ЕДНА ЗАДАЧА НА МАТЕМАТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ: ОПТИМАЛЕН ОБЛИК НА КАРТОНСКО ПАКУВАЊЕ

Филип Николовски
Меѓународни Училишта „НОВА“, Скопје

Вовед

Картонските пакувања на течности (млеко, јогурт, сокови и сл.) долго време се присутни на пазарот и се дел од нашето секојдневие. Тие толку се одомаќиниле во нашата култура што дури и самиот назив доаѓа од името на претпријатието чиј изум се првите вакви пакувања – ТетраПак.

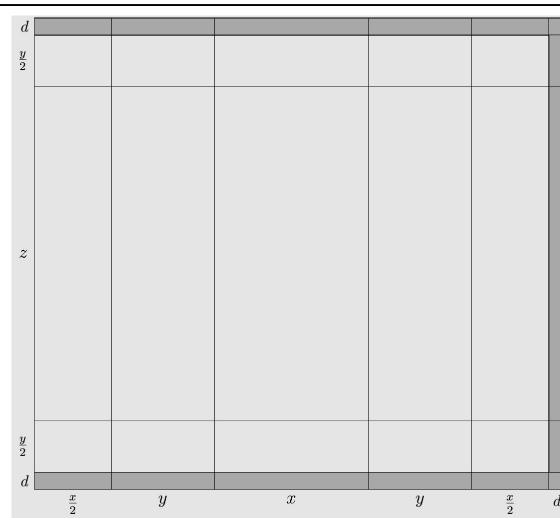
Забележливи се различни видови на пакувања: од „класични“, рабести во облик на тула без никакви отвори, до современи валчести, „футуристички“ со специјални додатни капачиња. Постојат и пакувања со различен волумен. Заедничко за сите пакувања е што се направени од едно парче хартија/картон превиткано и залепено на соодветни места, а внатрешната страна им е обложена со слој на алуминиумска и/или пластична фолија. Заради овие особини, како и можноста за рециклирање, претпријатијата кои своите производи ги пакуваат во вакква амбалажа покажуваат особена еколошка свест и грижа за околината.

Од математички аспект, интересно е да се побара одговор на прашањето: дали обликот на пакувањата кои може да се сретнат е оптимален, односно дали за производство на пакување со одреден зададен волумен се троши минимално количество на картон? Во продолжение ќе разгледаме два случаја на наједноставно тетрапак пакување: едно со основа квадрат, а другото со основа правоаголник, ќе ги одредиме нивните оптимални димензии и ќе ги споредиме со пакувањата кои се користат.

Постоечки пакувања

Споменавме дека ќе разгледуваме две различни пакувања: едно со основа квадрат, друго со основа правоаголник. Нека со x ја означиме должината, со y ширината, а со z висината на пакувањето. Дополнително нека d е ширината на појасот на кој се нанесува лепак за да се направи пакувањето. Обликот, линиите на превиткување и појасот на лепење се покажани на Слика 1.

Димензиите на дел од пакувањата што може да се сретнат се: литарско со основа квадрат за кое $x = y = 0,7\,\mathrm{dm}$, $z = 2,05\,\mathrm{dm}$ и $d = 0,07\,\mathrm{dm}$; половина литарско со основа квадрат има само различна висина: $z = 1,1\,\mathrm{dm}$; литарско со основа правоаголник за кое $x = 0,9\,\mathrm{dm}$, $y = 0,6\,\mathrm{dm}$, $z = 1,95\,\mathrm{dm}$ и $d = 0,1\,\mathrm{dm}$.



Слика 1: Облик и димензии на картонот од кој се прави тетрапак пакувањето

Должините ги задаваме во дециметри бидејќи $1\,\ell = 1\,\mathrm{dm}^3$. Бруто волуменот на сите пакувања е за 5% поголем од предвидениот нето волумен, па така нашето „литарско“

пакување во суштина има волумен $V = 1,05\,\mathrm{dm}^3$, а „половина литарското“ $V = 0,525\,\mathrm{dm}^3$.

Формулација на задачата

На основа на податоците од Слика 1., може да заклучиме дека за изработка на едно пакување потребен е картон со димензии $(2x+2y+d)\,\mathrm{dm}$ на $(y+z+2d)\,\mathrm{dm}$. Бидејќи d е константно и однапред познато, плоштината P на потребниот картон може да ја претставиме како функција од x, y и z:

$$P(x,y,z) = (2x+2y+d)(y+z+2d)$$

Од друга страна, волуменот V на пакувањето исто така е однапред познат и за него важи $V = xyz$. Од досега кажаното задачата може да ја формулираме како **задача на условна минимизација**:

$$\min\left\{P(x,y,z) := (2x+2y+d)(y+z+2d)\right\} \qquad (1.1)$$

$$\text{при услов} \begin{cases} xyz = V \\ x,y,z > 0 \end{cases}$$

Целта е да се најдат (позитивни) вредности за x, y и z за кои се добива пакување со одреден волумен, а при тоа се користи минимално количество хартија. Користејќи го фактот дека $z = \frac{V}{xy}$, од P можеме да ја елиминираме висината сведувајќи ја плоштината на функција од две променливи. Така задачата се трансформира во:

$$\min\left\{P(x,y) := (2x+2y+d)\left(y + \frac{V}{xy} + 2d\right)\right\} \qquad (1.2)$$

при услов $x, y > 0$

Специјално, ако основата е квадрат, $x = y = a$ каде со a е означена должината на основата, па задачата дополнително се упростува во:

$$\min\left\{P(a) = (4a+d)\left(a + \frac{V}{a^2} + 2d\right)\right\} \qquad (1.3)$$

при услов $a > 0$

Случај 1: квадратна основа

Да претпоставиме дека основата е квадрат. За $P(a)$ од (1.3) добиваме $P(a) = 4a^2 + 9da + 2d^2 + \dfrac{4V}{a} + \dfrac{dV}{a^2}$. Екстремните точки на оваа функција може да се одредат со помош на првиот и вториот извод. Имаме:

$$P'(a) = 8a + 9d - \frac{4V}{a^2} - \frac{2dV}{a^3} = \frac{8a^4 + 9da^3 - 4Va - 2dV}{a^3}$$

$$P''(a) = 8 + \frac{8V}{a^3} + \frac{6dV}{a^4} \qquad (1.4)$$

Екстремните точки се постигнуваат за оние вредности на промелнивата за која првиот извод има вредност нула. Така:

$$P'(a) = 0 \Leftrightarrow 8a^4 + 9da^3 - 4Va - 2dV = 0. \qquad (1.5)$$

Бидејќи $d = 0,07\,\mathrm{dm}$ и пакувањето има бруто волумен $V = 1,05\,\mathrm{dm}^3$, заменувајќи во (1.5) заклучуваме дека екстремалната вредност на функцијата се постигнува за a кое е решение на равенката:

$$8a^4 + 0,63a^3 - 4,2a - 0,147 = 0$$

Процесот на решавање на равенката не е од суштинско значење за нашата задача, па истата може да ја решиме приближно со помош на некој софтверски пакет, на пример *Mathematica* или пак MATLAB. Во *Mathematica* тоа може да се направи со наредбата `NSolve` внесувајќи:

```
NSolve[8*a^4+0.63*a^3-4.2*a-0.147==0, a]
```

Од четирите решенија на равенката, само две се реални, едно позитивно и едно негативно. Заклучуваме дека функцијата P има екстремна точка во позитивното реално решение $a^* \approx 0,79\,\mathrm{dm}{=}7{,}9\,\mathrm{cm}$. За да се утврдиме дека екстремната точка a^* е минимум, треба вториот извод да е позитивен, т.е. $P''(a^*) > 0$. Од (1.4) имаме дека $P''(a^*) \approx 26,65 > 0$ од каде заклучуваме дека a^* е минимум на P. Конечно, земајќи предвид дека $z = \frac{V}{a^2}$, за висината се добива вредност $z^* \approx 1,68\,\mathrm{dm} = 16,8\,\mathrm{cm}$. Така добиваме дека оптималните димензии на тетрапак пакување од еден литар со основа квадрат се $7,9\,\mathrm{cm} \times 7,9\,\mathrm{cm} \times 16,8\,\mathrm{cm}$.

Да разгледаме уште еден пример: пакување од половина литар со квадратна основа. Заменувајќи $d = 0,07\,\mathrm{dm}$ и $V = 0,525\,\mathrm{dm}^3$ во (1.5) добиваме дека екстремната вредност се постигнува за a кое е решение на равенката:

$$8a^4 + 0,63a^3 - 2{,}1a - 0,0735 = 0$$

Повторно решаваме приближно со помош на *Mathematica*. Од четирите решенија на оваа равенка, само едно е реално и позитивно: $a^* \approx 0,63\,\mathrm{dm} = 6,3\,\mathrm{cm}$. Согласно (1.4), $P''(a^*) \approx 26{,}2 > 0$ од каде заклучуваме дека a^* е минимум. Соодветната вредност за висината е $z^* = 0,525 \,/\, 0,63^2 \approx 1,32\ \mathrm{dm} = 13{,}2\,\mathrm{cm}$. Оптималните димензии на половина литарско пакување со квадратна основа според ова се $6,3\,\mathrm{cm} \times 6,3\,\mathrm{cm} \times 13,2\,\mathrm{cm}$.

Случај 2: правоаголна основа

Посложен е случајот со правоаголна основа. Множејќи, за $P(x,y)$ од (1.2) имаме:

$$P(x,y) = (2x + 2y + d)\left(y + \frac{V}{xy} + 2d\right)$$

Заменувајќи $d = 0{,}1$ и $V = 1{,}05$ се добива:

$$P(x,y) = (2x + 2y + 0{,}1)\left(y + \frac{1{,}05}{xy} + 0{,}2\right)$$

Сакаме да ја примениме истата идеја како при решавањето на задачата со квадратна основа, но сега P е функција од две променливи, па мора да направиме соодветна модификација на постапката. Ова води до усложнување за чијашто разврска потребни се познавања на материјал кој не се изучува во рамките на наставата по математичките предмети во средното образование. Затоа ќе прибегнеме кон попрактичен пристап: ќе ги искористиме можностите на програмскиот пакет *Mathematica* за решавање на задачи од условна минимизација. За наоѓање на минимумот на функцијата $P(x,y)$ при услов $x,y > 0$ ќе ја искористиме наредбата `FindMinimum`. Внесуваме:

```
FindMinimum[{(2*x+2*y+0.1)*(y+1.05/(x*y)+0.2),x>0&&y>0},{x, y}]
```

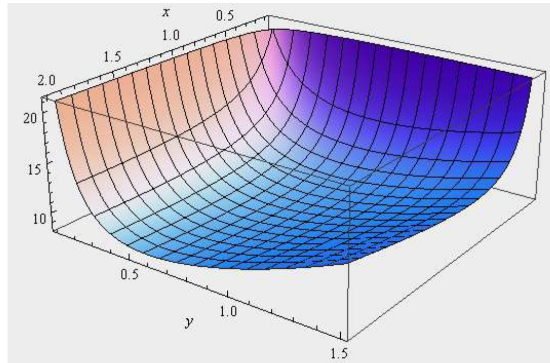
Вредностите кои ги добиваме за димензиите се $x^* = 1.16\mathrm{dm}{=}11.6\mathrm{cm}$, $y^* = 0.64\mathrm{dm}{=}6.4\mathrm{cm}$ и мимална вредност за функцијата $P(x^*,y^*) = 8.34\mathrm{dm}^2$. За висината соодветно имаме:

$$z^* = V \,/\, (x * y^*) \approx 1{,}05 \,/\, (1{,}16 \cdot 0{,}64) \approx 1{,}41\,\mathrm{dm} = 14{,}1\,\mathrm{cm}$$

Добиваме дека оптималните димензии на литарско пакување со правоаголна основа се $11,6\,\mathrm{cm}\times 6,4\,\mathrm{cm}\times 14,1\,\mathrm{cm}$. Површината дефинирана со $P(x,y)$ е претставена на Слика 2.

Заклучок

Резултатите кои ги добивме се сумирани во Табела 1. Од добиеното може заклучиме дека разликата помеѓу оптималните димензии и димензиите на пакувањата кои се во продажба не е голема, а заштедата на материјал се движи од $1,28$ до 2 проценти, односно 13 до 20 дополнителни пакувања на секои 1000. Иако ова делува како само маргинално подобрување, треба да се има предвид дека големите претпријатија и корпорации преработуваат илјадници тони суровини, па обемот на заштеда станува суштински значаен. Дополнително, во духот на најдобрата економска пракса, секое намалување на трошоците и расходите е значајно на долг рок.



Слика 2. Површината дефинирана со $P(x,y)$ во (1.2)

Табела 1. Споредба на резултатите

	Основа	$x\,(\mathrm{dm})$	$y\,(\mathrm{dm})$	$z\,(\mathrm{dm})$	$P\,(\mathrm{dm}^2)$	Заштеда (dm^2)	Заштеда (%)
1 л	квадрат	$0,7$	$0,7$	$2,05$	$8,56$	$0,12$	$1,4\%$
	квадрат (оптимален)	$0,79$	$0,79$	$1,68$	$8,44$		
	правоаголник	$0,9$	$0,6$	$1,95$	$8,51$	$0,17$	2%
	правоаголник (оптимален)	$1,16$	$0,64$	$14,1$	$8,34$		
0.5 л	квадрат	$0,7$	$0,7$	$1,1$	$5,49$	$0,07$	$1,28\%$
	квадрат (оптимален)	$0,63$	$0,63$	$1,32$	$5,42$		

Она што не е земено предвид се секако причините заради кои пакувањата ги имаат токму оние димензии кои ги среќаваме. Ова може да биде од најразлични причини: ограниченост на процесот на производство, леснотија при транспортирање, физичка издржливост на пакувањето, усогласување со прописи и стандарди, па дури и заради естетски или ергономски причини итн. Овие причини или не спаѓаат или само делумно се во доменот на математиката, па заради ова нивното влијание не е разгледувано.

Литература

[1] V. Vujčić, M. Ašić, N. Miličić, “Matematičko programiranje”, Matematički Institut, Beograd, 1980

[2] Wolfram Mathematica: Technical Computing Software, http://www.wolfram.com/mathematica/