

ПРИМЕНА НА МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА

Познавањата од математичка логика се корисни за решавање на задачи кои се состојат од разрешување на разни вкрсени изјави и разрешување на јазли од искази. Тука се наведени неколку методи за решавање. За сите проблеми карактеристично е тоа што секој податок или изјава е исказ, со само една вистинитосна вредност, точно (Т) или неточно (⊥). Наместо детално објаснување на методите, решени се карактеристични задачи.

1. Метод на воведување на претпоставка

Овој метод се состои во претпоставување на вистинитосна вредност на еден од дадените искази во задачата. При тоа се разгледува можноста оваа претпоставка да се одржи како точна. Ако претпоставката е неточна, тогаш се претпоставува вистинитосна вредност на друг исказ.

Пример. Еден од браќата (Борис, Дејан или Раде) украде кутија со колачи. Кога мајка им ги прашала кој го сторил тоа, тие ги дале следните одговори:

Борис: - Ниту јас ниту Дејан не сме го сториле тоа.

Дејан: - Борис не ја украде кутијата, ја украде Раде.

Раде: - Јас не сум украде ништо. Ја украде Борис.

Утврдено е дека кражбата ја извршил само еден од браќата. Еден од сомнителните двапати излажал, еден двапати ја кажал вистината, а еден еднаш излажал, а еднаш ја кажал вистината. Кој е крадецот?

Решение. Според условот, мора еден од сомнителните два пати да ја кажал вистината. Претпоставуваме дека тоа е Борис. Би значело дека Раде е крадецот. Но, тогаш и двата искази на Дејан би биле точни, што се коси со условот. Затоа правиме нова претпоставка: Нека исказите на Дејан се точни. Тогаш Раде е крадецот. Но, тогаш изјавите на Борис би биле точни што повторно се коси со условот само еден да не излажал. Останува да се претпостави дека изјавите на Раде се точни: тогаш Борис е крадецот. Борис би излажал еднаш, а Дејан двапати. Со тоа се задоволени условите на задачата, значи Борис е крадецот.

Обиди се сам да ги решиш следниве задачи со изложениот метод:

1. Филип, Лиле и Мирко си играле со топка во училишниот двор и скршиле прозорец. Дежурниот наставник Перо бил многу лут поради тоа па никој од тројцата ученици не се осмелил да ја признае вината.

- "Некој од вас лаже" – рекол наставникот.

Лиле: - "Мирко излажа."

Мирко: - "Знам дека Филип не лаже."

Филип: - "Лаже Лиле или Мирко."

Одговор. Наставникот заклучил дека виновникот за скршениот прозорец е Лиле. Како дошол до тој заклучок?

2. Три топки - една бела, една црна и една зелена се сместени во три засебни кутии. На првата кутија пишува "бела", на втората "црна", а на третата "бела или зелена". Сите три натписи се неточни. Во која кутија се наоѓа белата топка?

Одговор. Белата топка се наоѓа во кутијата со натпис - црна.

2. Метод на табели

При решавање на задачи по овој метод, податоциите се запишуваат во табели. Што за еден исказ утврдиме дека е вистинит, сите останати во неговата редица и колона се неточни.

Пример. По завршениот натпревар, спикерот објавил дека првите три места ги зазеле: 1. Мартин Чаловски, 2. Цане Симовски 3. Никола Јовановски. Но, по неколку моменти спикерот увидел дека објавил неточни резултати: ни едно име или презиме не одговарало на прочитаниот редослед, а освен тоа, ни едно име не одговарало на прочитаното презиме.

Ако прв бил Симовски, кој е точниот редослед на натпреварувачите?

Решение. Дадените податоци се внесени во табелите (а) и (б). Во првите колони се внесени почетните букви на презимињата, а во првата редица на табела (а) се внесени почетните букви на имињата, додека во првата редица на табела (б), освоените места. Понатаму следи објаснување за пополнувањето на табелите.

Полињата по дијагонала во табела (а) не смеат да претставуваат вистинит исказ затоа што во прочитаниот редослед, ни едно име не одговара на презимето.

(а)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td></td><td>М</td><td>Ц</td><td>Н</td></tr><tr><td>Ч</td><td>/</td><td>Т</td><td>/</td></tr><tr><td>С</td><td>/</td><td>/</td><td>Т</td></tr><tr><td>Ј</td><td>Т</td><td>/</td><td>/</td></tr></table>		М	Ц	Н	Ч	/	Т	/	С	/	/	Т	Ј	Т	/	/
	М	Ц	Н														
Ч	/	Т	/														
С	/	/	Т														
Ј	Т	/	/														

(б)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>Ч</td><td>/</td><td>/</td><td>Т</td></tr><tr><td>С</td><td>Т</td><td>/</td><td>/</td></tr><tr><td>Ј</td><td>/</td><td>Т</td><td>/</td></tr></table>		1	2	3	Ч	/	/	Т	С	Т	/	/	Ј	/	Т	/
	1	2	3														
Ч	/	/	Т														
С	Т	/	/														
Ј	/	Т	/														

Во табела (б), бидејќи С(имовски) е прв, полињата во истата редица и колона на полето С-1 не можат да претставуваат вистинит исказ затоа што Симовски не е истовремено и втор или трет, ниту некој од останатите натпреварувачи е прв. Во табела (б), Ч(аловски) или Ј(овановски) е втор или трет. Но, од неточниот редослед гледаме дека Ј(овановски) не е трет, па мора да е втор. Значи, Ч(аловски) е трет. Во табела (а), Ц(ане) не е втор поради згрешениот редослед, па не е Ј(овановски). Останува, Цане е Ч(аловски). Оттаму, М(артин) е Ј(овановски), а Н(икола) е С(имовски).

Точниот редослед на натпреварувачите гласи: 1. Никола Симовски. 2. Мартин Јовановски. 3. Цане Чаловски.

Задачи за вежбање:

1. Вера, Наде и Соња се членови на математичката, хемиската и спортската секција во училиштето. Спортистката е најмлада и е единствено дете на своите родители. Наде, која седи во иста клупа со братот на Соња, е постара од членката на хемиската секција. Одредете кој членува во спортската секција.

Одговор. Вера е спортист.

2. Бранко, Горан и Никола се оженети. Имињата на нивните сопруги се Даница, Мира и Лилјана. Секој брачен пар има син. Имињата на синовите се Дарко, Марко и Јовица. Да се одредат имињата на секое семејство ако се знае дека Мира и Никола се во брак, Марко не му е син на Бранко, Јовица ѝ е син на Мира, а Лилјана не му е сопруга на Горан.

Одговор. Горан, Даница и Марко; Никола, Мира и Јовица; Бранко, Лилјана и Дарко.

3. Метод на графови

При решавање со овој метод, податоците од задачите се сврзуваат со релации дадени во задачите, а некои треба да се оцртаат.

Пример. Утврдено е дека меѓу шест луѓе има двајца крадци; на прашањето кој е крадецот, сомнителните изјавиле:

Петар: Ристе и Симе. Борче: Миле и Томе. Миле: Томе и Ристе.

Симе: Петар и Ристе. Ристе: Миле и Борче.

Изјава на Томе не му била земена бидејќи не можел да биде најден. Се испоставило дека еден од сомнителните дал две лажни изјави, а останатите дале по една лажна и една точна изјава. Кои се двајцата крадци?

Решение. Податоците ќе ги сврземе во граф: на пример, изјавата на Петар дека Симе и Ристе се крадци ќе оформи релација (спојка) CP со јазли во C (за Симе) и во P (за Ристе). Од условите на задачата следи дека јазлите на една спојка претставуваат невини луѓе (невина спојка), а останатите четири спојки сврзуваат еден невин и еден виновен човек. Освен тоа, никој не дал две точни изјави, па имињата на двата крадци не се споени.

Да претпоставиме дека P е едно теме на невината спојка. Тогаш, ако RP/PC е спојка на невини, следи дека Симе и Томе/Петар и Томе се крадците. Но тогаш и Борче и Миле се невини па е добиена уште една невина спојка BM , што е контрадикција. Ако PT е спојка на невини, тогаш, освен Петар и Симе и Миле би бил крадец (затоа што TM е мешана спојка. Значи, јазолот P не може да припаѓа на невината спојка).

Остануваат две можности: спојката на невини е BM или MT . Во првиот случај следи дека Томе е крадец, Ристе невин, а Симе и Петар крадци, што се повеќе крадци отколку што бараме. Нека MT е спојка на невини; тогаш Миле и Томе се невини, Ристе и Борче се крадци (како јазли на мешани спојки), а Симе и Петар невини.

Крадците се Ристе и Борче.

1. Од три моливи, (означени со A , B и V), еден е црвен, еден бел, а еден син. Утврди ги боите на моливите, ако само едно од следниве тврдења е точно: 1. A е црвен, 2. B не е црвен, 3. V не е син.

(A -син, B -црвен, V -бел; упатство: поврзи ги множествата моливи и бои со релации како во 1-3)

4. Метод на негација на исказот

Ваквиот метод се применува кај задачи во чиј услов се дадени искази кои се секогаш точни или секогаш лажни. Во продолжение е даден често наведен пример, но многу интересен.

Пример. Едно дивјачко племе заробило истражувач и го затворило во пештера со два излеза. Поглаварот решил да му даде можност да избега и му рекол: - Еден од излезите води кон слобода, а друг кон кафез со тигри. Можеш да ги прашаш стражарите кој пат да го одбереш; но, имај на ум дека тие зборуваат вистина само ако се добро расположени, инаку постојано лажат.

Истражувачот бил добар логичар и успеал да побегне. Како гласи прашањето што им го поставил тој на стражарите?

Решение. Прашањето гласи: “Ако те прашав дали овој пат води кон слобода, дали би ми рекол “да”? Во тој случај, независно од расположението, стражарот би му дал точен одговор. Да објасниме: ако стражарот е добро расположен, тој не лаже, па ќе одговори точно. Ако тој е лошо расположен, а знае дека патот води кон слобода, тој би одговорил “не”. Но, во вториот дел од прашањето тој повторно врши негација и мора да каже “да”. Стражарот размислува: “Патот води кон слобода, но јас би излажал и би рекол “не”. Но, нема да му го кажам тоа, затоа што сега сум лошо расположен и лажам.”

Слично се решава ситуацијата во следната задача:

1. Во градот Истолаж (каде што зборуваат истолашки) пристигнал патник кој не го знаел локалниот јазик, но знаел дека тука некои граѓани секогаш лажат, а некои секогаш ја зборуваат вистината. Тој сакал со такси да отиде во хотел да преспие. Патникот сретнал еден минувач и го замолил да му биде преведувач, но, не знаел дали минувачот секогаш лаже или не. Затоа го замолил да го праша возачот на таксито дали возачот ја зборува вистината. Минувачот го прашал нешто возачот и потоа му рекол на патникот дека одговорот на возачот бил: - Секогаш ја зборувам вистината. Тогаш патникот заклучил дека минувачот ја зборува вистината. Зошто?

5. Метод на исказна алгебра

Со овој метод, користејќи ги логичките закони и ознаки, задачата може да се реши со скоро формално пресметување.

Пример. На шаховски турнир, првите четири места ги зазеле Ацо, Елена, Мики и Светлана. На прашањето на новинарите како се пласирале, тројца од нив дале по еден лажан и по еден вистинит исказ.

Ацо: - Елена е втора, а Мики е трет.

Елена: - Мики е втор, а Ацо е четврти.

Мики: - Ацо е трет, а Светлана втора.

Кој е точниот редослед на натпреварувачите?

Решение. Со Е2 означуваме дека Елена е втора, со М3 дека Мики е втор итн. Се добиваат следните три формули чија вистинитосна вредност е Т.

$$\tau(E2 \vee M3) = T, \quad \tau(M2 \vee A4) = T, \quad \tau(A3 \vee C2) = T.$$

Јасно, тогаш е $\tau((E2 \vee M3) \wedge (M2 \vee A4)) = T$, односно:

$$\tau((E2 \wedge M2) \vee (M3 \wedge M2) \vee (E2 \wedge A4) \vee (M3 \wedge A4)) = T.$$

Јасно $\tau((E2 \wedge M2)) \neq T$, $\tau((M3 \wedge M2)) \neq T$. Останува: $\tau((E2 \wedge A4) \vee (M3 \wedge A4)) = T$.

Земајќи ја предвид и третата изјава, добиваме:

$$\tau(((E2 \wedge A4) \vee (M3 \wedge A4)) \wedge (A3 \vee C2)) = T,$$

или

$$\tau((E2 \wedge A4 \wedge A3) \vee (E2 \wedge A4 \wedge C2) \vee (M3 \wedge A4 \wedge A3) \vee (M3 \wedge A4 \wedge C2)) = T.$$

Оттаму $\tau((M3 \wedge A4 \wedge C2)) = T$. Значи, Мики е трет, Ацо е четврт, Светлана е втора, а Елена прва.

Задачи за вежбање:

1. Мира и Зоран сакаат да ги водат нивните ќерки Анита и Ирена на кино или на театар. За време на ручекот се договарале каде да одат и ги дале следните изјави:

Зоран: - Ќе одам во театар ако и само ако со мене оди Мира.

Анита: - Ирена е многу досадна, Ќе одам таму каде што Ирена нема да оди.

Ирена: - Ако Анита оди во театар, мама и јас ќе одиме во кино.

Попладнето сите излегле; некои отишле во кино, а некои во театар. Се покажало дека Зоран и Анита ја кажале вистината, додека Ирена излагала. Кој отишол на театар?

Одговор. Зоран, Мира и Ирена отишле на театар.

2. На избор на убавица во финалето се влезени Марија, Соња и Милена. Без да го чека прогласувањето, еден новинар јавил во својата редакција дека Марија е прва, Милена не е прва, а Соња не е последна. По прогласувањето се утврдило дека новинарот го погодил успехот на само една од финалистките. Која девојка е победник?

Одговор. Соња.

ВО СВЕТОТ НА БРОЕВИТЕ

При операции со некои природни броеви се добиваат резултати кои предизвикуваат чудење и восхитување, познати под името *миракули*. Еве неколку од нив:

1)

$123456789 \cdot 9 = 111\ 111\ 111$
 $123456789 \cdot 18 = 222\ 222\ 222$
 $123456789 \cdot 27 = 333\ 333\ 333$
 $123456789 \cdot 36 = 444\ 444\ 444$
 $123456789 \cdot 45 = 555\ 555\ 555$
 $123456789 \cdot 54 = 666\ 666\ 666$
 $123456789 \cdot 63 = 777\ 777\ 777$
 $123456789 \cdot 72 = 888\ 888\ 888$
 $123456789 \cdot 81 = 999\ 999\ 999$

3)

$0 \cdot 9 + 1 = 1$
 $1 \cdot 9 + 2 = 11$
 $12 \cdot 9 + 3 = 111$
 $123 \cdot 9 + 4 = 1111$
 $1234 \cdot 9 + 5 = 11111$
 $12345 \cdot 9 + 6 = 111111$
 $123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$
 $1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111$
 $12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111$
 $123456789 \cdot 9 + 10 = 1111111111$

2)

$1 \cdot 8 + 1 = 9$
 $12 \cdot 8 + 2 = 98$
 $123 \cdot 8 + 3 = 987$
 $1234 \cdot 8 + 4 = 9876$
 $12345 \cdot 8 + 5 = 98765$
 $123456 \cdot 8 + 6 = 987654$
 $1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$
 $12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$
 $123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$

4)

$9 \cdot 9 + 7 = 88$
 $9 \cdot 98 + 6 = 888$
 $9 \cdot 987 + 5 = 8888$
 $9 \cdot 9876 + 4 = 88888$
 $9 \cdot 98765 + 3 = 888888$
 $9 \cdot 987654 + 2 = 8888888$
 $9 \cdot 9876543 + 1 = 88888888$
 $9 \cdot 98765432 + 0 = 888888888$
 $9 \cdot 987654321 - 12 = 8888888888$