geq 4$. Конструираме низа точки $P_0, P_1, P_2, \dots$ таква што секоја точка P_{k+1} се добива со ротација на точката P_k околу точката A_{k+1} за агол од 120° во насока на движењето на стрелките на часовникот. Докажи дека, ако $P_{1986} = P_0$, тогаш $\triangle A_1 A_2 A_3$ е рамностран.

Решение. Нека r_i е ротација околу A_i за 120° во насока на движењето на стрелките на часовникот. Композицијата $f = r_3 r_2 r_1$ е транслација за вектор $\vec{v}$ ($= \overrightarrow{P_0 P_3}$). Според тоа f^{662} е транслација за $662\vec{v}$, па затоа

$$f^{662}(P_0) = P_{1986} = P_0$$

е можно ако и само ако $\vec{v} = \vec{0}$, т.е. $P_3 = P_0$. Нема да анализираме што значи $P_3 = P_0$ за било кое P_0 , туку добиеното тврдење $r_1 r_2 r_3 = e$ ќе го примениме на A_1 . При тоа важи:

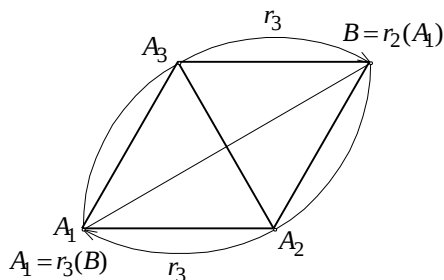
$$r_1(A_1) = A_1; \quad r_2 r_1(A_1) = r_2(A_1)$$

и нека последната точка ја означиме со B , т.е. $r_2(A_1) = B$. Тогаш,

$$A_1 = r_3 r_2 r_1(A_1) = r_3(B).$$

Значи,

$$A_1 = r_3(B), \quad r_2(A_1) = B.$$



Црп. 27.1.

Рамнокраките триаголници A_1A_2B и BA_3A_1 имаат исти агли ($\angle A_2 = \angle A_3 = 120^\circ$) и заедничка страна A_1B , па според тоа се складни. Значи, $A_1A_2BA_3$ е ромб со агли 60° и 120° , па според тоа триаголникот $A_1A_2A_3$ е рамностран.

3. На темињата на правилен петаголник им се придружени цели броеви, чиј збир е природен број. Ако на три последователни темиња им соодветствуваат броевите x, y, z и $y < 0$, тогаш се врши следнава операција:

броевите x, y, z се заменуваат со $x + y, -y, z + y$.

Оваа операција се изведува се додека барем еден од петте броеви е строго негативен. Дали постапката ќе заврши по конечно многу чекори?

Решение. Нека $u_1, \dots, u_5$ се цели броеви и барем еден од нив е негативен. Еден од овие броеви да го означиме со u_j .

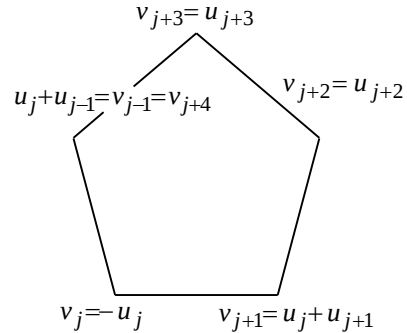
Нека $v_1, \dots, v_5$ се цели броеви добиени од $u_1, \dots, u_5$ со примена на операцијата од задачата, така што $x = u_{j-1}$, $y = u_j$, $z = u_{j+1}$ (применето е циклично индексирање $u_i = u_{i+5}$), т.е. $v_{j-1} = u_{j-1} + u_j$, $v_j = -u_j$, $v_{j+1} = u_{j+1} + u_j$. Значи, работиме со подредени петорки

$$U = (u_1, \dots, u_5), V = (v_1, \dots, v_5).$$

Ја разгледуваме функцијата F која на секоја петорка $X = (x_1, \dots, x_5)$ и при-

дружува број $\sum_{i=1}^5 (x_i - x_{i-1})^2$ (секаде се применува циклично индексирање).

$$\begin{aligned} F(V) &= \sum_{i=j}^{j+4} (v_{i+1} - v_{i-1})^2 \\ &= (u_j + u_{j+1} - u_j - u_{j-1})^2 + (u_{j+2} + u_j)^2 + \\ &\quad + (u_{j+3} - u_j - u_{j+1})^2 + (u_j + u_{j-1} - u_{j+2})^2 + (-u_j - u_{j+3})^2 \\ &= (u_{j+1} - u_{j-1})^2 + (u_{j+2} + u_j)^2 + (u_{j+3} - u_{j+1} - u_j)^2 + \\ &\quad + (u_{j-1} - u_{j+2} + u_j)^2 + (u_j + u_{j+3})^2 \\ &= F(U) + [(u_{j+2} + u_j)^2 - (u_{j+2} - u_j)^2] + \\ &\quad + [(u_{j+3} - u_{j+1} - u_j)^2 - (u_{j+3} - u_{j+1})^2] + \end{aligned}$$



Црпй. 27.2.

$$\begin{aligned}
& +[(u_{j-1}-u_{j+2}+u_j)^2-(u_{j-1}-u_{j+2})^2]+ \\
& +[(u_j+u_{j+3})^2-(u_j-u_{j+3})^2] \\
& = F(U)+u_j(4u_{j+2}-2u_{j+3}+2u_{j+1}+u_j+2u_{j-1}-2u_{j+2}+u_j+4u_{j+3}) \\
& = F(U)+u_j(2u_{j+2}+2u_{j+1}+2u_j+2u_{j+3}+2u_{j-1}) \\
& = F(U)+2u_jS,
\end{aligned}$$

при што $S = u_1 + \dots + u_5 = v_1 + \dots + v_5$ (т.е. во секој чекор се појавува исто S).

Бидејќи $S > 0$, $F(V) < F(U)$, па според тоа вредностите на F образуваат строго опаѓачка низа ненегативни цели броеви. Секоја таква низа е конечна.

4. Нека A и B се соседни темиња на правилен n -аголник, со центар во O . Триаголникот XYZ , кој е складен со триаголникот OAB , на почеток е поставен така што точките X, Y, Z се совпаѓаат со точките O, A, B , соодветно. Потоа $\triangle XYZ$ се движи во рамнината на n -аголникот, така што темињата Y и Z остануваат на n -аголникот. Каква фигура ќе опише точката X кога точката Y еднаш ќе го помине целиот n -аголник?

Решение. Нека A, B, C се три последователни темиња на n -аголникот. Разгледуваме што се случува со X кога Y се движи од A до B , а Z од B до C . Кога Y се совпаѓа со A или B јасно е дека X се совпаѓа со O . Затоа ќе го разгледаме случајот кога Y е внатрешна точка на отсечката AB , а Z е внатрешна точка на отсечката BC .

Бидејќи

$$\angle ZXY + \angle YBZ = \angle BOA + \angle ABO + \angle OAB = 180^\circ,$$

кружницата опишана околу триаголникот XYZ минува низ B . Радиусот на таа кружница го пресметуваме од триаголникот OAB , бидејќи

$$\angle A = \angle B = \frac{(n-2)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

Воведуваме ознака $R = \overline{OA}$ и добиваме

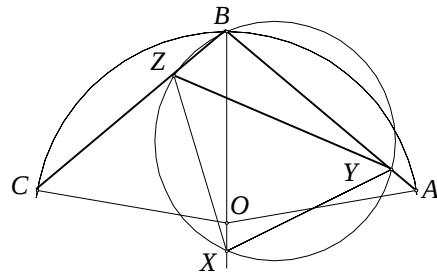
$$2r = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})} = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{n}},$$

каде r е радиус на опишаната кружница околу триаголникот OAB .

Со α го означуваме аголот со големина $\frac{\pi}{n}$. Аглите XYZ и XBZ се еднакви како агли над ист лак. Затоа

$$\angle OBZ = \angle OBC = \angle XYZ = \angle XBZ$$

што значи дека точките X, O, B се колинеарни. BX е тетива на кружни-



Црп. 27.3.

цата и како B се наоѓа меѓу Y и Z , добиваме дека таа е подолга од BO , а најдолга е кога се спвпаѓа со дијаметарот на таа кружница. Максимална должина OX достигнува кога Y и Z се симетрични во однос на BO и изнесува

$$d = 2r - R = R\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right).$$

Бараното множество е свезда која се состои од n сегменти со должина d , при што секој почнува од O и е насочен кон теме од n -аголникот.

5. Да се најдат сите функции f дефинирани на множеството ненегативни реални броеви, со ненегативни реални вредности, за кои важи

(i) $f[xf(y)]f(y) = f(x+y)$, за секои $x, y \geq 0$;

(ii) $f(2) = 0$;

(iii) $f(x) \neq 0$, за секој $0 \leq x < 2$.

Решение. Да претпоставиме дека f ги задоволува условите на задачата. Тогаш за $z \geq 2$ добиваме

$$f(z) = f[(z-2)+2] = f[(z-2)f(2)]f(2) = 0.$$

Заради тоа (земајќи го во предвид (iii))

$$f(z) = 0 \text{ ако и само ако } z \geq 2.$$

Ако $f(u) = 0$, тогаш $u \geq 2$. Ќе го направиме тоа за различни погодни избори u . Нека $0 \leq y < 2$. За $x = 2 - y$ добиваме

$$f[(2-y)f(y)]f(y) = f(2) = 0$$

и бидејќи $f(y) \neq 0$, добиваме

$$f[(2-y)f(y)] = 0 \Rightarrow (2-y)f(y) \geq 2 \Rightarrow f(y) \geq \frac{2}{2-y}.$$

Ако ставиме $x = \frac{2}{f(y)}$, добиваме

$$0 = f(2)f(y) = f\left(\frac{2}{f(y)} + y\right) \text{ и } \frac{2}{f(y)} + y \geq 2 \text{ односно } f(y) \leq \frac{2}{2-y}.$$

Значи, бараната функција мора да е од облик

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & 0 \leq y < 2 \\ 0, & y \geq 2. \end{cases}$$

Лесно се проверува дека таа навистина ги задоволува условите на задачата.

Ако $xf(y) \geq 2$, тогаш $y < 2$ и $f(y) = \frac{2}{2-y}$, па според тоа $\frac{2x}{2-y} \geq 2$ што значи

$x+y \geq 2$, па според тоа $f(x+y) = 0$, а исто како и $f[xf(y)]f(y) = 0$ бидејќи

$$f[xf(y)] = 0.$$

Ако $xf(y) < 2$ и $y \geq 2$, тогаш $f(y) = 0$, па според тоа $f[xf(y)]f(y) = 0$, а иста како и $f(x+y) = 0$, (бидејќи $x+y \geq 2$).

Ако $xf(y) < 2$ и $y < 2$ тогаш $f(y) = \frac{2}{2-y}$, па затоа $\frac{2x}{2-y} < 2$ што значи $x+y < 2$ па според тоа

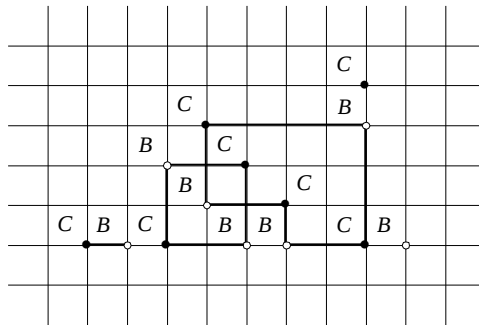
$$f[xf(y)]f(y) = f\left(\frac{2x}{2-y}\right)f(y) = \frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}} \cdot \frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-x-y} = f(x+y).$$

6. Дадено е конечно множество точки во рамнината, такво што секоја точка има целобројни координати. Дали е можно некои точки од тоа множество да се обојат со црвена боја, а преостанатите со бела боја, така што за секоја права L која е паралелна со било која од координатните оски, разликата помеѓу бројот на белите и бројот на црвените точки на L да биде $-1, 0, 1$?

Решение. Одговорот е позитивен, т.е. секогаш е можно на бараниот начин да се обојат точките.

Нека L е произволна права паралелна со една од координатните оски која го пресекува множеството A . Нека $P_1, P_2, \dots$ се точки од $A \cap L$ подредени така што слободните координати им растат (т.е. ако L е паралелна со x -оска, сите точки имаат иста y -координата и точките $P_1, P_2, \dots$ ги подредуваме така што x -координатите им растат; аналогно и во случајот кога L е паралелна со y -оската).

Ги поврзуваме P_1 со P_2 , P_3 со P_4 итн. со отсечки, при што евентуално ќе остане една слободна точка. Тоа го правиме со секоја таква права L . Бидејќи A е конечно (множество) имаме конечно многу такви прави. На тој начин добивме фамилија од отсечки, со тоа што секоја точка од A припаѓа најмногу на две од тие отсечки. Уни-



Црп. 27.4.

јата на овие отсечки се распаѓа на полигонални криви (затворени или незатворени) без заеднички темиња и определен број изолирани точки).

Затворените полигонални линии содржат парен број отсечки бидејќи две последователни отсечки се нормални меѓу себе. Ги боиме точките на секоја полигонална линија редоследно: црвено, бело, црвено, бело итн. (што е можно согласно со парноста во случај на затворени криви), а преостанатите изолирани точки по желба. Таквиот начин на бојење е саканиот: на секоја права L точките се во парови, во кои се обоени различно, и постои најмногу една точка без свој пар.