Самоил Малчески
Скопје

БРОЈНИ РЕБУСИ

На натпреварите по математика една од омилените теми на авторите на задачите се бројните ребуси. Во оваа статија ќе разгледаме неколку бројни ребуси, за кои сметаме дека се наменети за учениците до шесто одделение.

Задача 1. Реши го бројниот ребус, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри:

$$N \cdot N \cdot N = \overline{KAN}.$$

Решение. Бидејќи $N < 5$ важи $N \cdot N \cdot N < 100$ доволно е да ги разгледаме кога $N \in \{6, 7, 8, 9\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствени решенија на задачата се: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ и $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. ■

Задача 2. Реши го бројниот ребус, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри:

$$\overline{ABCD} + \overline{BCD} + \overline{BD} + D = 2008. \tag{1}$$

Решение. Јасно, $A = 1$, па ако замениме во (1) добиваме

$$\overline{BCD} + \overline{BCD} + \overline{BD} + D = 1008. \tag{2}$$

Понатаму, ако $B \geq 5$, тогаш $\overline{BCD} + \overline{BCD} \geq 520 + 520 = 1040$, што не е можно, а ако $B \leq 3$, тогаш $\overline{BCD} + \overline{BCD} + \overline{BD} + D \leq 398 + 398 + 38 + 8 < 1000$, што повторно не е можно. Според тоа, $B = 4$ и со замена во (2) добиваме

$$\overline{CD} + \overline{CD} + D + D = 168,$$

од каде лесно следува дека $C = 8$ и $D = 2$. Конечно, решение на задачата е: $1482 + 482 + 42 + 2 = 2008$. ■

Задача 3. Реши го бројниот ребус, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри:

$$\overline{AACB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A = 2001. \tag{3}$$

Решение. Јасно, $A \leq 4$, па затоа $\overline{AACB} - 2001 < 1000$, од каде следува дека $A = 3$ или $A = 2$.

Ако $A = 3$, тогаш

$$\overline{AACB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A > 2500,$$

па затоа во овој случај задачата нема решение.

Ако $A=2$, тогаш со замена во (3) добиваме $\overline{CB}-\overline{BC}-B=23$, односно $9C-10B=23$. Сега од последното равенство, ако се има предвид дека B и C се цифри лесно се добива дека $B=7$ и $C=4$. Конечно, решение на задачата е: $2274-247-24-2=2001$. ■

Задача 4. Реши го бројниот ребус, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри:

$$\overline{abcd}-\overline{efgh}=\overline{uv}, \tag{4}$$

при што намаленикот е најголемиот можен број.

Решение. Равенството (4) ќе го запишеме во видот

$$1000(a-e)+100(b-f)+10(c-g-u)+d-h-v=0. \tag{5}$$

Понатаму, бидејќи a и e се различни цифри, од равенството (5) следува $a=e+1$, па затоа

$$100(10+b-f)+10(c-g-u)+d-h-v=0. \tag{6}$$

Сега, бидејќи b и f се различни цифри, од равенството (6) следува $10+b=f+1$, што е можно само ако $b=0$ и $f=9$. Бидејќи намаленикот треба да е најголемиот можен број, а 8 е најголемата неискористена цифра, прва можност е $a=8$, $e=7$ и тогаш со замена во (6) добиваме

$$10(10+c-g-u)+d-h-v=0. \tag{7}$$

Сега, бидејќи c,d,g,h,u и v се цифри од равенството (7) следува дека можни се два случаја $d-h-v=0$ и $10+c-g-u=0$; или $10+d-h-v=0$ и $9+c-g-u=0$, при што и во двата случаја $g>c$. Но, c,d,g,h,u и v се различни цифри и тие се различни од 0, 9, 8 и 7, па со разгледување на сите можности заклучуваме дека во овој случај задачата нема решение. Аналогно го отфрламе случајот кога $a=7, e=6$. За $a=6, e=5$ од равенството (7) се добиваат осум решенија на задачата. Притоа најголемата вредност на намаленикот е 6021 и едно од овие осум решенија е, на пример, $6021-5984=37$. ■

Задача 5. Реши го бројниот ребус, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри:

$$\overline{eaa}\cdot\overline{ee}=\overline{abcde}.$$

Решение. Јасно, ако $e<3$, тогаш производот $\overline{eaa}\cdot\overline{ee}$ не може да е петцифрен број. Според тоа, $e\geq 3$. Понатаму, бидејќи производот на цифрите на единиците на множителите ја дава цифрата на единиците на производот на броевите, добиваме дека производот $a\cdot e$ завршува на цифрата e. Можни се следниве случаи:

- Ако $e=3,7$ или 9, тогаш единствена можност е $a=1$. Со непосредна проверка добиваме дека во овие случаи единствено решение е $311\cdot 33=10263$.
- Ако $e=4,6$ или 8, тогаш $a=1$ или 6. Со непосредна проверка се уверуваме дека ниту еден од овие случаи не дава решение на задачата.
- Ако $e=5$, тогаш $a=1,3,5,7$ или 9. Со непосредна проверка се уверуваме дека ниту еден од овие случаи не дава решение на задачата.

Според тоа, единствено решение на задачата е $311\cdot 33=10263$. ■

Задача 6. На местата на ѕвездичките стави ги соодветните цифри така што множењата ќе бидат точни:

а) $\begin{array}{r} *2*\cdot *7 \\ \hline **8 \\ **** \\ \hline ****8 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} *****\cdot 34* \\ \hline ***** \\ ****** \\ 235\,038 \\ \hline *******6 \end{array}$ в) $\begin{array}{r} ***\cdot *2* \\ \hline *** \\ **** \\ *2* \\ \hline *9*2* \end{array}$

Решение. а) Цифрата на единиците на првиот производ е 8, што значи дека цифрата на единиците на првиот множител е 4, т.е. првиот множител е $*24$. Бидејќи $224\cdot 7>1000$ заклучуваме дека цифрата на стотките на првиот множител е 1, т.е. првиот множител е 124. Бидејќи производот на првиот множител со цифрата на десетките на вториот множител мора да биде четирицифрен број, а $124\cdot 8=992<1000$ заклучуваме дека цифрата на десетките на вториот множител е 9. Значи, бараниот производ е $124\cdot 97=12028$.

б) За првиот множител имаме $235038:3=78346$. Понатаму, бидејќи производот на првиот множител и цифрата на единиците на вториот множител е петцифрен број, а $78346\cdot 2>100000$ заклучуваме дека цифрата на единиците на вториот множител е 1. Според тоа, бараниот производ е $78346\cdot 341=26715986$.

в) Првиот множител помножен со 2 дава четирицифрен број, а додека останатите два делимични производи се трицифрен броеви. Тоа значи дека вториот множител е 121. Првиот и третиот делимичен производ се еднакви на првиот множител, па затоа цифрата на десетките на првиот множител е еднаква на 2 и сега множењето е:

$$\begin{array}{r}
2\cdot 121\\ \hline
2\\
****\\
2\\ \hline
*9*2*
\end{array}$$

Сега е јасно дека цифрата на единиците на вториот делимичен производ е еднаква на 0, што значи дека цифрата на единиците на првиот множител е 0 или 5, па затоа множењето е:

$$\begin{array}{r}
*20\cdot 121\\ \hline
*20\\
**40\\
*20\\ \hline
*9*20
\end{array}
\quad \text{или} \quad
\begin{array}{r}
*25\cdot 121\\ \hline
*25\\
**50\\
*25\\ \hline
*9*25
\end{array}$$

Јасно, цифрата на стотките на првиот множител мора да е поголема од 5. Од $620\cdot 121=75020$ и $625\cdot 121=75625$ следува дека таа не е 6, од $720\cdot 121=87120$ и $725\cdot 121=87725$ следува дека таа не е еднаква на 7 и од $920\cdot 121=111320$ и $925\cdot 121=111925$ следува дека таа не е еднаква на 9. Конечно, од $820\cdot 121=99220$ и $825\cdot 121=99825$ заклучуваме дека задачата има две решенија и тоа:

$$\begin{array}{r}
820\cdot 121\\ \hline
820\\
1640\\
820\\ \hline
99220
\end{array}
\quad \text{и} \quad
\begin{array}{r}
825\cdot 121\\ \hline
825\\
1650\\
825\\ \hline
99825
\end{array}$$

Задача 7. На местата на ѕвездичките стави ги соодветните цифри така што множењето ќе биде точно:

$$\begin{array}{r}
.*\\ \hline
***\\
8*\\
***\\ \hline
62*7*
\end{array}$$

Решение. Бидејќи при собирањето на стотките не може да се добие пренос поголем од 2, при собирањето на илјадитите не може да се добие збир 12, па затоа цифрата на стотките на третиот делумен производ сигурно е 6. Но, тоа значи дека непознатиот двоцифрен множител е поголем од $600:9>66$. Понатаму, од вториот делумен производ следува дека двоцифениот множител има двоцифрен содржател чија цифра на десетките е 8, што значи дека цифрата на десетките на трицифрениот множител е 1, а двоцифрениот множител е од видот $8*$. Понатаму, од неравенствата $6<\frac{600}{89}$ и $\frac{629}{80}<8$ следува дека цифрата на стотките на трицифрениот множител е 7. Значи, ребусот го добива видот

$$\begin{array}{r} 8*\cdot 71* \\ \hline *** \\ 8* \\ *** \\ \hline 62*7* \end{array}$$

Сега, бидејќи $\frac{600}{7}>85$, заклучуваме дека двоцифрениот множител е еден од броевите 86, 87, 88 или 89. Ако двоцифрениот множител е 86, тогаш ребусот го добива видот

$$\begin{array}{r} 86\cdot 71* \\ \hline *** \\ 86 \\ 602 \\ \hline 62*7* \end{array}$$

што не е можно, бидејќи од $*+8+2$ не може да се добие пренос 2. Понатаму, ако двоцифрениот множител е 87, тогаш се добива решението

$$\begin{array}{r} 87\cdot 719 \\ \hline 609 \\ 87 \\ 609 \\ \hline 62379 \end{array}$$

а во останатите случаи не се добива решение на задачата. ■

Задача 8. Реши го бројниот ребус, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри:

$$\overline{abcde}-\overline{abc}\cdot\overline{de}=2003.$$

Решение. Нека $x=\overline{abc}, y=\overline{de}$. Тогаш ребусот го добива обликот $100x+y-xy=2003$, односно $(x-1)(100-y)=1903$. Од последното равенство следува дека $100-y|1903$. Но, бројот $100-y$ е едноцифрен или двоцифрен и како $1903=1\cdot 1903=11\cdot 173$ добиваме дека $100-y=1$ или $100-y=11$. Од $100-y=1$ следува $\overline{de}=99$, што противречи на условот дека цифрите d и e се различни. Од $100-y=11$ следува $\overline{de}=89$, па затоа $x-1=1903:11=173$, т.е. $\overline{abc}=174$. Конечно, решението на задачата е:

$$17489-174\cdot 89=2003. \blacksquare$$

Задача 9. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcd}+2007=\overline{efgh},$$

во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри и бројот $\overline{efgh}$ прима најголема можна вредност.

Решение. И при собирање на десетките и при собирање на стотките некоја цифра собрана со 0 треба да дава друга цифра. Последното е можно само ако при собирањето имаме пренос кој може да биде само 1. Оттука следува дека $c=9, g=0$ и $d\geq 4$. Бидејќи бараме збирот да има најголема можна вредност, прво ќе провериме дали $e=8$. Ако $e=8$, тогаш $a=6$. Сега, од собирањето на стотките следува дека $f=b+1$ и f треба да е најголемата можна цифра. Јасно, $f\neq 6,8$ и 9, а ако $f=7$, тогаш добиваме $b=6=a$, што не е можно. Понатаму, ако $f=5$, тогаш $b=4$, што не е можно бидејќи $d\geq 4$. Останува $f=4$, па затоа $b=3$ и оттука лесно го добиваме равенството: $6395+2007=8402$. $\blacksquare$

Задачи за самостојна работа

1. Реши го бројниот ребус, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри:
   а) $\overline{A}+\overline{AB}+\overline{ABC}+\overline{ABCD}=2001$, б) $\overline{A}+\overline{AB}+\overline{ABC}+\overline{ABCD}=2002$.
2. Реши го бројниот ребус, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри:
   а) $\overline{AACB}-\overline{ABC}-\overline{AB}-A=2002$, б) $\overline{AADB}-\overline{ABC}-\overline{AB}-A=2003$.
3. Во бројниот ребус

$$\overline{MIS}+\overline{MAS}=928,$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Бројот $\overline{SUMA}$ е делив со 4. Која цифра соодветствува на цифрата I ?

4. Во долната шема замени ги буквите со цифри така што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри и пресметувањата по редици и колони се точни.

$$\begin{array}{ccccc} AB & \cdot & B & = & CB \\ + & & - & & + \\ B & : & A & = & B \\ \hline DE & \cdot & F & = & GE. \end{array}$$

5. Во долната шема замени ги буквите со цифри така што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри и пресметувањата по редици и колони се точни.

$$\begin{array}{ccccc} RDR & - & EM & = & RAE \\ : & & - & & - \\ I & \cdot & RH & = & DR \\ \hline EH & + & MR & = & ARM. \end{array}$$

Ако добиените цифри ги запишеме во растечки редослед од лево кон десно и под секоја од нив ја запишеш соодветната буква ќе го добиеш името на еден славен математичар и физичар. За кој научник станува збор?

6. На местата на ѕвездичките запиши ги сите девет цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што равенствата ќе бидат точни: $*\cdot ** = *** = ** \cdot *$

7. На местото на секоја ѕвездичка стави по една цифра така што делењето ќе биде точно.

$$\begin{array}{l} *3****:** = **** \\ \underline{-\,***} \\ \quad\; *0* \\ \quad \underline{-\,**9} \\ \qquad\;\; ** \\ \qquad \underline{-\,**} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$