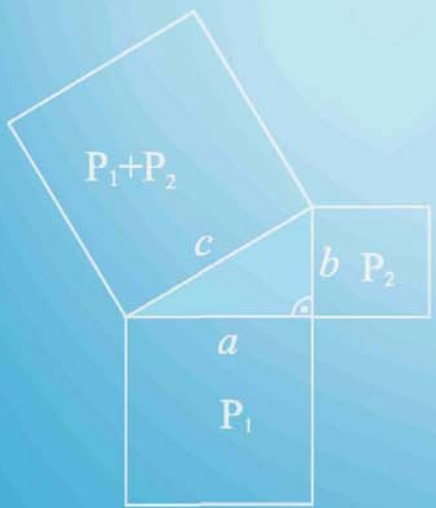
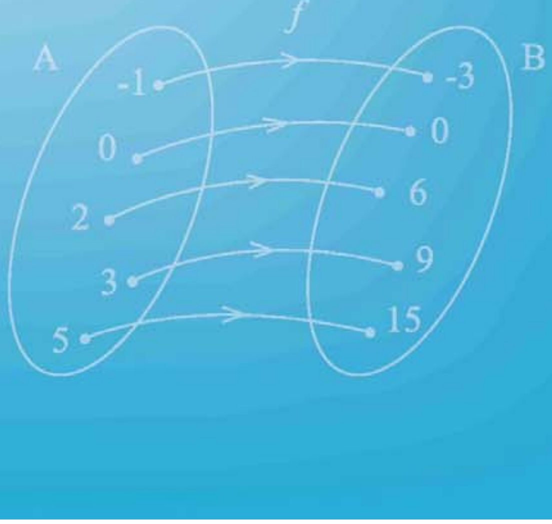
Глигор Тренчевски
Костадин Тренчевски

МАТЕМАТИКА 7



ax^2+bx+c



Глигор Тренчевски
Костадин Тренчевски

МАТЕМАТИКА
7 одделение

ВОВЕД

Учебникот Математика за VII одделение е пишуван согласно новата Наставна програма по математика за Основно училиште. Материјалот е поделен на пет теми. На крајот од секоја тема се дадени задачи за повторување и утврдување, како и задачи за самоконтрола. Секоја од задачите за самоконтрола носи по 6 бодови кои можат да бидат поделени на еднакви делови, ако задачата е поделена на подзадачи (под а, б, в,...), а скалата за самооценување е следната: 0-22 (недоволен), 23-35 оценка 2, 36-50 оценка 3, 51-62 оценка 4 и 63-72 оценка 5. Тие треба да придонесат за повторување и продлабочување на стекнатите знаења, како и со запознавање со нивната примена во животот. Во учебникот се дадени и неколку лекции или делови од лекции кои не се предвидени со Наставната програма и тие можат да ги користат учениците кои сакаат да знаат повеќе. Овие лекции се означени со ѕвезда и се прилагодени според тежината на возраста на учениците.

Во првата тема ќе се запознаеме со некои важни нови поими во геометријата како што се векторите и транслацијата. Во втората тема ќе се запознаеме со поимите за степен, квадратен корен од рационален број, со реалните броеви, а во третата тема ќе се запознаеме со полиномите како и со операциите со нив. Во четвртата и во петтата тема ќе се запознаеме со формули за пресметување на плоштината на многуаголниците и кругот, Питагоровата теорема како и со еден од најважните поими во математиката - со поимот функција. Ќе се запознаеме и со првите најпрости функции на правата и обратната пропорционалност меѓу величините. Доброто совладување на овие важни теми ќе ви овозможи лесно снаоѓање во решавањето на низа проблеми од практичниот живот и успешно следење на наставата по математика, физика и другите науки.

Задачите за вежби се поделени во три категории:

а) Задачи означени со крукче . Тоа се задачи со кои се врши увежбување на соодветните поими и барања во наставната единка.

б) Задачи означени во триаголниче . Тоа се посложени и потешки задачи, чие решавање е пропратено со соодветно упатство.

в) Задачи затворени во квадратче . Тоа се задачи, што можат да се користат за подготовка на наредната наставна единка.

На крајот од учебниокот дадени се одговори на скоро сите задачи, а на потешките се дадени упатства за решавање или решенија. Препорачливо е да се разгледаат и решенијата на тие задачи.

На сите ученици им пожелуваме многу успех во совледувањето на новите знаења. Тоа секако може да се постигне само со труд и редовно учење.

Авторите

ТЕМА I

ВЕКТОРИ. ТРАНСЛАЦИЈА

I.1. ПРАВЕЦ И НАСОКА

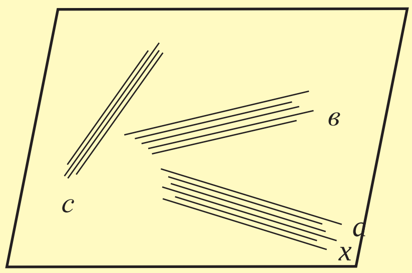
1 За кои две прави што лежат во една рамнина велиме дека се паралелни? Нацртајте неколку паралелни прави во вашите тетратки!

За паралелноста на правите забележуваш дека важат следниве својства:

1°. **Секоја права е паралелна сама со себе.**

2°. **Ако правата *p* е паралелна со правата *q*, тогаш и правата *q* е паралелна со правата *p*.**

3°. **Ако правата *p* е паралелна со правата *q*, а правата *q* е паралелна со правата *r*, тогаш правата *p* е паралелна со правата *r*.**



Црт. 1

***Дефиниција* 1. Множеството од сите прави што се паралелни со дадена права *a* се вика правец, зададен со правата *a* (црт. 1).**

Правата *a*, или која било друга права *x* од правецот зададен со правата *a*, се вика **претставник** на тој правец. Од аксиомата за паралелност на правите следува дека важи следното својство:

Низ секоја точка од рамнината минува една и само една права од даден правец.

1 Кои поими се користат во дефиницијата за поимот правец?

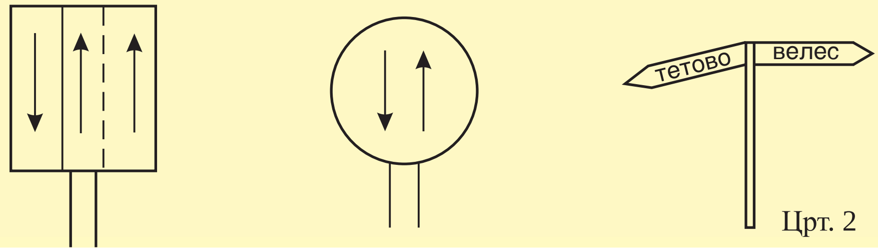
2 Дали е точно дека: ако две прави имаат ист правец, тогаш тие се паралелни?

2 Сега ќе се запознаеме со еден поим - поимот ***насока.*** Тој поим често го сретнуваме и во секојдневието. Велиме, бродот исплови во насока Охрид-Свети Наум, авионот полета во насока Скопје-Белград, „насока север“, итн. Насоката обично ја означуваме со стрелка (црт. 2), како кај сообраќајните знаци.

Да го разјасниме тој поим од чисто геометриска гледна точка.

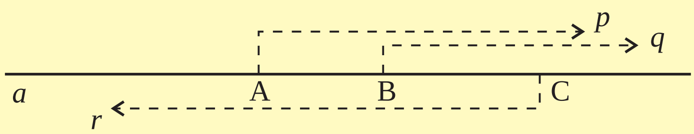
Нека *a* е произволна права, а *p*, *q* и *r* - полуправи на неа.

За полуправите p и q (црт. 3) велиме дека имаат **иста васока** (или дека се **истонасочени)**, а за полуправите p и r - дека имаат **спротивни насоки** (или дека се **спротивно насочени)**. Разгледувајќи го цртежот 3 забележуваме дека за истонасочените полуправи p и q важи $q \subseteq p$, а за спротивно насочените полуправи p и r ниту една од полуправите p и r не е подмножество од другата полуправа, т.е. $p \not\subset r$ и $r \not\subset p$. Ова својство на полуправите *p*, *q* и *r*, го користиме за да ја воведиме следната дефиниција:



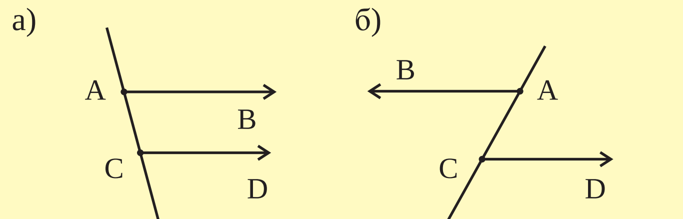
Црт. 2

***Дефиниција* 2. Две полуправи од една права се викаат истонасочени, кога едната од нив е подмножество од другата. А две полуправи од една права се викаат спротивно насочени, кога ниту една од нив не е подмножество на другата.**



Црт. 3

Нека полуправите AB и CD лежат на две различни паралелни прави (црт. 4). Ако низ нивните почетни точки A и C повлечеме права, таа ќе ја раздели рамнината на две полурамнини со заедничка граница - правата AC. Ако полуправите AB и CD лежат во една од тие полурамнини, тогаш тие се викаат **истонасочени** (црт. 4а). Ако, пак, полуправите AB и CD лежат во различни полурамнини, тогаш тие се викаат **спротивно насочени** (црт. 4б).



Црт. 4

Истонасоченоста на полуправите ја означуваме со знакот „$\uparrow\uparrow$“, а спротивно-насоченоста - со знакот „$\uparrow\downarrow$“. На пример:

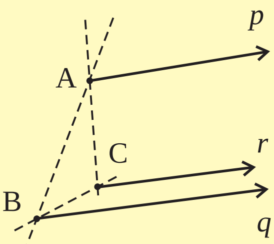
$$p \uparrow\uparrow q, \quad p \uparrow\downarrow r, \quad AB \uparrow\uparrow CD \qquad \text{(црт. 3 и 4а).}$$

Разгледувајќи го цртежот 5 забележуваме дека за истонасоченоста на полуправите важат следниве својства:

1°. $p \uparrow\uparrow p$,

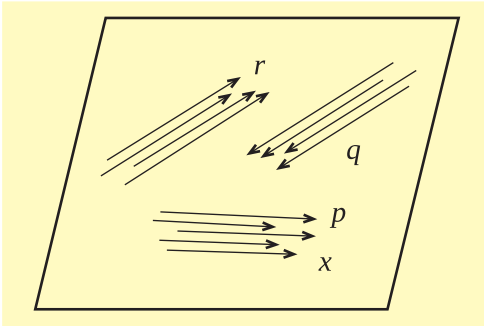
2°. $p \uparrow\uparrow q \Rightarrow q \uparrow\uparrow p$,

3°. $(p \uparrow\uparrow q \text{ и } q \uparrow\uparrow r) \Rightarrow p \uparrow\uparrow r$.

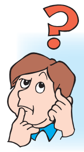


Црт. 5

Симболот „$\Rightarrow$“ го читаме: „... **„ако ..., тогаш ...“** или **„од ... следува ...“**.



Црт. 6



***Дефиниција* 3. Множеството *P* од сите полуправи, кои се истонасочени со дадена полуправа *p* се вика насока, зададена со полуправата *p*.**

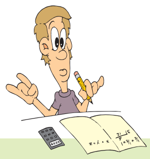
Полуправа *p*, или која било друга полуправа *x* од насоката *P* зададена со полуправата *p*, се вика **претставник** на таа насока. Велиме уште дека полуправата *p* има насока *P*.

Очигледно, ако две полуправи лежат на две прави кои не се паралелни, тогаш тие определуваат **различни насоки**. Ако, пак, полуправите лежат на паралелни прави, тие определуваат исти или спротивни насоки.

3 Дадена е права *p*. Колку различни насоки може да се зададат со полуправи кои лежат на правата *p*?

4 Колку различни насоки можат да се зададат со полуправи, кои ја содржат која било страна на даден триаголник?

ЗАДАЧИ



5 Дадена е полуправа *AB* и произволна точка $M \notin AB$. Колку различни полуправи: а) истонасочени, б) спротивнонасочени со полуправата *AB* постојат, што имаат почеток во точката *M*?

6 Покажи дека, ако дадена права ја сече една права од даден правец, тогаш таа ги сече сите прави од тој правец.

7 Покажи дека, ако две прави *a* и *b* се сечат, тогаш тие не припаѓаат на ист правец.

8 Истонасочените полуправи *AC* и *CD* лежат на иста права. Која фигура може да биде: а) унијата, б) пресекот на тие полуправи? Направи цртежи.

9 Спротивно насочените полуправи *AB* и *CD* лежат на иста права. Која фигура може да биде: а) унијата, б) пресекот на тие полуправи? Направи соодветни цртежи.

10 Даден е агол *AOB* и произволна точка *M*. Конструирај агол со теме во точката *M*, чии краци се: а) истонасочени, б) спротивно насочени со краците на аголот *AOB*.

11 Докажи дека: два агла со соодветно спротивно насочени краци се еднакви.

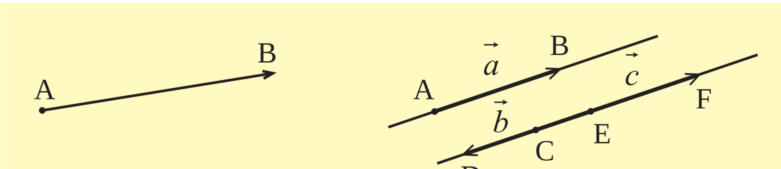
I.2. НАСОЧЕНА ОТСЕЧКА. ВЕКТОР

Знаеме, низ кои било две различни точки A и B во рамнината минува единствена права p, што ја означуваме уште и со права AB. Со AB го означуваме и делот од правата p ограничен со точките A и B, кој се вика **отсечка** со крајни точки A и B. Точките A и B ги сметаме „рамноправни“ и не правиме разлика меѓу отсечката AB и отсечката BA. Меѓутоа, постојат проблеми во кои се разгледуваат и отсечки, кај кои едната крајна точка се смета за **почеток**, а другата крајна точка - за **крај** на отсечката.

***Дефиниција* 1. Отсечката, на која едната крајна точка е земена за почеток, а другата - за крај, се вика насочена отсечка или вектор.**

Ако на отсечката AB точката A е избрана за почеток, а B - за крај, тогаш така определената насочена отсечка симболички ја запишуваме со $\overrightarrow{AB}$. Притоа, на прво место го пишуваме почетокот, а на второ место-крајот на насочената отсечка.

Насочената отсечка, односно векторот $\overrightarrow{AB}$ го цртаме како отсечка со стрелка, што ја ставаме на крајот во точката B (црт.7). Векторите често ги означуваме и со мали латински букви, кога над нив се стават стрелки, на пример: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ итн. (црт. 8).



Црт. 7

Црт. 8

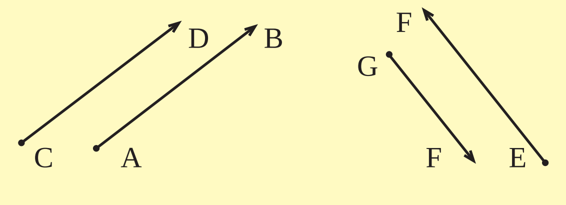
1 Обележи три различни точки со A,B и C и нацртај ги насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$!

Кај секоја насочена отсечка, односно вектор, разликуваме: **должина, правец** и **насока на векторот**. На пример:

Ако $\overrightarrow{AB}$ е вектор, тогаш растојанието $\overline{AB}$ се вика **должина на векторот** $\overrightarrow{AB}$ и се означува со $|\overrightarrow{AB}|$, или $\overline{AB}$. Правецот, зададен со правата AB, се вика **правец на векторот** $\overrightarrow{AB}$. А насоката, зададена со полуправата AB, се вика **насока на векторот** $\overrightarrow{AB}$. Ако два вектора имаат ист правец, т.е. тие лежат на една права или на две различни паралелни прави, тогаш велиме дека тие се **колинеарни**. На пример, векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$, односно $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на цртежот 8 се колинеарни.

2 Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PS}$ се колинеарни. Дали се колинеарни и векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SP}$?

За векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ велиме дека се **истонасочени** и пишуваме $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, ако полуправите AB и CD се истонасочени (црт. 9), а за векторите $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GH}$ велиме дека се **спротивно насочени** и пишуваме $\overrightarrow{EF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GH}$, ако полуправите EF и GH се спротивно насочени (црт. 10).



Црт. 9 Црт. 10

Точките A и B ($A \neq B$) определуваат два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, кои имаат иста должина, но се спротивно насочени. Два вектора, кои имаат иста должина и спротивни насоки, се викаат **спротивни вектори**.

Ако $\vec{a}$ е даден вектор, тогаш спротивниот вектор на него го означуваме со $-\vec{a}$.

Во математиката често пати се разгледува насочена отсечка во која почетната и крајната точка се совпаѓаат, како на пример насочената отсечка $\overrightarrow{MM}$. Таквите отсечки во кои почетната и крајната точка се совпаѓаат се вика **нулта насочена отсечка** или **нулти вектор.** Тоа е вектор со должина нула, но без определен правец и без определена насока. Затоа **нулти векторот е колинеарен со секој друг вектор.** Секој нулти вектор го означуваме уште и со $\vec{0}$.

3 а) Запиши ги сите ненулти вектори со краеви во A и B $(A \neq B)$.
б) Запиши ги сите вектори со краеви во точките A и B.

ЗАДАЧИ

4 Дали е точно дека: а) Ако два вектора имаат ист правец, тогаш тие имаат и иста насока, б) Ако два вектора имаат иста насока, тогаш тие имаат и ист правец, в) Ако два вектора се спротивно насочени, тогаш тие имаат ист правец?

5 Дали е точно тврдењето: Два вектора имаат ист правец, ако и само ако тие се истонасочени или спротивно насочени?

6 Точно ли е дека: а) Секои два истонасочени вектора се колинеарни?, б) Секои два спротивно насочени вектора се колинеарни?

7 Нацртај неколку вектори со еднаква должина.

8 Каква врска постои меѓу должините на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$? Запиши ја таа врска.

9 Кој вектор има повеќе: а) правци, б) насоки?

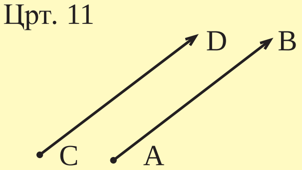
10 Даден е вектор $\overrightarrow{AB}$ и произволна точка M. Нацртај вектор $\vec{a}$ со почеток во точката M, кој да е истонасочен со $\overrightarrow{AB}$ и да има иста должина со него.

I.3. ЕДНАКВОСТ НА ВЕКТОРИ

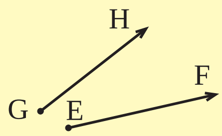
Дефиниција. **Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ велиме дека се еднакви, ако тие имаат еднакви должини и се истонасочени, т.е. ако**

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ и } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}.$$

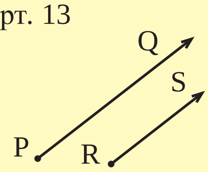
Црт. 11



Црт. 12

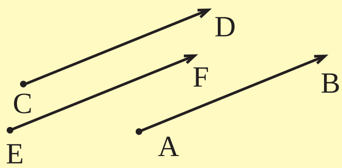


Црт. 13



На пример, векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на цртеж 11 се еднакви и пишуваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Но, векторите $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GH}$ на црт. 12 не се еднакви, иако имаат еднакви должини (Зошто?). И векторите $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$ (црт. 13) не се еднакви, иако имат иста насока (Зошто?).

Сите нулти вектори се еднакви меѓу себе, т.е. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = ... = \vec{0}$.



Црт. 14

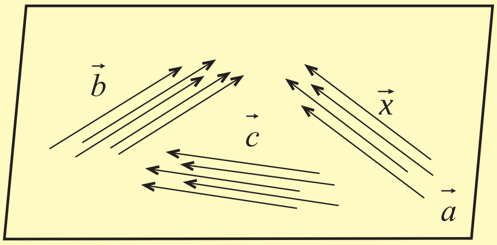
Од цртежот 14 согласно дефиницијата заклучуваме дека еднаквоста на векторите ги има следниве својства:

1°. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$,

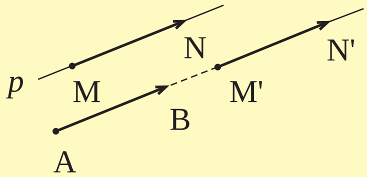
2°. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$,

3°. ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

На цртежот 15 гледате три групи на еднакви меѓу себе вектори.



Црт. 15



Црт. 16

1 Познато е дека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$. Дали е точно дека: а) $AB \parallel MN$, б) $\overline{AB} = \overline{MN}$?

Нека е даден вектор $\overrightarrow{AB}$ и една произволна точка $M \notin AB$, или $M' \in AB$. Ќе покажеме дека постои единствен вектор $\overrightarrow{MN}$, со почеток M, кој е еднаков со дадениот вектор $\overrightarrow{AB}$ (црт. 16).

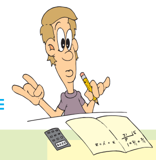
Навистина, согласно аксиомата за паралелност, низ точката M минува единствена права p - паралелна со правата AB. Ако на правата p од точката M во насока на векторот

$\overrightarrow{AB}$ ја нанесеме отсечката MN ($\overline{MN} = \overline{AB}$), ќе добиеме единствена точка N - крај на бараниот вектор $\overrightarrow{MN}$ (црт. 16).

Конструкцијата на векторот $\overrightarrow{MN}$ се вика **пренесување на векторот** $\overrightarrow{AB}$ **од точката** ***M*** (црт. 16).

Значи, даден вектор $\vec{a}$ може да се пренесе од која било точка во рамнината.

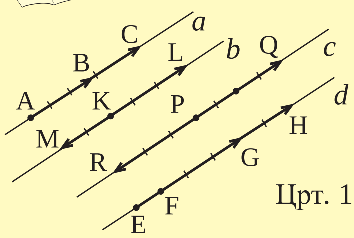
ЗАДАЧИ



2 На цртежот 17 правите a,b,c и d се паралелни. Дали е точно дека:

а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$, б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG}$ в) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KM}$,

г) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{PQ}$, д) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FH}$ ѓ) $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{KL}$?



Црт. 17

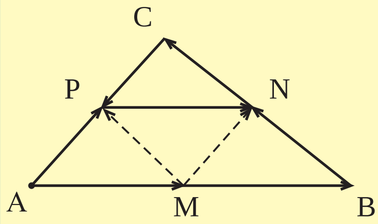
3 Дали е точно тврдењето:

$(AB \parallel KM$ и $\overline{AB} = \overline{KM}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KM}$.

4 Нека ABC е триаголник, а точките M, N, P се средини соодветно на страните AB, BC и CA. Дали е точно дека (црт. 18):

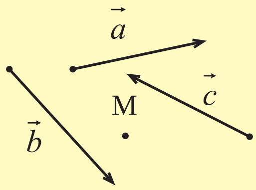
а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BN}$, в) $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MB}$,

г) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$, д) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN}$?



Црт. 18

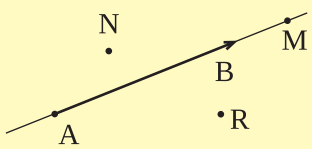
5 На цртежот 19 зададени се векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и точката M. Пренеси го секој од тие вектори од точката M.



Црт. 19

6 Нацртај произволен вектор $\vec{a}$ и избери точка N. Најди точка M така што $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Колку такви точки M постојат?

7 Нацртај вектор $\overrightarrow{AB}$ и означи три точки M, N и R како на црт. 20. Пренеси го векторот $\overrightarrow{AB}$ од секоја од точките M, N и R.

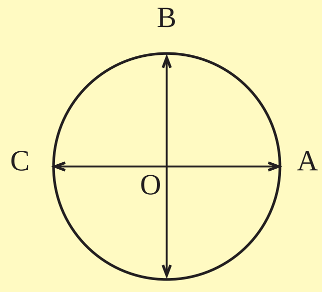


Црт. 20

8 Кои од следниве тврдења се точни: а) Ако два вектора се колинеарни, тогаш тие се еднакви, б) Ако два вектора се колинеарни и имаат еднакви должини, тогаш тие се еднакви, в) Ако два вектора се еднакви, тогаш тие се колинеарни, г) Ако два вектора имаат еднакви должини и иста насока, тогаш тие се еднакви?

9 Нека A, O, B се три различни точки. Докажи дека: ако важи равенството $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$, тогаш точката O е средина на отсечката AB.

10 Земи два произволни вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и произволна точка M, потоа конструирај ги векторите $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CD}$!



Црт. 21

11 Радиусите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ на кружницата k образуваат четири прави агли (црт. 21). Земи произволна точка K и конструирај ги векторите:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OC} \text{ и } \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{OD}.$$

Одреди каква фигура образуваат тие вектори. Каков е векторот $\overrightarrow{SK}$?

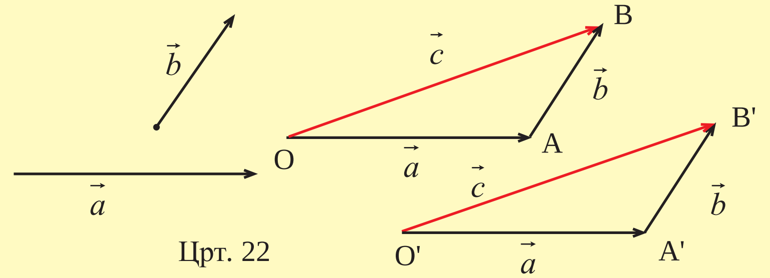
I. 4. СОБИРАЊЕ НА ВЕКТОРИ. СВОЈСТВА

1 Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два вектора, а O-произволна точка во рамнината (црт. 22). Да го пренесеме векторот $\vec{a}$ од точката O, чиј крај да го означиме со A, а потоа да го пренесеме векторот $\vec{b}$ од точката A и крајот да му го означиме со B, т.е. да ги конструираме векторите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ (црт. 22).

Во тој случај точките O и B определуваат еден нов вектор $\overrightarrow{OB}$, чиј почеток е почетокот на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, а крај му е крајот на векторот $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. За векторот $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ велиме дека е **надоврзан вектор** на векторот $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

За кои два вектори велиме дека се надоврзани? Покажи го тоа и со пример.

Да означиме со O' друга произволна точка во рамнината и да ги конструираме на горниот начин векторите $\overrightarrow{O'A'} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{A'B'} = \vec{b}$ (црт. 22). Ќе добиеме вектор $\overrightarrow{O'B'}$. Може да се докаже дека векторите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{O'B'}$ се еднакви. Тоа покажува дека за сите можни положби на точката O' во рамнината, насочените отсечки $\overrightarrow{O'B'}$ определуваат еден нов вектор $\vec{c}$, што е еднаков со векторот $\overrightarrow{OB}$ (црт. 22).

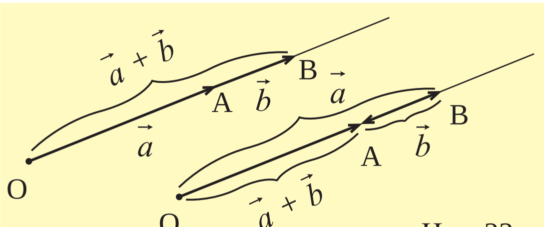


Црт. 22

За векторот $\vec{c}$ велиме дека е **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

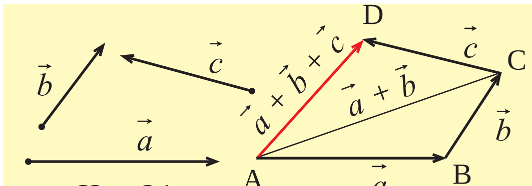
Дефиниција. **Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два векрота, O е произволна точка и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, а $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, тогаш векторот $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ се вика збир на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и пишуваме:**

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}, \text{ т.е. } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$



Црт. 23

Да забележиме дека горната дефиниција за збир на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи и кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни (црт. 23).



Црт. 24

Значи, за кои било три дадени точки A, B, C важи равенството:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

кое се вика **правило на триаголник.**

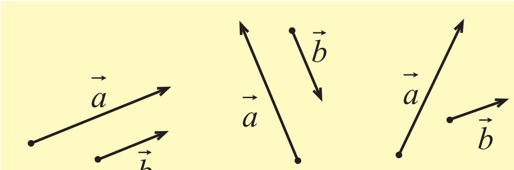
Збирот на три дадени вектори го определуваме кога кон збирот на првите два вектора го додадеме третиот вектор (црт. 24), итн.

1 Дадени се два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (црт. 25). Конструирај ги збировите:

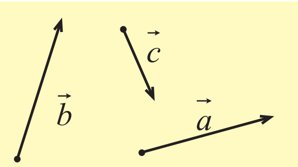
а) $\vec{a} + \vec{b}$, б) $\vec{b} + \vec{a}$.

2 Дадени се три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (црт. 26). Конструирај ги збировите:

а) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, б) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, в) $(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$.



Црт. 25



Црт. 26

2 Од алгебрата знаеме дека операцијата собирање на рационални броеви ги има својствата: 1°. $a+0=a$, 2°. $a+(-a)=0$, 3°. $a+b=b+a$, 4°. $(a+b)+c=a+(b+c)$, каде a, b, c се кои било рационални броеви.

Интересно е да видиме дали и воведената операција собирање на вектори има слични такви својства.

Нека е даден вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и нулти вектор $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$. Нивниот збир, согласно правилото на триаголник, ќе биде

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}.$$

Со тоа докажавме дека:

1°. **За секој вектор $\vec{a}$, важи равенството** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Нека е даден вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Тогаш спротивен на него ќе биде векторот $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$. Навистина, ако ги собереме тие два вектора ќе добиеме: $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Со тоа докажавме дека:

2°. **За секој вектор $\vec{a}$, важи равенството:** $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$,

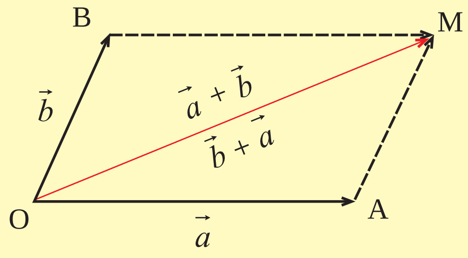
т.е. збирот на кои било два спротивни еден на друг вектори е нулти вектор.

Сега ќе докажеме дека собирањето на векторите е комутативна и асоцијативна операција, т.е.

3°. **За секои два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи равенството:** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

4°. **За секои три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ важи равенството:** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

За да го докажеме својството 3°, векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ги пренесуваме од иста точка-почеток O. Нека $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Нека M е таква точка што $AOMB$ е паралелограм (црт. 27).



Црт. 27

Од својствата на паралелограмот $AOMB$ знаеме дека $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BM}$ и $OA \parallel BM$. Освен тоа, векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BM}$ се истонасоченни, па затоа $\overrightarrow{BM}=\vec{a}$. Аналогно, важи $\overrightarrow{AM}=\vec{b}$. Затоа:

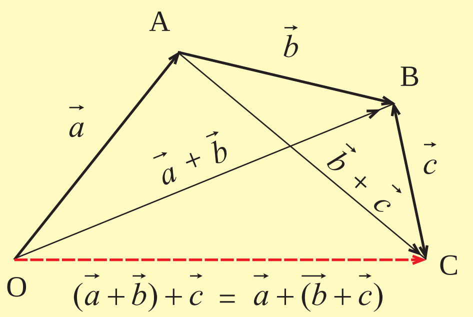
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$ и $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$,

па важи:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Фактот дека векторот $\overrightarrow{OM}$ е збир на векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, каде M е таква точка што $AOMB$ е паралелограм, се вика **правило на паралелограм**.

За да го покажеме својстството 4°, избираме произволна точка O. Нека A е таква точка што $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, B е таква точка што $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ и C е таква точка што $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ (црт. 28).



Црт. 28

Тогаш од цртежот 28 имаме:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC} \text{ и}$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

па гледаме дека

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

ЗАДАЧИ

3 Радиусите *OA*, *OB*, *OC*, *OD* на кружницата *k* (црт. 21) образуваат четири прави агли. Конструирај ги збировите:

а) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, б) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, в) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$, г) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, д) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

4 Даден е шестаголникот *ABCDEF* (црт. 29). Одреди го збирот на векторите:

а) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}$, б) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}$, в) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$,

г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$, д) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$.

5 Одреди, на кои вектори претставува збир следниот вектор:

а) $\overrightarrow{DC}$, б) $\overrightarrow{BC}$, в) $\overrightarrow{AB}$ (црт.29).

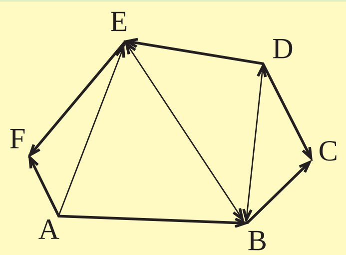
6 Дадени се векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (црт. 30а). Конструирај ги векторите:

а) $\vec{a}+\vec{b}$, б) $\vec{a}+\vec{c}$, в) $\vec{b}+\vec{d}$, г) $\vec{b}+\vec{c}$, д) $\vec{a}+(-\vec{b})$.

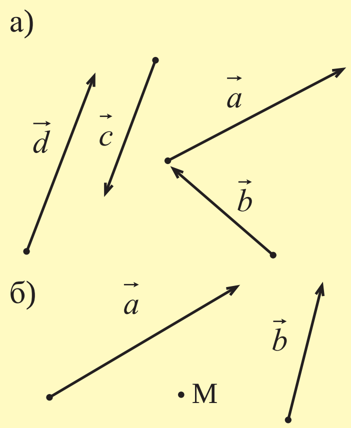
7 Означи пет различни точки со *A*, *B*, *C*, *D* и *E*. Со помош на векторите $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{DE}=\vec{d}$ изрази ги векторите: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{AE}$.

8 Покажи дека важи тврдењето: $\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}$.

9 Дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и точката *M* (црт. 30б). Од точката *M* нанеси го векторот $\vec{a}$ и неговиот крај означи го со *N*. Потоа од точката *N* нанеси го векторот $-\vec{b}$ и неговиот крај означи го со *P*. На кои вектори, векторот $\overrightarrow{MP}$ е збир?



Црт. 29



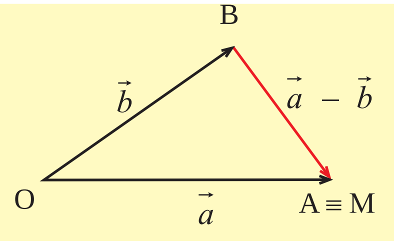
Црт. 30

I. 5. ОДЗЕМАЊЕ НА ВЕКТОРИ

Операцијата одземање на вектори ја дефинираме (исто како кај броевите) како обратна операција на собирањето на вектори.

***Дефиниција.* Разлика на вектор $\vec{a}$ со вектор $\vec{b}$ се вика таков вектор $\vec{x}$ чиј збир со векторот $\vec{b}$ е еднаков со векторот $\vec{a}$, т.е. да важи $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$. Разликата на векторот $\vec{a}$ со вектор $\vec{b}$ се означува со $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$.**

Ќе покажеме дека за дадени вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, секогаш постои таков вектор $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$.



Црт. 31

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат заеднички почеток O, т.е. нека е $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ (црт. 31). Бараниот вектор (ако постои) може да се нанесе во точката B и нека е $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$. Но, бидејќи збирот $\vec{b}+\vec{x}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$ мора да е еднаков со векторот $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, затоа точката M ќе се совпадне со точката A, т.е. $M=A$.

Според тоа, правилото за одземање на вектори, гласи: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Ќе покажеме дека: Одземањето на векторот $\vec{b}$ од некој вектор $\vec{a}$ може да се замени со додавање кон $\vec{a}$ на векторот $-\vec{b}$, што е спротивен на $\vec{b}$, т.е. важи: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, односно разликата $\vec{a}-\vec{b}$ е еднаква на векторот $\vec{a}+(-\vec{b})$.

За да го докажеме тоа, доволно е да покажеме дека $\vec{b}+[\vec{a}+(-\vec{b})]=\vec{a}$. Навистина, врз основа на својствата на збирот на векторите, имаме:

$$\vec{b}+[\vec{a}+(-\vec{b})]=[\vec{a}+(-\vec{b})]+\vec{b}=\vec{a}+[(-\vec{b})+\vec{b}]=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

1 Нацртај два произволни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а потоа конструирај ги разликите: а) $\vec{a}-\vec{b}$, б) $\vec{b}-\vec{a}$.

Што забележуваш од решението на задача 1? Дали решенијата под а) и б) се исти? Забележуваш дека векторите $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{b}-\vec{a}$ не се еднакви, туку спротивни.

Значи комутативниот закон за одземање на вектори не важи. Исто така и асоцијативниот закон за одземање на вектори не важи. Во тоа лесно ќе се увериш ако избереш три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, каде што $\vec{c}$ е ненулти вектор, а потоа со конструкција на векторите $(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$ и $\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})$ ќе забележиш дека овие два вектора се различни.

При ослободување од загради важат истите правила кои важат при ослободување од загради во еден израз од цели или рационални броеви.

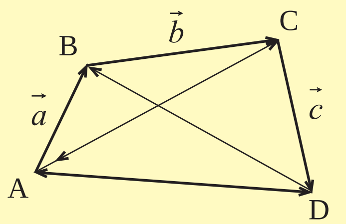
ЗАДАЧИ

2 Дадени се два колинеарни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ со иста насока. Конструирај ја разликата $\vec{a}-\vec{b}$,ако е: а) $|\vec{a}|>|\vec{b}|$, б) $|\vec{a}|<|\vec{b}|$, в) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

3 Дадени се три вектори со заеднички почеток: $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$. Конструирај ги векторите: а) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}$, б) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}$, в) $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}$.

4 Нацртај два произволни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а потоа конструирај ги векторите: а) $\vec{a}+\vec{b}$, б) $\vec{a}-\vec{b}$, в) $\vec{b}-\vec{a}$, г) $-\vec{a}-\vec{b}$.

5 На цртежот 32 зададени се векторите $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.
Изрази ги векторите: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DA}$ со помош на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Црт. 32

6 Упрости ги изразите: а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB})$,
б) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})$, в) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD})$.

7 Одреди ги векторите: а) $\vec{a}-\vec{a}$, б) $\vec{a}-\vec{0}$, в) $\vec{0}-\vec{a}$, г) $(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}$, д) $\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})$.

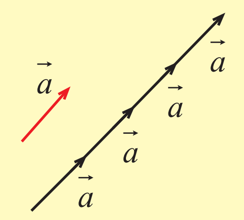
8 Со конструкција покажи дека важи равенството $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})$.

9 Нека *A*,*B*,*C*,*D* се произволни точки во рамнината. Докажи:
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$, б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$.

10 Нацртај произволен вектор $\vec{a}$, а потоа конструирај ги векторите: а) $\vec{a}+\vec{a}$, б) $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$, в) $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$.

I.6. МНОЖЕЊЕ НА ВЕКТОР СО БРОЈ. СВОЈСТВА

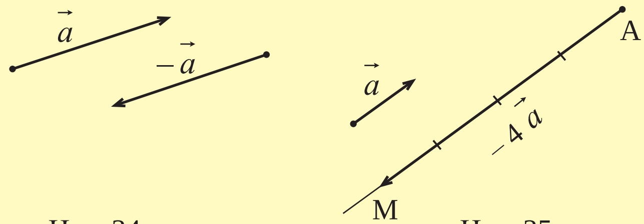
1 Нека е зададен вектор $\vec{a}$. Знаеме да го одредиме збирот $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ (црт. 33). Тој збир кратко го запишуваме со $4\vec{a}$ и се вика **производ на векторот** $\vec{a}$ **со бројот 4**. Очигледно е дека должината на производот $4\vec{a}$ е еднаква на должината на векторот $\vec{a}$ помножена со 4, и има иста насока со векторот $\vec{a}$ (црт. 33).



Црт. 33

Производот на векторот $\vec{a}$ со бројот 1 го викаме самиот вектор $\vec{a}$, а производ на векторот $\vec{a}$ со бројот –1 го викаме $-\vec{a}$, што е спротивен на дадениот вектор $\vec{a}$ (црт. 34).

Производ, пак, на векторот $\vec{a}$ со некој негативен број, на пример, со бројот –4, го викаме таков вектор $\overrightarrow{AM}$, чија должина е еднаква на должината на векторот $\vec{a}$ помножена со бројот |–4|, а има насока што е спротивна на насоката на векторот $\vec{a}$ (црт. 35). Во смисла на тоа ја прифаќаме следнава општа:



Црт. 34 Црт. 35

Дефиниција. **Производ на ненулти вектор $\vec{a}$ со бројот $k \neq 0$ се вика таков вектор, чија должина е еднаква на производот од должината ва векторот $\vec{a}$ и апсолутната вредност на бројот *к*, и е истонасочен со векторот $\vec{a}$ при *к* > 0, а спротивнонасочен со векторот $\vec{a}$ при *к*< 0.**

Производот на векторот $\vec{a}$ со бројот *к* го означуваме со $к\vec{a}$. Согласно дефиницијата имаме дека $|к\vec{a}| = |к|\cdot|\vec{a}|$.

Со горната дефиниција не се опфатени само случаите кога $\vec{a} = \vec{0}$ и *к* = 0. Нив ги воведуваме со дополнителни дефиниции: $к\cdot\vec{0} = \vec{0}$, за секој број *к*, и $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$, за секој вектор $\vec{a}$.

Од усвоената дефиниција следува дека: векторите $\vec{a}$ и $к\vec{a}$ се или истонасочени (при *к* > 0), или спротивно насочени (при *к* < 0), т.е. **имаат ист правец, односно дека се колинеарни.**

1 Даден е вектор $\vec{a}$. Конструирај ги векторите: а) $2\vec{a}$, б) $-3\vec{a}$.

2 Од алгебрата знаеме дека операцијата множење на рационални броеви ги има својствата:

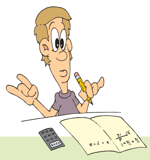
1°. $1\cdot a=a$, 2°. $(k\cdot p)\cdot a= k(p\cdot a)$, 3°. $(к+p)\cdot a = ka+pa$, 4°. $k(a+b)=ka+kb$,
каде *k*, *p*, *a* и *b* се произволни броеви.

Може да се покаже дека, такви слични својства има и операцијата множење на вектор со број, односно дека:

За кои било вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и кои било броеви *к* и *p*, важат равенствата:

$1°.\ 1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $3°.\ (\kappa+p)\cdot\vec{a}=k\vec{a}+p\vec{a}$,

$2°.\ (kp)\cdot\vec{a}=k(p\vec{a})$, $4°.\ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.



ЗАДАЧИ

2 Задај два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, потоа конструирај ги векторите:

а) $3\vec{a}+\vec{b}$, б) $2\vec{a}-3\vec{b}$, в) $\vec{a}-\vec{b}$.

3 За кои вредности на бројот k векторите $\vec{a}$, $(\vec{a}\neq\vec{0})$ и $k\vec{a}$ се:
а) исто насочени, б) спротивно насочени, в) еднакви, г) спротивни вектори?

4 За кои вредности на бројот k се точни исказите:

а) $k\vec{a}=\vec{a}$, б) $|k\vec{a}|>|\vec{a}|$, в) $|k\vec{a}|<|\vec{a}|$, каде $\vec{a}$ е ненулти вектор?

5 Кои својства на операцијата множење на вектор со број ги изразуваат равенствата:

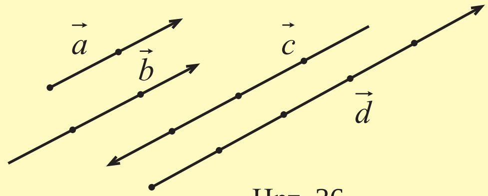
а) $(m\cdot n)\vec{a}=m(n\cdot\vec{a})$, б) $m\vec{a}+n\vec{a}=(m+n)\vec{a}$, в) $m\vec{a}+m\vec{b}=m(\vec{a}+\vec{b})$?

6 Користејќи ги својствата на операциите со вектори, упрости ги изразите:

а) $2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{a}+5\vec{b}$, б) $2(3\vec{a}+\vec{b})+3(-\vec{a}+2\vec{b})$,

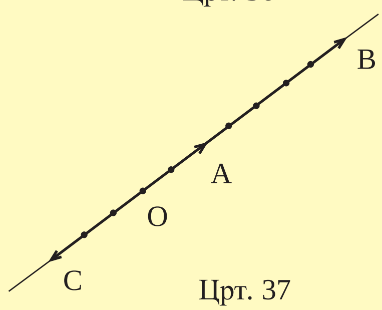
в) $3(\vec{a}-2\vec{b})-2\vec{a}+4\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\right)$.

7 На цртежот 36 зададени се векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$. Изрази ги векторите $\vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ преку векторот $\vec{a}$.



Црт. 36

8 На цртежот 37 зададени се векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Одреди ги броевите κ_1 κ_2, κ_3, за кои важат равенствата: $\overrightarrow{OB}=\kappa_1\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}=\kappa_2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}=\kappa_3\overrightarrow{OC}$.



Црт. 37

9 Нека O, A и B се произволни точки, а M нека е средина на отсечката AB. Докажи дека $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

10 Нека ABC е произволен триаголник, а T неговото тежиште. Докажи дека: $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}=\vec{0}$.

I.7. СКАЛАРНИ И ВЕКТОРСКИ ВЕЛИЧИНИ

Во претходните лекции се запознавме со векторите, операциите со нив и нивните својства. Видовме дека својствата на операциите со вектори се аналогни како оние за броевите. Во практиката најчесто се среќаваме со два вида величини: **скаларни** и **векторски.**

Скаларни величини се оние, кои се наполно определени со задавање на еден број, односно со нивната големина. Такви се, на пример: температурата на воздухот (мерена во Целзиусови степени), масата на едно тело (мерена во грамови), должината на некоја отсечка (мерена во метри), плоштината на двор (мерена во m^2), волуменот на некое тело (мерен во m^3) итн. Забележуваме дека сите претходно наведени величини се еднозначно определени со соодветната единица мерка и мерниот број.

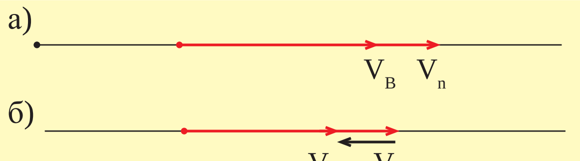
Векторски величини, пак, се оние величини за чие задавање е потребно не само нивната големина, туку и нивната насока. Тие се сретнуваат многу често во физиката и во техниката. Такви се, на пример: брзината, забрзувањето, силата и други. Еве два примера:

Пример 1. Еден воз се движи со брзина од 100 km на час, а еден патник во возот се движи со брзина од 5 km на час. Колкава е брзината на патникот во однос на Земјата?

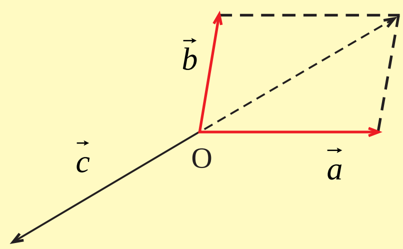
Бидејќи брзината е векторска величина, неопходно е да знаеме дали патникот во возот се движи во истата насока како и возот, или пак, во спротивна насока. Ако се движи во иста насока како и возот (црт. 38а), тогаш бараната брзина на патникот ќе биде 100 km/h +5 km/h=105 km/h во насока на движењето на возот. Ако пак, патникот се движи во насока спротивна од движењето на возот (црт. 38б), тогаш бараната брзина ќе биде 100 km/h–5 km/h=95 km/h во насока на движењето на возот.

Пример 2. Три јажиња се врзани во јазол, а останатите краеви јазолот го тегнат три деца во различни насоки. Ако децата воспоставиле рамнотежа, што може да се каже за трите вектори на сила?

Нека јазолот е точка O, а трите вектори на сила ги означиме со $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (црт. 39). Фактот дека децата воспоставиле рамнотежа, всушност, покажува дека збирот на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е $\vec{0}$, т.е. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.



Црт. 38



Црт. 39

1. Кои величини ги нарекуваме скаларни? Наброј некои од нив.
2. Кои величини ги нарекуваме векторски? Наброј некои од нив.

ЗАДАЧИ

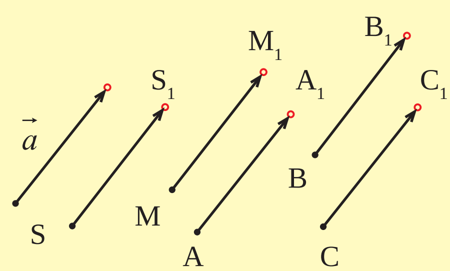
3 Од предметот географија знаеш дека во секоја точка од Земјата (освен во северниот и јужниот пол), еднозначно се определени насоките: исток, запад, север и југ. Нека ние се наоѓаме во некоја точка А. а) Дали со правецот север-југ е определен вектор во точката А? б) Дали со насока во исток е определен вектор во точката А?, в) Дали со придвижување од точката А за 5m во насока запад е определен вектор во точката А?

4 Даден вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ претстави го како збир од: а) два, б), три, в) четири кои било вектори.

I. 8. ТРАНСЛАЦИЈА

Во VI одделение се запознавме со два вида пресликување на рамнината на самата себе. Тоа беа **осна** и **централна симетрија.** Сега ќе разгледаме уште еден вид пресликување, наречено **транслација.**

Нека е даден еден вектор $\vec{a}$. Знаеме, во која било точка S од рамнината постои единствен вектор $\overrightarrow{SS_1}$, кој е еднаков со векторот $\vec{a}$ (црт. 40). Значи, за секоја точка S постои единствена точка S_1, таква што $\overrightarrow{SS_1} = \vec{a}$.



Црт. 40

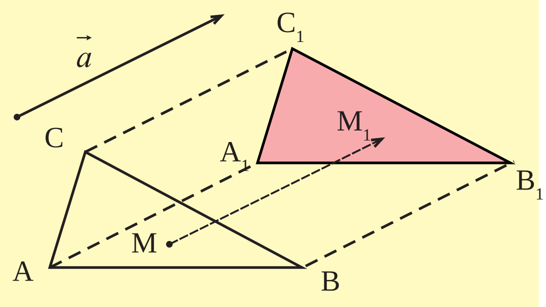
Да извршиме едно пресликување на точките од рамнината согласно правилото: На секоја точка M, се придружува точката M_1 таква што векторот $\overrightarrow{MM_1}$ да е еднаков со дадениот вектор $\vec{a}$. На тој начин имаме: $M \to M_1$, $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ итн. (црт. 40). Ова пресликување ќе го викаме **транслација за вектор** $\vec{a}$, или само **транслација**, а ќе го означуваме со $\tau_{\vec{a}}$. Според тоа ја усвојуваме следнава:

Дефиниција. **Транслација за вектор $\vec{a}$ го викаме пресликувањето (на рамнината на самата на себе), при кое на секоја точка M се придружува точка M_1 таква што $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$.**

Дадениот вектор $\vec{a}$ се вика **вектор на транслација** $\tau_{\vec{a}}$, точката M_1- **слика** на точката M при $\tau_{\vec{a}}$**,** а точката M-**оригинал** на M_1.

Да разгледаме транслација за нулти вектор. Ако точката A се пресликa во точка A_1, тогаш $\overrightarrow{AA_1} = \vec{0}$, па затоа $A_1=A$. Значи секоја точка се пресликува сама на себе. Затоа транслацијата за нулти вектор ја нарекуваме **идентична транслација**.

Ако точката M_1 е слика на M при $\tau_{\vec{a}}$, тоа го запишуваме: $M \xrightarrow{\tau_{\vec{a}}} M_1$, или $M_1 = \tau_{\vec{a}}(M)$.



Црт. 41

За да се определи сликата M_1 на точката M при $\tau_{\vec{a}}$, доволно е во точката M да се пренесе векторот $\vec{a}$. При тоа го добиваме единствениот вектор $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$, чиј крај е бараната точка M_1- сликата на точката M.

1 Даден е вектор $\vec{a}$ и точки A, B и C. Изврши транслација на точките A, B и C за вектор $\vec{a}$.

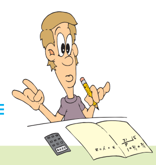
Со транслација $\tau_{\vec{a}}$ можеме да вршиме пресликување не само на целата рамнина, туку и на секој дел од неа. На пример:

Во рамнината нека е зададен вектор $\vec{a}$ и еден триаголник ABC (црт. 41). Да извршиме транслација на триаголникот ABC за вектор $\vec{a}$, значи: секоја точка A, B, C,...,M,... од триаголникот ABC да ја пресликаме при транслација $\tau_{\vec{a}}$. Притоа, множеството од сите нивни слики A_1,B_1,C_1,...,M_1,... ќе го образува триаголникот $A_1B_1C_1$-слика на триаголникот ABC при $\tau_{\vec{a}}$. Тоа симболички го запишуваме: $\Delta A_1B_1C_1 = \tau_{\vec{a}}(\Delta ABC)$.

Транслација за вектор $-\vec{a}$, т.е. $\tau_{-\vec{a}}$ се вика **спротивна транслација на транслацијата** $\tau_{\vec{a}}$.

Притоа важи: Ако $\tau_{\vec{a}}(M)=K$, тогаш $\tau_{-\vec{a}}(K)=M$. Зошто? Објасни со цртеж.

ЗАДАЧИ



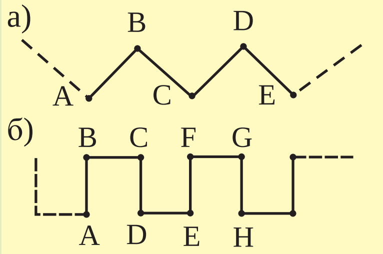
2 Дадени се три неколинеарни точки A, B и C. Конструирај ја сликата на точката C при транслација: а) за вектор $\overrightarrow{AB}$, б) за вектор $\overrightarrow{BA}$.

3 Познат е еден пар соодветни точки A и A_1 при транслацијата $\tau_{\vec{a}}$. На што е еднаков векторот на транслацијата?

4 Дадени се три различни колинеарни точки A, B и C. Конструирај ја сликата на точката C со транслација, при која точката A се пресликува на точката B.

5 На цртежот 41 извршено е пресликување на триаголникот ABC со транслација $\tau_{\vec{a}}$ на $\Delta A_1B_1C_1$. При која транслација триаголникот $A_1B_1C_1$ ќе се преслика на ΔABC?

6 На цртежот 42 нацртани се две искршени линии $ABCDE$... со еднакви страни $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = ...$ и еднакви агли меѓу нејзините страни. Ако претпоставиме: искршената линија да се шири и на лево и на десно, постои ли транслација при која таа се пресликува сама на себе? Одреди го векторот на таа транслација.



Црт. 42

7 Наведи примери на фигури, кои може да се пресликаат сами на себе со помош на некоја транслација.

8 Дадени се две: а) исто насочени, б) спротивно насочени полуправи AB и MN. Дали постои транслација при која едната полуправа ќе се преслика на другата?

9 На правата p дадени се две точки A и B. Изврши транслација на правата p за вектор: а) $\overrightarrow{AB}$, б) $\overrightarrow{BA}$. На што се пресликува правата p при таа транслација?

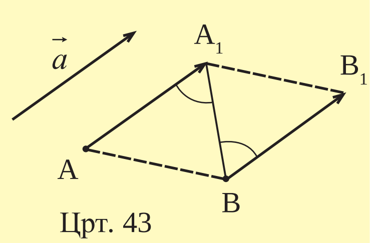
10 Даден е вектор $\vec{a}$. Означи две точки A и B и конструирај ги нивните слики A_1 и B_1 при транслацијата $\tau_{\vec{a}}$. Спореди ги растојанијата $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$. Што забележуваш?

I. 9. СВОЈСТВА НА ТРАНСЛАЦИЈАТА

Транслацијата ги има следниве поважни својства:

1°. **При транслацијата $\tau_{\vec{a}}$ за секои две точки A и B и нивните слики $A_1 = \tau_{\vec{a}}(A)$ и $B_1 = \tau_{\vec{a}}(B)$ важи равенството $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$.** Тоа уште го искажуваме и вака: **Транслацијата ги запазува растојанијата.**

Нека A и B се две произволни точки, а A_1 и B_1-нивните слики при транслација $\tau_{\vec{a}}$ (црт. 43). Тогаш имаме: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, и $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$. Според тоа: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, а оттука следува дека $|\overrightarrow{AA_1}| = |\overrightarrow{BB_1}|$ и $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB_1}$, односно $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$ и $AA_1 \uparrow\uparrow BB_1$.



Црт. 43

Ако A_1 и B_1 не лежат на правата AB, тогаш тие лежат на една иста полурамнина по однос на правата AB. За да докажеме дека $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, доволно е да докажеме дека $\Delta ABA_1 \cong \Delta B_1A_1B$.

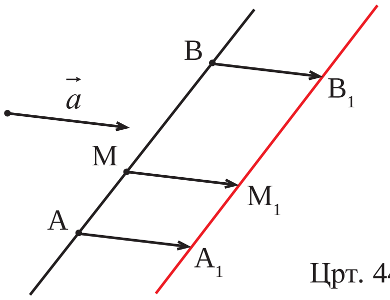
Триаголниците ABA_1 и B_1A_1B се складни, бидејќи страната A_1B е заедничка, потоа $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$ и $\angle AA_1B = \angle B_1BA_1$ (како наизменични агли). Според тоа: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$. Точноста на тврдењето во случајот кога A_1 и B_1 лежат на правата AB ќе го прифатиме без доказ.

2°. **Ако точката M лежи меѓу точките A и B и ако $M_1 = \tau_{\vec{a}}(M)$, $A_1 = \tau_{\vec{a}}(A)$ и $B_1 = \tau_{\vec{a}}(B)$, тогаш сликата M_1 лежи меѓу сликите A_1 и B_1 на точките A и B.**

Ова својство го искажуваме уште и на следниот начин:

Транслацијата го запазува подредувањето на точките.

Нека точката M лежи меѓу точките A и B (црт. 44). Тогаш важи равенството $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$. А од $M_1 = \tau_{\vec{a}}(M)$, $A_1 = \tau_{\vec{a}}(A)$ и $B_1 = \tau_{\vec{a}}(B)$ (црт. 44) согласно својството 1° следува дека $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AM} = \overline{A_1M_1}$ и $\overline{MB} = \overline{M_1B_1}$, па заменувајќи ги во претходното равенство, добиваме $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1M_1} + \overline{M_1B_1}$, а тоа значи дека точката M_1 лежи меѓу точките A_1 и B_1.



Црт. 44

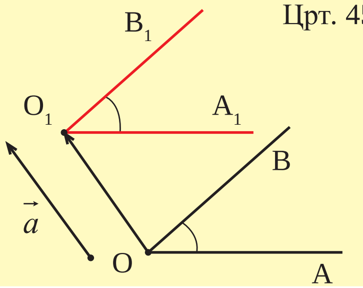
3°. **Транслацијата $\tau_{\vec{a}}$ секоја фигура Ф ја пресликува во складна фигура $Ф_1$,** т.е. $Ф_1 = \tau_{\vec{a}}(Ф) \Rightarrow Ф_1 \cong Ф$.

Тоа значи дека при транслацијата:

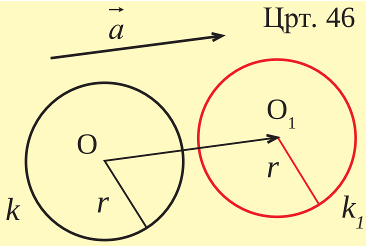
а) Отсечката AB се пресликува во еднаква на неа отсечка A_1B_1;

б) Секој агол се пресликува во еднаков со него агол (црт. 45);

в) Кружницата $k(O,r)$ се пресликува во складна со неа кружница $k_1(O_1,r_1)$ (црт. 46);



Црт. 45



Црт. 46

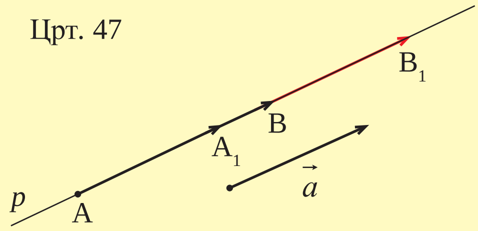
г) Секој триаголник се пресликува во складен со него триаголник (црт. 41), итн.

Од (б) следува дека: **При транслацијата две паралелни прави се пресликуваат во две паралелни прави, а две заемно нормални прави - пак во две заемно нормални прави.**

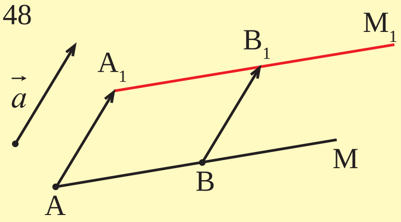
4°. **При транслацијата $\tau_{\vec{a}}$ секоја права p се пресликува во паралелна со неа права или на самата себе** (црт. 44 и 47).

5°. **При транслацијата $\tau_{\vec{a}}$ секоја полуправа се пресликува во полуправа истонасочена со неа** (црт. 48).

Црт. 47



Црт. 48



1 Земи една транслација и конструирај ја при неа сликата на:
а) полуправа, б) права, в) агол.

2 При транслација $\tau_{\vec{a}}$ на која фигура се пресликува:
а) аголот, б) триаголникот, в) квадратот, г) унијата на две паралелни прави, д) унијата на две прави што се сечат?

ЗАДАЧИ

3 Две прави a и b што се сечат, при транслацијата $\tau_{\vec{a}}$ се пресликуваат на правите a_1 и b_1. Во која точка се пресликува пресекот на правите a и b при таа транслација?

4 Дадени се две паралелни еднакви отсечки AB и CD ($AB \| CD$ и $\overline{AB} = \overline{CD}$). Колку транслации постојат при кои отсечката AB се пресликува на отсечката CD?

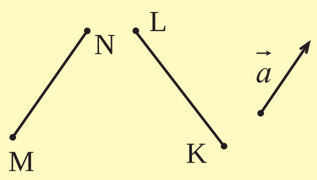
5 При транслацијата $\tau_{\vec{a}}$ кои прави се пресликуваат сами на себе?

6 Дадени се две паралелни прави p и q. Колку транслации постојат при кои правата p се пресликува на правата q?

7 Дадени се две точки A и B и транслација τ, таква што τ(A) = B. Конструирај ја сликата на дадена кружница $\kappa(B, r = \overline{AB})$ при таа транслација.

8 Даден е вектор $\vec{a}$ и отсечки MN и KL (црт. 49). Конструирај ги сликите на дадените отсечки при транслацијата $\tau_{\vec{a}}$.

9 Во рамнината дадени се три точки A, B и M и две транслации τ_1 и τ_2 определени соодветно со векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$. Конструирај ги точките $M_1 = \tau_1(M)$ и $M_2 = \tau_2(M_1)$. Што забележуваш?



Црт. 49

10 Зададен е вектор $\vec{a}$ и отсечка AB. При транслација за вектор $\vec{a}$ отсечката AB се пресликува на отсечката CD. Постои ли транслација при која отсечката CD се пресликува на дадената отсечка AB? Ако постои, определи го нејзиниот вектор.

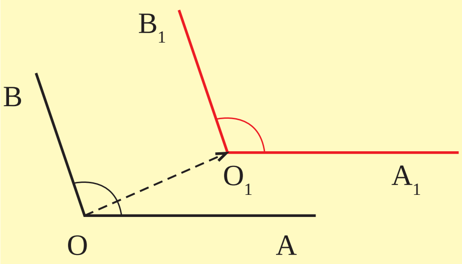
1.10. ПРИМЕНА НА ТРАНСЛАЦИЈАТА

Транслацијата наоѓа широка примена при докажувањето на некои тврдења и решавањето на некои конструктивни задачи.

***Теорема* 1. Ако краците на еден агол се истонасочени соодветно со краците на друг агол, тогаш тие два агла се еднакви.**

Претпоставка: $OA \| O_1A_1$ и $OB \| O_1B_1$ (црт. 50).
Тврдење: $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Доказ. Да ја разлгедаме транслацијата за вектор $\overrightarrow{OO_1}$, при која точката O се пресликува на точката O_1. При таа транслација полуправата OA ќе се преслика на исто насочената полуправа O_1A_1, а полуправата OB - на исто насочената полуправа O_1B_1, (црт. 50). Според тоа, аголот AOB при транслацијата за вектор $\overrightarrow{OO_1}$ ќе се преслика на аголот $A_1O_1B_1$, а тоа значи дека $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.



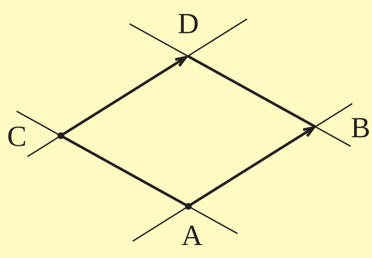
Црт.50

***Теорема* 2. Две паралелни прави отсекуваат од други две паралелни прави еднакви отсечки.**

Претпоставка: $AB \| CD$ и $AC \| BD$ (црт. 51).

Тврдење: $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Доказ. Да ја разгледаме транслацијата што точката A ја пресликува во точката B. Тоа е транслација за вектор $\overrightarrow{AB}$. Со неа правата AC се пресликува на правата паралелна со неа, што минува низ точката B, т.е. на правата BD. А правата CD се пресликува сама на себе (Зошто?). Точката C, која е пресек на правите AC и CD, се пресликува на пресекот на нивните слики $BD \cap CD = \{D\}$, т.е. во точката D. Значи, $\tau(A) = B$, $\tau(C) = D$.



Црт. 51

Според тоа, при $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ отсечката AC се пресликува на отсечката BD, а тоа значи дека $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Задача. Дадени се: транслација за вектор $\vec{a}$, кружница k и права p (црт. 52). Конструирај точки $C \in k$ и $C_1 \in p$, такви што $\tau_{\vec{a}}(C) = C_1$.

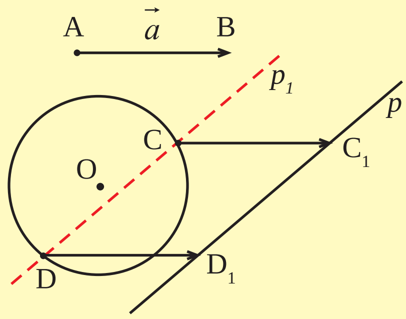
Решение. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена и нека C и C_1 се бараните точки ($C \in k$, $C_1 \in p$) (црт. 52). Бидејќи $\tau_{\vec{a}}(C) = C_1$, затоа $\overline{CC_1} = \overline{AB}$, односно $CC_1 \uparrow\uparrow AB$ и $\overline{CC_1} = \overline{AB}$. Низ точката C минува единствена права p_1 - паралелна со дадената права p. Гледаме, правата p_1 е слика на правата p при транслација за вектор $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{C_1C} = -\vec{a}$.

Правата p_1 со кружницата k има две заеднички точки C и D (во специјален случај тие може да имаат и само една заедничка точка, или да немаат заеднички точки), а точките C_1 и D_1 се нивни слики при $\tau_{\vec{a}}$ (црт.52).

Конструкција. Ја конструираме правата $p_1=\tau_{-\vec{a}}(p)$, пресекот $p_1\cap k=\{C,D\}$ и векторите $\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DD_1}=\vec{a}$, а со тоа и точките $C_1=\tau_{\vec{a}}(C)$ и $D_1=\tau_{\vec{a}}(D)$.

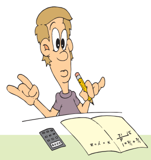
Доказ. Од конструкцијата следува.

Дискусија. Ако правата p_1 ја сече кружницата, задачата има две решенија. Ако пак p_1 е тангента на k, задачата има едно решение, а ако p_1 и k немаат заеднички точки, тогаш задачата нема решение.



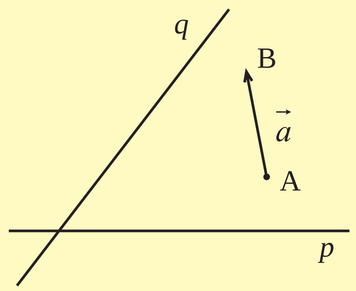
Црт. 52

ЗАДАЧИ



1 Дадени се: транслација за вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и правите p и q (црт. 53). На правата q конструирај точка C_1 која ќе биде слика на точка C од правата p при транслација $\tau_{\vec{a}}$.

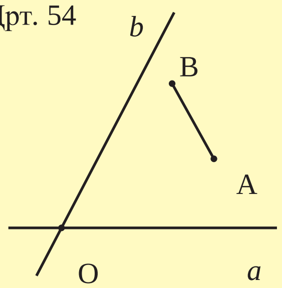
2 Дадени се: отсечка AB и прави a и b (црт. 54). Конструирај отсечка A_1B_1 таква што $\overline{A_1B_1}=\overline{AB}$ и $A_1B_1 \| AB$, а чии крајни точки да лежат соодветно на правите a и b.

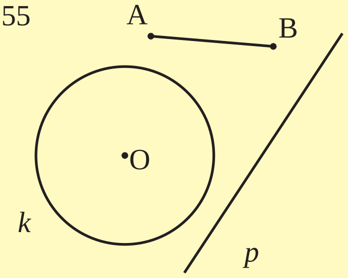


Црт. 53

3 Дадени се: отсечка AB, кружница k и права p (црт. 55). Конструирај отсечка A_1B_1, еднаква и паралелна со AB, чии крајни точки да лежат соодветно на k и p.

4 Дадени се: кружница $k(O,r)$ и вектор $\vec{a}$. Конструирај ја сликата на кружницата k при транслација $\tau_{\vec{a}}$.

Црт. 54


Црт. 55


ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ -I

1 Дадена е полуправа AB и точка $O \notin AB$. Конструирај полуправа со почеток во точката O, која е: а) исто насочена, б) спротивно насочена со полуправата AB.

2 Полуправите p, q и r лежат на една права и: а) $p\uparrow\uparrow q$ и $p\uparrow\uparrow r$, б) $p\uparrow\uparrow q$ и $p\uparrow\downarrow r$, в) $p\uparrow\downarrow q$ и $p\uparrow\downarrow r$. Испитај дали полуправите q и r се исто насочени или спротивно насочени.

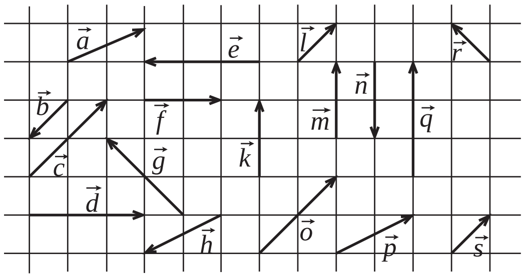
3 Докажи дека: две спротивно насочени полуправи се централно симетрични во однос на средината на отсечката, што ги сврзува нивните почетни точки.

4 Полуправите p,q и r лежат на дадена права a, при што $p\subset q$ и $q\subset r$. Дали е точно дека: а) $p\uparrow\uparrow q$, б) $p\uparrow\downarrow r$, в) $q\uparrow\uparrow r$?

5 Ако полуправата p има насока R пишуваме, $p\in R$. Дали се точни тврдењата:
а) $(p\in R$ и $q\in R)\Rightarrow p\uparrow\uparrow q$, б) $(p\in R$ и $q\uparrow\uparrow p)\Rightarrow q\in R$?

6 Насоките R и Q се зададени соодветно со полуправите a и b. Дали е точно тврдењето: $(a\in R, b\in Q$ и $a\uparrow\uparrow b)\Rightarrow R=Q$?

7 Покажи кои од векторите на цртежот 56 се: а) исто насочени, б) спротивно насочени, в) колинеарни, г) еднакви.



Црт. 56

8 Нека A, B, C се три произволни точки. Докажи дека $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

9 Даден е вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Конструирај го векторот $\vec{b}$, ако: а) $\vec{b}=3\vec{a}$, б) $\vec{b}=0{,}5\vec{a}$, в) $\vec{b}=-2\vec{a}$.

10 За кои вредности од бројот k векторот $k\vec{a}-\vec{a}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$:
а) е еднаков со векторот $\vec{a}$, б) е нулти вектор?

11 За векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ познато е дека: а) $\vec{a}=3\vec{b}$, б) $\vec{a}=-2\vec{b}$. Може ли од тоа да се заклучи дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни?

12 За кои вредности на бројот k: векторот $k\vec{a}-2\vec{a}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$: а) има иста насока како векторот $\vec{a}$, б) има спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a}$?

13 Докажи дека: ако $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, тогаш векторите $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ се спротивни вектори.

14 Постои ли транслација, при која: а) една страна на триаголникот се пресликува на друга негова страна, б) една страна на квадратот се пресликува на друга негова страна?

15 Дадени се две исто насочени полуправи AB и CD. Колку транслации постојат, кои полуправата AB ја пресликуваат на CD?

16 Дадени се: отсечка AB и кружници κ_1 и κ_2. Конструирај (ако постои) отсечка A_1B_1 - еднаква и паралелна со AB, а чии крајни точки да лежат соодветно на κ_1 и κ_2.

17 Во кој случај важи равенството: а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$, б) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$?

18 Одреди три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, такви што да важи:

а) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{b}$, б) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{0}$.

19 Нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишни линии на триаголникот ABC. Докажи дека важи: $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

20 Дадени се: отсечка AB и парави p_1 и p_2. Конструирај (ако постои) отсечка A_1B_1 - еднаква и паралелна со AB, а чии крајни точки да лежат соодветно на p_1 и p_2.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА -I

1 Искажи ја дефиницијата за: а) исто насоченост, б) спротивно насоченост на две полуправи.

2 Каква разлика постои помеѓу поимите „правец на векторот“ и „насока на векторот“?

3 Може ли два вектора, кои лежат на различни прави да бидат колинеарни?

4 Даден е вектор $\vec{a}$ и произволна точка S. Колку вектори, еднакви на векторот $\vec{a}$ може да се пренесат од точката S?

5 Како и на колку начини може да биде зададена транслацијата?

6 При транслацијата $\tau_{\vec{a}}$ на која фигура се пресликува:
а) отсечка, б) права, в) полуправа, г) кружница, д) круг?

7 Дадена е кружница $\kappa(0, r)$ и вектор $\vec{a}$. Во која точка се пресликува центарот на кружницата κ при транслацијата $\vec{a}$?

8 Точките A, B, C и D лежат на една права. Дали е точно тврдењето: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$?

9 Даден е вектор $\vec{a}$. Конструирај вектор $\vec{x}$, таков што да важи: $\vec{a}+\vec{x}=\vec{0}$.

10 Нека A, B, C, D се темиња на еден четириаголник. Докажи дека: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

11 Одреди, каква врска (заемен однос) постои помеѓу векторите: $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{b}-\vec{a}$?

12 Дадени се: отсечка AB, кружница κ и права p. Конструирај (ако постои) отсечка A_1B_1 - еднаква и паралелна со AB, а чии крајни точки да лежат соодветно на κ и p.

СТЕПЕНИ. КВАДРАТЕН КОРЕН

II.1. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ ПРИРОДЕН БРОЈ

II.1.1 Поим за степен

1 Познато е дека збирот на еднакви собироци во множеството на рационалните броеви кратко го запишуваме во вид на производ:

$$\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{(n\text{ собироци})}=na,\quad (a\in Q,\ n\in N)$$

На пример: а) $7+7+7+7+7=5\cdot 7=35$,

б) $-\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-3.$

Слично на тоа и производот на еднакви множители усвоено е (по договор) да се запишува кратко со посебен израз наречен **степен.** На пример:

а) производот $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ кратко симболички го запишуваме со 3^4,

б) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=(-2)^5$,

в) $\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^4.$

Според тоа, изразите 3^4, $(-2)^5$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ ќе ги викаме **степени** на рационалните броеви 3, -2 и $\frac{2}{3}$. Значи, поимот степен го воведуваме со следнава:

***Дефиниција* 1. За кој било рационален број *a* и кој било природен број *n*; имаме:**

$$a^1=a$$

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{(n\text{ множители})}=a^n,\quad (a\in Q,\ n\in N).$$

Бројот a се вика **основа** на степенот, а n е **показател** на степенот a^n, т.е.

a^n → показател на степенот
→ степен
→ основа на степенот

Вредноста, пак, на производот $a\cdot a\cdot a\cdot a\ldots\cdot a$ се вика **вредност на степенот** a^n.

Степенот a^n го читаме: „a на n-ти степен“.

1 Пресметај ја вредноста на степенот: а) 2^4; б) $(-5)^3$.

2 Согласно дефиницијата 1 основата на степенот a^n може да биде: кој било позитивен рационален број, негативен рационален број, или нула; а показателот n-кој

било парен природен број $n=2k$, $(k\in N)$, или непарен природен број $n=2k-1$, $(k\in N)$.

Во зависност од тоа каков рационален број е основата на степенот и каков природен број е показателот на степенот, ќе биде:

1) Ако основата *a* на степенот a^n е позитивен рационален број, тогаш за секој (парен или непарен) природен број n, степенот a^n е позитивен рационален број, т.е.

$$(a\in Q^{+},\ n\in N)\Rightarrow a^{n}>0.$$

2) Ако *a* е негативен рационален број, тогаш важи:

а) $(a\in Q^{-}, n=2k, k\in N)\Rightarrow a^{n}=a^{2k}>0$ **и**

б) $(a\in Q^{-}, n=2k-1, k\in N)\Rightarrow a^{n}>0=a^{2k-1}<0$.

3) Ако $a=0$, тогаш $a^{n}=0^{n}=\underbrace{0\cdot 0\cdot 0\cdots 0}_{n\text{ пати}}=0$.

4) Ако $a\neq 0$, тогаш дефинираме $a^0=1$.

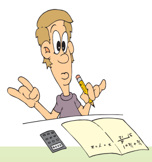
Во специјален случај, ако основата на степенот е единица, тогаш вредноста на степенот е еднаква на единица.

На пример: $1^3=1$, бидејќи $1^3=1\cdot1\cdot1=1$; $1^4=1\cdot1\cdot1\cdot1=1$, итн.

2 Пресметај ја вредноста на степенот:

а) 2^4 и 2^5, б) $(-5)^4$ и 5^4, в) $(-3)^5$ и 3^5, г) $(-1)^3$ и $(-1)^4$.

ЗАДАЧИ



3 Запиши ги најкратко следниве изрази:

а) 7+7+7+7 и 7·7·7·7, б) $b+b+b$ и $b\cdot b\cdot b$, в) $a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a + c\cdot c\cdot c$.

4 Пресметај ја вредноста на изразот: а) a^2+b^3 за $a=-2$ и $b=3$, б) a^3-a за $a=-3$.

5 Дали се еднакви степените: а) 3^5 и 5^3; б) 3^4 и 4^3, в) 1^2 и 2^1?

6 Провери дали е правилно пополнета табелата:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
x^3	−64	−27	−8	−1	0	1	8	27	64	125

7 Најди ја вредноста на степенот x^5, ако $x\in\{-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1,3\}$.

8 Провери ја точноста на равенството:

а) $5^4=(-5)^4$, б) $(-4)^3=-(4)^3$, в) $-3^4=-1\cdot3^4$,
г) $(-1)^6=(-1)^4$, д) $(-1)^3=(-1)^7$, ѓ) $(-1)^5=-1^4$.

II.1.2 Претставување на број во вид на степен

1 Со помош на степени со основа 10 можеме да ги претставуваме големите броеви, имајќи предвид дека:

$$\underbrace{1000...0}_{(n\text{ нули})}=10^n$$

Пример 1. 250 000 000 = 25 $\cdot 10^7$.

При запишување на големите броеви

- вообичаено е цифрите пред и после децималната запирка да се групираат во групи по три цифри, оставајќи меѓу групите празен простор или ставајќи точка на тоа место,

- вообичаено е да ги запишуваме во облик $a_0,a_1a_2a_3...\cdot 10^n$, каде a_0 е едноцифрен број, а $a_1,a_2,a_3,...$ се децимали.

Тоа ќе го илустрираме на следниот пример.

Пример 2. Во астрономијата ретко се користат вообичаените единици за должина како што се метар и километар, бидејќи тие се премногу мали во однос на растојанијата меѓу небесните тела. За таа цел се користат поголеми должински единици, како што се астрономска единица, парсек и светлосна година. Една астрономска единица е просечното растојание помеѓу Земјата и Сонцето и таа изнесува приближно

$$1 \text{ a.e.} = 1{,}495\,985\cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Парсекот пак, е многу поголема единица за должина и таа изнесува

$$1 \text{ ps} = 3{,}085\,6\cdot 10^{16} \text{ m}.$$

Со парсеци се мерат растојанијата помеѓу ѕвездите. На пример, растојанието од нашиот сончев систем до центарот на нашата галаксија е околу 9 ps. Без користење на степени овие две должини ги запишуваме како

1 a.e. = 149 598 500 000 m (запирката ја поместуваме за 10 места надесно)

1 ps = 30 856 000 000 000 000 m (запирката ја поместуваме за 16 места надесно)

За читање и запишување на големите броеви, некои од степените од облик 10^n имаат добиено специјални имиња. Такви се степените:

10^3 се чита **кило** и се бележи со k,

10^6 се чита **мега** и се бележи со M,

10^9 се чита **гига** и се бележи со G,

10^{12} се чита **тера** и се бележи со T.

На пример, меморијата на компјутерските дискови најчесто ја изразуваме во гигабајти (Gb), така што 1Gb = 10^3Mb = 10^6kb = 10^9b.

2 Со помош на степени со основа 0,1=10^{-1} можеме да ги запишуваме малите броеви, имајќи предвид дека

$$\underbrace{0{,}000\ldots01}_{(n\text{ нули})} = 0{,}1^n = 10^{-n}\,.$$

Пример 3. 0,0000075 = $0{,}75\cdot 0{,}1^5 = 0{,}75\cdot 10^{-5} = 75\cdot 0{,}1^7 = 75\cdot 10^{-7}$ итн.

При запишување на малите броеви, како и за големите броеви, вообичаено е да цифрите после децималната запирка се групираат во групи по три цифри, оставајќи меѓу групите празен простор или ставајќи точка на тоа место.

За читање и запишување на малите броеви некои од степените од облик 10^{-n} имаат добиено специјални имиња. Такви се степените:

10^{-1} се чита **деци** и се бележи со d,
10^{-2} се чита **центи** и се бележи со c,
10^{-3} се чита **мили** и се бележи со m,
10^{-6} се чита **микро** и се бележи со μ,
10^{-9} се чита **нано** и се бележи со n,
10^{-12} се чита **пико** и се бележи со p.

ЗАДАЧИ

1. Брзината на светлината изнесува 300.000 km во секунда. Тој податок запиши го со помош на степен со основа 10.
2. Растојанието од Земјата до Месечината, кое приближно е еднакво на 384 000 km, изразите го во метри и сантиметри, користејќи го притоа степенскиот запис.
3. Пресметај колку секунди има во текот на една година, земајќи притоа дека годината има 365 дена, а потоа тој резултат запишете го користејќи степенски запис.
4. Денешните астрономи сметаат дека староста на нашата вселена изнесува околу 13 500 000 000 години. Запишете го тоа време со помош на степени.
5. Што е поголемо 10^{-10} cm или 1pm?
6. Колку нанометри има во еден милиметар?

II.1.3 Пресметување на броен израз

Да забележиме дека пресметувањето на вредноста на степенот претставува нова операција, наречена **степенување.**

***Дефиниција*. Множењето на конечен број на еднакви множители се вика степенување.**

Да го разгледаме следниов:

Пример 1. Да се одреди вредноста на изразот $2+5\cdot3^4$.

Решение. Прво ја пресметуваме вредноста на степенот 3^4, потоа го извршуваме множењето и на крај собирањето:

$$2+5\cdot3^4 = 2+5\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3) = 2+5\cdot81 = 2+405 = 407.$$

Од минатата година знаеме дека ако во еден броен израз се јавуваат само четирите основни алгебарски операции (собирање, одземање, множење и делење), тогаш, најпрво ги извршуваме операциите множење и делење, а потоа операциите собирање и одземање. Ако освен основните четири операции во еден израз се јавува и операцијата степенување, тогаш го применуваме следното правило.

При пресметувањето на вредноста на бројните изрази најпрво го извршуваме степенувањето, потоа операциите множење и делење, и на крајот ги извршуваме собирањето и одземањето.

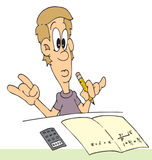
Се разбира, ова правило се применува доколку не е означен редоследот на извршување на операциите со помош на загради.

Пример 2. а) $1+6\cdot(27:3^2)^3=1+6\cdot(27:9)^3=1+6\cdot3^3=1+6\cdot27=163$,

б) $3^4-4^3:2^3 = 81-64:8 = 81-8 = 72$.

За пресметување на вредноста на степените и бројните изрази често се служиме и со дигитрон.

ЗАДАЧИ



1 Провери ја точноста на равенствата:

а) $(2\cdot3)^4=2^4\cdot3^4$, б) $2^3\cdot2^5=2^{3+5}=2^8$, в) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{4^3}{5^3}$.

2 Спореди го производот:

а) на степените 3^2 и 3^3 со 3^5, б) на 2^3 и 2^4 со степенот 2^7.

3 Пресметај:

а) $2^{10}-2^9-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2-2^1-2^0$,

б) $3^5-2\cdot(3^4+3^3+3^2+3^1+3^0)$, в) $[3^4+(5^2-3^2\cdot2^2:6)]:10$.

4 Кој број е поголем: 3^4 или 4^3?

II.2. ОПЕРАЦИИ СО СТЕПЕНИ

II.2.1. Множење и делење на степени со еднакви основи

1 **Множење на степени со еднакви основи.** Да ги помножиме степените со еднакви основи $3^5\cdot3^4$.

Користејќи ја дефиницијата за степен и асоцијативниот закон на множењето, добиваме:

$$3^5\cdot3^4 = (3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3) = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^{5+4} = 3^9.$$

Воопшто, за степените a^m и a^n, $(a\in Q,\ m,n\in N)$ имаме:

$$a^m\cdot a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot a\ldots a)}_{m\text{ пати}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot a\ldots a)}_{n\text{ пати}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}_{(m+n)\text{ пати}} = a^{m+n}.$$

Според тоа:

Производот на два степена со еднакви основи е еднаков на степен со истата основа и показател еднаков на збирот од показателите на тие степени, т.е. $a^m\cdot a^n=a^{m+n},\ (a\in Q,\ m,n\in N)$.

1 Пресметај го производот:

а) $a^4 \cdot a^6$, б) $x^2 \cdot x^4$, в) $y^n \cdot y^3$, г) $c^n \cdot c$.

Може да се покаже дека и производот од повеќе степени со еднакви основи, согласно со асоцијативниот закон, ќе биде:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^k = (a^m \cdot a^n) \cdot a^k = a^{m+n} \cdot a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}.$$

Оттука правилото:

При множењето на степени со еднакви основи, основата останува иста, а степеновите показатели се собираат.

2 **Делење на степени со еднакви основи.**

Да видиме дали количникот на два степена со еднакви основи може да се претстави во вид на степен со истата основа.

За таа цел ќе ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Количникот $5^7:5^3$ да го претставиме во вид на степен со основа 5.

Решение. Согласно дефиницијата на операцијата делење, да се одреди количникот $5^7:5^3$ значи, да се најде трет степен со основа 5, кој помножен со делителот 5^3 да го даде деленикот 5^7. Очигледно е дека бараниот количник ќе биде степенот 5^4, бидејќи е $5^4 \cdot 5^3 = 5^7$. Показателот на степенот-количник (бројот 4) очигледно дека е еднаков на разликата 7–3 од показателите на деленикот и делителот.

До бараниот степен-количник може да дојдеме и вака:

$$5^7 : 5^3 = \frac{5^7}{5^3} = \frac{(5\cdot5\cdot5\cdot5)\cdot(5\cdot5\cdot5)}{5\cdot5\cdot5} = \text{(скратуваме со } 5\cdot5\cdot5\text{)} = 5^{7-3} = 5^4.$$

Забележуваме дека, во овој случај показателот на степенот деленик е поголем од показателот на степенот-делител (7>3).

Во општо, за степените a^m и a^n, каде е $a \neq 0$ и $m>n$ важи:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Според тоа:

Количникот на два степена со еднакви основи различни од нула, кај кои показателот на деленикот е поголем од показателот на делителот, е еднаков на степен со истата основа и показател еднаков на разликата од показателите на деленикот и делителот, т.е. $a^m : a^n = a^{m-n}$, ($a \in Q$, $a \neq 0$, $m,n \in N$ и $m>n$).

2 Претстави го во вид на степен количникот:

а) $a^8 : a^5$, ($a \neq 0$); б) $4^9:4^5$, в) $x^6:x^4$, ($x \neq 0$),

Пример 2. Количникот $a^4:a^7$, ($a \neq 0$) не може да се претстави во вид на степен со основа a, бидејќи не постои степен со основа a, кој кога ќе се помножи со a^7 би се добил степенот a^4.

Затоа количници на степени кај кои показателот на деленикот е помал од показателот на делителот нема да разгледуваме.

Пример 3. Количникот $a^5:a^5$, ($a \neq 0$) може да се претстави во вид на степен $a^5:a^5=a^0$. Бидејќи е $a^5:a^5 = 1$, затоа е исправно што усвоивме дека: ако $a \neq 0$,тогаш $a^0=1$.

ЗАДАЧИ

3 Изврши го множењето на степените:

а) $2^3 \cdot 2^5$, б) $(-5)^2 \cdot (-5)^3$, в) $a \cdot a^5$, г) $x^6 \cdot x^n$.

4 Изврши ги означените множења на степените: а) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5$, б) $4 \cdot 4^2 \cdot 4^3$, в) $a^3 \cdot a^3 \cdot a^5 \cdot a^4$.

5 Степенот a^9 запиши го како производ од два степена, од кои едниот множител да е: а) a^4, б) a^5, в) a, б) a^7, б) a^6.

6 За кој број $n \in N$ е точно тврдењето: а) $3^2 \cdot 3^n = 3^{10}$, б) $a^3 \cdot a^n = a^7$, в) $a^4 \cdot a^5 = a^n$?

7 Изврши го делењето на степените:

а) $2^{10} : 2^3$, б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} : \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$, в) $(-5)^7 : (-5)^5$, г) $x^{27} : x^{12}$, $x \neq 0$.

8 Степенот a^{15}, $(a \neq 0)$, запиши го како количник од степени, од кои деленикот да биде: а) a^{25}, б) a^{20}, в) a^{22}.

9 Пресметај: а) $(a^6 : a^2) \cdot a^3$, б) $a^6 : (a^2 \cdot a^3)$, в) $(a^6 : a^3) \cdot a^2$.

10 Упрости ги изразите: а) $\frac{a^6 \cdot a^5}{a^4}$ $(a \neq 0)$, б) $\frac{a^m \cdot a^4}{a^n}$ $(a \neq 0,\ m+4>n)$.

11 Пресметај ја вредноста на изразот

а) a^2+b^3 за $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{2}{3}$, б) x^3-x^2+3x-1 за $x \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.

12 Степенувај ги изразите: а) $(2a)^3$, б) $(3ab)^4$, в) $\left(\frac{x}{5}\right)^3$.

П.2.2. Степенување на производ, количник и степен

1 **Степенување на производ.** Изразот $(ab)^4$ претставува степен на производот од множителите a и b.

Согласно со дефиницијата на степен, а со помош на комутативниот и асоцијативниот закон на множењето, изразот $(ab)^4$ може да го трансформираме во: $(ab)^4=(ab \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)= (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = a^4 \cdot b^4$. Воопшто, за секој степен од видот $(ab)^n$, $(a, b \in Q, n \in N)$ имаме:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \dots (ab)}_{n \text{ множители}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{n \text{ множители}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \dots b)}_{n \text{ множители}} = a^n \cdot b^n$$

Според тоа:

***n*-ти степен на производ од множителите *a* и *b* е еднаков на производот од *n*-тите степени на множителите.**

На пример: $(ab)^5 = a^5 b^5$, $(xy)^4 = x^4 y^4$, $(3x)^3 = 3^3 x^3 = 27x^3$.

Слично, за степенот на производ од повеќе множители имаме:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

1 Степенувај ги производите:

а) $(5a)^3$, б) $(-3a)^4$, в) $(-x)^3 = ((-1)x)^3$, г) $(5xy)^4$.

Согласно својството на симетричност на равенствата $(a=b \Rightarrow b=a)$, од $(ab)^n = a^n \cdot b^n$, следува дека важи и равенството

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n. \qquad (1)$$

Равенството (1) го искажуваме:

Производот на степени со еднакви показатели е еднаков на производот на нивните основи степенуван со заедничкиот показател.

На пример: а) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$, б) $8^5 \cdot 0{,}125^5 = (8 \cdot 0{,}125)^5 = 1^5 = 1$.

2 Пресметај: а) $(-6)^2 \cdot (-5)^2$, б) $4^6 \cdot 0{,}25^6$, в) $4^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

2. Степенување на количник. Согласно дефиницијата на степен и правилото за множење на дропки, имаме:

$$(3:4)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3^5}{4^5} = 3^5 : 4^5$$

Воопшто, за $a, b \in Q$, $b \neq 0$ и $n \in N$, важи равенството:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Според тоа: ***n*-ти степен на количник е еднаков на количникот од *n*-тите степени на деленикот и делителот.**

На пример: а) $(2:3)^4 = 2^4 : 3^4$, б) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.

3 Степенувај ја дропката (количникот):

а) $\left(\frac{a}{2}\right)^3$, б) $\left(\frac{2}{a}\right)^4$, $(a \neq 0)$, в) $\left(\frac{1}{x}\right)^n$, $(x \neq 0)$.

Од равенството $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, следува и равенството:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad (b \neq 0).$$

Според тоа:

Количникот на степени со еднакви показатели е еднаков на количникот од нивните основи степенуван со заедничкиот показател.

На пример: а) $\frac{6^3}{2^3}=\left(\frac{6}{2}\right)^3=3^3=27$, б) $\frac{a^4}{b^4}=\left(\frac{a}{b}\right)^4$, $b\neq 0$.

4 На погоден начин пресметај ја вредноста на изразот:

а) $18^4:3^4$, б) $(-0,2)^3:(-0,02)^3$, в) $75^5:25^5$.

3. Степенување на степен. Согласно дефиницијата на степени и правилото за множење на степени со еднакви основи, за изразот $(a^4)^5$ добиваме:

$$(a^4)^5=a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot a^4=a^{4+4+4+4+4}=a^{5\cdot 4}=a^{20}, \text{ т.е. } (a^4)^5=a^{20}.$$

Воопшто, за кој било рационален број a и m,n-природни броеви, важи равенството

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

Според тоа:

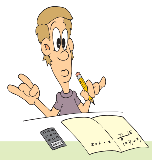
Степен се степенува кога основата на степенот се степенува со производот на степеновите показатели, т.е.

$$(a^m)^n=a^{mn}, \quad (a\in Q;\ m,\ n\in N).$$

На пример: а) $[(-2)^3]^2=(-2)^{3\cdot 2}=(-2)^6=64$, б) $(x^3)^n=x^{3n}$, $(n\in N)$.

5 Степенувај ги степените: а) $(a^3)^2$, б) $(a^4)^5$, в) $(y^2)^4$.

ЗАДАЧИ



6 Изврши го степенувањето: а) $(5ab)^3$, б) $(-2xy)^4$, в) $(-axy)^5$.

7 Секој од производите на степени запиши го како степен од производ:

а) $3^4\cdot 4^4$, б) $27a^3$, в) $32a^5b^5$, г) $-1000a^6b^6$.

8 На најпогоден начин одреди ја вредноста на изразот:

а) $2^4\cdot 5^4\cdot 0,01^4$, б) $(-4)^3\cdot 25^3$, в) $(0,25)^5\cdot 2^5$.

9 Степенувај ги дропките: а) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$, б) $\left(\frac{x}{3}\right)^4$ в) $\left(\frac{7}{10}\right)^5$.

10 Секоја од дропките запиши ја како степен на дропка:

а) $\frac{a^4}{16}$, б) $\frac{32x^5}{3125}$, в) $\frac{0,001a^3}{8}$.

11 Запиши го изразот во вид на степен со основа x:

а) $(x^2)^3$, б) x^2x^5, в) $(x^4)^5$, г) $x^{10}x^4$, д) $x^6:x^4$.

12 Степенот 3^{60} запиши го како степен со основа: а) 9, б) 27, в) 81, г) 243.

II. 3. КВАДРАТ И КВАДРАТЕН КОРЕН НА РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

II.3.1. Поим за квадрат на рационален број

Знаеме, производот на два еднакви рационални броја $a \cdot a$ пократко го запишуваме во вид на степен a^2, т.е.

$$\boldsymbol{a \cdot a = a^2 ,\ (a \in Q).}$$

Примери: а) $4 \cdot 4 = 4^2$, б) $(-5) \cdot (-5) = (-5)^2$.

Степенот a^2 го читаме: **„*a* на квадрат“,** а за a^2 уште велиме дека е **квадрат на рационалниот број *a*.**

1 Запиши ги во вид на производ степените:

а) 6^2, б) $(-7)^2$, в) $(-1\frac{1}{2})^2$, г) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, д) $(-0{,}8)^2$.

Пример. Да ги одредиме квадратите на рационалните броеви:

а) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$, б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, в) $(-8)^2$, г) 0^2, д) $(-1)^2$.

Решение. а) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, б) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, в) $(-8) \cdot (-8) = 64$,

г) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, д) $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$.

Од овие примери, а врз основа на правилата за множење на два рационални броја со исти знаци, заклучуваме:

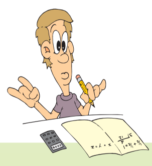
Квадратот на кој било позитивен или негативен рационален број е позитивен рационален број, а квадратот на бројот нула е 0.

Тоа симболички го запишуваме:

$$x \in Q \Rightarrow x^2 \geq 0.$$

Наместо да кажеме: квадратот на кој било рационален број е позитивен рационален број или нула, често велиме дека тој е **ненегативен рационален број**.

ЗАДАЧИ



2 Запиши ги производите во вид на степен (квадрат) на број:

а) $7 \cdot 7$, б) $(-3) \cdot (-3)$, в) $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}$, г) $1 \cdot 1$, д) $0 \cdot 0$.

3 Пополни ја табелата:

x	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	2	–2	0	0,2	10	-0,01
x^2								

4 Дали постои рационален број, чиј квадрат е негативен број?

5 Пресметај го квадратот на бројот: 9, –9, 1, –1, –10, –2.

6 Пресметај ја вредноста на изразот: а) $(-3)^2-(-4)^2$, б) $5\cdot(-5)^2+3$, в) $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

7 Дали е точно дека: а) Квадратот на цел број е, исто така, цел број, б) Квадратот на нескратлива дропка е, пак, нескратлива дропка? Испитај го тоа на неколку примери.

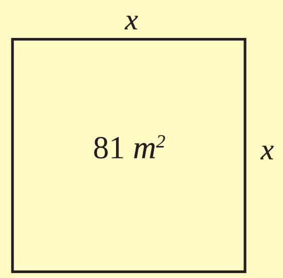
8 Квадратот на кој рационален број е еднаков на бројот:
а) 1, б) 4, в) 25, г) 9, д) 49?

II.3.2. Поим за квадратен корен од рационален број

1 **Решавање на равенката** $x^2=a$, $(a\geq 0)$.

Да го разгледаме следниов:

Пример. Училишниот двор има форма на квадрат и има плоштина P = 81m^2 (црт. 1). Колкава е должината на дворот?



Црт. 1

Решение. Ако должината на квадратот (дворот) ја означиме со x, тогаш неговата плоштина $P=x\cdot x=x^2$ во овој случај ќе биде $x^2=81$. Значи, за да ја одредиме должината на страната на квадратот (дворот), треба да ја решиме равенката $x^2 = 81$.

Очигледно е дека постојат две вредности на променливата x, чиј квадрат е 81. Тоа се броевите 9 и –9. Навистина $9^2=81$ и $(-9)^2=81$. Значи, 9 и –9 се решенија на равенката $x^2 = 81$.

Во нашиот случај бараната должина на училишниот двор ќе биде само позитивното решение на равенката $x^2 = 81$, т.е. $x=9$. Други примери:

а) Равенката $x^2=16$ има две решенија: 4 и –4, бидејќи $4^2= 16$ и $(-4)^2= 16$.

б) Броевите $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$ се решенија на равенката $x^2=\frac{4}{9}$, бидејќи $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, а исто така и $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

в) Бројот 0 е решение на равенката $x^2 = 0$, бидејќи $0^2 = 0$.

Оттука заклучуваме:

Равенката од видот $x^2 = a$, каде a е некој позитивен рационален број, има две решенија, кои имаат иста апсолутна вредност, но се разликуваат само по знакот. Равенката, пак, $x^2 = 0$ има единствено решение 0.

Треба да забележиме дека, равенката од видот $x^2 = a$, каде a е негативен рационален број не ја решаваме (разгледуваме), бидејќи не постои рационален број, чиј квадрат е негативен број.

На пример, равенката $x^2 = -9$ во множеството на рационалните броеви нема решенија.

1 Реши ги равенките: а) $x^2 = 36$, б) $x^2 = \frac{4}{9}$, в) $x^2 = -1$.

2 **Поим за квадратен корен.** Ненегативното решение на равенката $x^2 = a$, $(a \geq 0)$ се вика **квадратен корен** на рационалниот број a, $(a \geq 0)$ и се запишува со $\sqrt{a}$, $(a \geq 0)$.

Знакот $\sqrt{}$ е ознака за квадратен корен. Бројот a во изразот $\sqrt{a}$ се вика **подкоренов број** или **подкоренова величина.**

Според тоа, поимот, квадратен корен на рационален број го воведуваме со следнава:

***Дефиниција*: Квадратен корен на бројот a, $(a > 0)$ е ненегативен број x, $(x \geq 0)$, чиј квадрат е еднаков на бројот a, т.е.**

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, \ (a \geq 0, \ x \geq 0).$$

На пример: а) $\sqrt{16} = 4$, бидејќи $4^2 = 16$ и $4 > 0$, б) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, бидејќи $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$,
в) $\sqrt{0} = 0$, бидејќи $0^2 = 0$.

Симболот „$\Leftrightarrow$“ се чита: „... **ако и само ако**...“ или **„...еквивалентно на...“**.

2 Докажи дека се точни равенствата:

а) $\sqrt{64} = 8$, б) $\sqrt{144} = 12$, в) $\sqrt{900} = 30$, г) $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

Видовме дека равенката $x^2 = 81$ има две решенија 9 и –9. Нив сега можеме да ги запишеме и вака: $\sqrt{81}$ и $-\sqrt{81}$. Значи, равенката $x^2 = 81$ има решенија $x = \sqrt{81}$ и $x = -\sqrt{81}$, т.е. $x_1 = 9$ и $x_2 = -9$. Велиме уште дека, равенката $x^2 = 81$ има множество решенија $M = \{9, -9\}$.

Ненегативното решение на равенката $x^2 = a$, $(a \geq 0)$ т.е. квадратниот корен $\sqrt{a}$, $(a \geq 0)$ го викаме уште и **аритметички квадратен корен** на бројот a.

На пример, 7 е аритметички квадратен корен на бројот 49, но –7 не е аритметички квадратен корен на бројот 49, бидејќи $-7 < 0$.

3 Квадратниот корен на рационалните броеви ги имаат следниве поважни својства:

1°. За секој ненегативен рационален број a важи равенството:

$$\sqrt{a^2} = a.$$

Тоа следува од самата дефиниција за квадратен корен.

На пример: $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$.

2°. За секои ненегативни рационални броеви a и b важи равенството:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

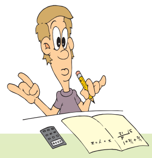
На пример, $\sqrt{4\cdot 25}=\sqrt{100}=10$, а исто така и $\sqrt{4\cdot 25}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=2\cdot 5=10$.

3°. За секои рационални броеви $a\geq 0$ и $b>0$ важи равенството:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

На пример: $\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$, а исто така и $\sqrt{\frac{36}{4}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}=\frac{6}{2}=3$.

ЗАДАЧИ



3 Реши ги равенките: а) $x^2=64$, б) $x^2=1$, в) $x^2=36$.

4 Пресметај ја вредноста на квадратниот корен:

а) $\sqrt{4}$, б) $\sqrt{121}$, в) $\sqrt{0{,}64}$, г) $\sqrt{1}$, д) $\sqrt{\frac{49}{81}}$.

5 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $5\cdot\sqrt{9}$, б) $-3\cdot\sqrt{16}$, в) $-4\cdot\sqrt{0{,}01}$, г) $\frac{\sqrt{400}}{5}$.

6 Пополни ја табелава:

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x^2											

7 Користејќи ја горнава табела, пресметај:

а) $\sqrt{289}$, б) $\sqrt{225}+\sqrt{144}$, в) $\sqrt{324}-\sqrt{169}$, г) $\sqrt{361}+\sqrt{256}$.

8 Одреди ја вредноста на изразот:

а) $\sqrt{7^2}$, б) $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}$, в) $\sqrt{(0{,}1)^2}$.

9 Испитај за кои вредности на променливата $x\in\{2,-3,6,0,-4\}$ е точно равенството $\sqrt{x^2}=x$.

10 Упрости го изразот: а) $\sqrt{49a^2}$, $(a\geq 0)$, б) $\sqrt{36x^2}$, $(x\geq 0)$.

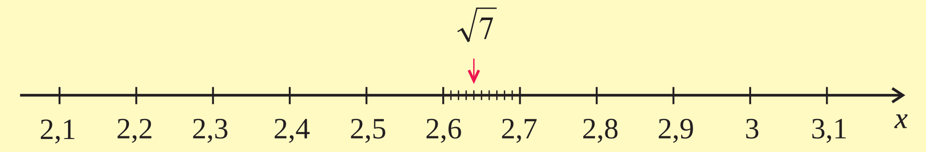
11 Пресметај: а) $\sqrt{25\cdot 0{,}04}$, б) $\sqrt{64:0{,}16}$, в) $\sqrt{18\cdot 8}=\sqrt{9\cdot 2\cdot 2\cdot 4}$.

II.4. ПРЕСМЕТУВАЊЕ КВАДРАТЕН КОРЕН ОД РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Ќе покажеме на примерот за квадратниот корен $\sqrt{7}$ како ја одредуваме неговата вредност со точност на три децимали.

Прво одредуваме помеѓу квадратите на кои два цели броја се наоѓа бројот 7. Бидејќи е $2^2 < 7 < 3^2$, затоа ќе биде $2 < \sqrt{7} < 3$. Значи, вредноста на $\sqrt{7}$ е некој број од интервалот (2,3).

Го разделуваме интервалот (2, 3) на бројната оска (црт. 2) на десет еднакви делови, а потоа ги пресметуваме квадратите на секој од броевите: 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4;..., 3. Така добиваме дека $6{,}76=2{,}6^2 < 7 < 2{,}7^2=7{,}29$. Затоа ќе биде $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$.



Црт. 2

Значи, вредноста на $\sqrt{7}$ е некој број од интервалот (2,6; 2,7).

Сега интервалот (2,6; 2,7) го разделуваме на десет еднакви делови: (2,6; 2,61], (2,61; 2,62], ...,(2,69; 2,7] и пресметувајќи ги квадратите на секој од броевите: 2,61; 2,62; 2,63; ... добиваме дека $2{,}64^2 < 7 < 2{,}65^2$, односно $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$.

Значи, $\sqrt{7} \in (2{,}64;2{,}65)$.

Со натамошна поделба сега на интервалот (2,64; 2,65) на десет еднакви делови и пресметување на квадратите на разделните точки на бројната оска, ја добиваме и третата децимала на вредноста на $\sqrt{7}$, т.е. $2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$.

Продолжувајќи ја оваа постапка натаму ќе добиеме се поголем број на децимали на децималното претставување на бројот $\sqrt{7}$.

Така ја добиваме приближната вредност на $\sqrt{7}$ со точност на три децимали, или со точност до 0,001 и пишуваме: $\sqrt{7} \approx 2{,}645$ со недостиг, или $\sqrt{7} \approx 2{,}646$ со вишок. Очигледно е дека на бројот $\sqrt{7}$ на бројната оска му одговара точно одредена точка, која е налево од точката 2,646, а надесно од точката 2,645 (црт. 2).

1 Со примена на покажаната постапка пресметај ја на две децимали приближната вредност на квадратните корени:

а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt{3}$, в) $\sqrt{5}$, г) $\sqrt{6}$, д) , $\sqrt{8}$ ѓ) $\sqrt{10}$.

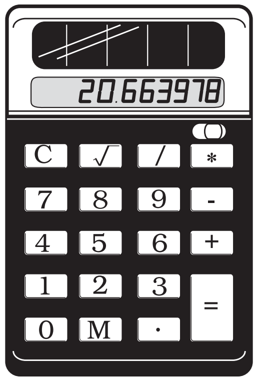
За пресметување на квадратниот корен од рационалните броеви најчесто користиме таблици или дигитрон:

1) Таблица. На крајот на учебников дадена е таблица за квадратните корени на броевите од 1 до 1000 со две децимали.

Во колоната N поместени се десетките на трицифрениот број, чиј квадратен корен го бараме, а во редот N поместени се единиците на тој број. Така, на пример, ако сакаме да го одредиме квадратниот корен на трицифрениот број 427, во колоната N го наоѓаме бројот 42 (42 десетки), а на десно во колоната 7 (7 единици), поточно во пресекот на редот 42 и колоната 7 го читаме бројот 20,66. Тоа е бараниот квадратен корен на бројот 427. Значи, $\sqrt{427} \approx 20{,}66$ со точност на две децимали.

Друг пример: $\sqrt{6{,}3} = \dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{100}} = \dfrac{2{,}50}{10} = 2{,}510.$

2) Дигитрон. На дигитронот (црт. 3) го избираме бројот 427 (со притискање на копчето на тастатурата по ред 4, 2, 7). Кога на екранот се појави 427 го притискаме копчето со ознака $\sqrt{}$ и на екранот ќе се појави бараната приближна вредност на квадратниот корен $\sqrt{427} \approx 20{,}663978$. Потоа во добиениот број земаме онолку децимали колкава што точност бараме.



Црт. 3

За приближно пресметување на вредноста на квадратен корен од кој било рационален број постои посебен **алгоритам**, кој со појавата на дигиталната техника во практиката го изгуби она значење, кое порано го имаше. Овој алгоритам е даден во следната наставна единка и е наменет за оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

ЗАДАЧИ

2 Со помош на таблица или дигитрон одреди ја приближната вредност на броевите:

а) $\sqrt{78}$, б) $\sqrt{245}$, в) $\sqrt{8{,}5}$, г) $\sqrt{7\frac{3}{4}}$.

3 Дај слободна проценка за приближната вредност на корените:

а) $\sqrt{15}$, б) $\sqrt{17}$, в) $\sqrt{50}$, г) $\sqrt{48}$, потоа провери ја со таблица или дигитрон.

4 Со помош на таблица или дигитрон одреди ја приближната вредност на броевите:

а) $\sqrt{30}$, б) $\sqrt{107}$, в) $\sqrt{7{,}52}$, г) $\sqrt{12\frac{1}{2}}$.

5 Каков број (парен или непарен) е производот: а) на два парни броја, б) на парен и непарен број, в) на два непарни броја? Покажи го тоа на примери.

6 Бројот a^2, $(a \in N)$ е: а) парен, б) непарен. Испитај каков број (парен или непарен) е бројот a.

II.5.АЛГОРИТАМ ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КВАДРАТЕН КОРЕН*

Во претходната лекција покажавме како наоѓаме квадратен корен од рационални броеви со користење на таблица и дигитрон. Тогаш забележавме дека за наоѓање на квадратен корен од кој било цел или децимален број постои и посебен **алгоритам** за тоа. Сметаме дека од интерес е да го дадеме тој алгоритам.

Алгоритмот (постапката) за наоѓање на квадратен корен од цели и децимални броеви ќе ја покажеме на следниве неколку примери:

А. Пресметување на точни квадратни корени од цели броеви

Пример 1. Да го пресметаме квадратниот корен $\sqrt{104976}$.

Решение. Бараниот квадратен корен го наоѓаме на следниов начин:

$\sqrt{10\,|\,49\,|\,76} = 324$

9

149 $\quad : 62 \cdot 2$

124

2576 $\quad : 644 \cdot 4$

2576

0

1. Подкореновиот број го разделуваме на групи од по две цифри од десно на лево. Првата група од лево може да има и само една цифра. Бројот на групите покажува колку цифрен е бараниот квадратен корен.

2. Бараме број чиј квадрат е 10, или најблизок до 10, но помал од него. Тоа е бројот 3, бидејќи е $3^2=9<10$. Бројот 3 е **прва цифра** на бараниот квадратен корен.

3. Квадратот на таа цифра ($3^2=$) 9 го запишуваме под првата група (10) и го одземаме од неа. Добиваме **прв остаток** - бројот 1.

4. Кон добиениот остаток ја спуштаме (допишуваме оддесно) втората група цифри 49. Ја одделуваме цифрата на единиците 9, а останатиот број 14 го делиме со удвоената (дуплирана) прва цифра ($3\cdot2=$) 6 на коренот и добиваме 2. Тоа е **втора цифра** на бараниот корен.

5. Кон удвоената (дуплирана) прва цифра (бројот 6) оддесно ја допишуваме втората цифра (2) на коренот и така добиениот број (62) го множиме со втората цифра (2) на коренот. Тој производ го запишуваме под спуштената втора група (149), одземаме и добиваме **втор остаток** - бројот 25.

6. Кон тој остаток ја спуштаме третата група (76) од подкореновиот број. Од така добиениот број 2576 ја одделуваме последната цифра 6, а останатиот број 257 го делиме со удвоениот (дуплираниот) број образуван од првите две цифри на коренот ($32\cdot2=$) 64, т.е. $257:64\approx4$. Така ја одредуваме третата цифра 4 на бараниот корен.

7. Таа трета цифра на коренот (4) ја допишуваме на десно кон удвоениот број образуван од првите две цифри на коренот ($32\cdot2=$) 64 и така добиениот број 644 го множиме со третата цифра (4); добиениот производ го потпишуваме под спуштената трета група и одземаме.

8. На ист начин постапуваме и со четвртата група и со други групи (ако има такви). Ако подкореновиот број е точен квадрат, тогаш последниот остаток е нула. Така е во нашиот случај, каде третиот остаток е нула.

Значи, бараниот квадратен корен е $\sqrt{104976} = 324$.

Често пати при барањето на втората, третата или на некоја од наредните цифри на квадратниот корен, при делењето не се добива вистинскиот множител, туку се добива множител, кој е поголем од потребниот во случајот. Во таков случај тој множител го намалуваме за една, две и повеќе единици, додека не добиеме множител со кого добиваме број што е најблизок и помал, или еднаков на бројот од кој одземаме.

Пример 2. Да го пресметаме квадратниот корен $\sqrt{74529}$.

$$\sqrt{7\,|\,45\,|\,29} = 273$$
$$\underline{4}$$
$$\underline{345} \quad : 47 \cdot 7$$
$$\underline{329}$$
$$\underline{1629} \quad : 453 \cdot 3$$
$$\underline{1629}$$
$$0$$

Решение. Цифрата на стотките е очигледно 2, бидејќи $2^2<7<3^2$. Бројот 8 не може да се земе за втора цифра на коренот, бидејќи производот $48 \cdot 8=384$ е поголем од 345.

Се покажува дека 7 (а не 8) е втора цифра на бараниот квадратен корен, а цифрата на единиците е 3.

Според тоа: $\sqrt{74529} = 273$.

Пример 3. Да се одреди $\sqrt{1690000}$.

Решение. Бидејќи е $\sqrt{169} = 13$, затоа бараниот квадратен корен ќе биде $\sqrt{1690000} = 1300$.

Тоа е во согласност со следново правило.

Квадратниот корен од цел број, кој завршува на парен број нули и е точен квадрат, го пресметуваме кога ќе го одредиме квадратниот корен од бројот без нулите и кон добиениот резултат допишеме два пати помалку нули.

Б. Приближна вредност на квадратен корен од цел и децимален број

Знаеме, само броевите кои се квадрати на некој друг број, имаат точен квадратен корен. Сите останати броеви немаат точни квадратни корени. Според тоа, квадратните корени на броевите 2, 5, 8, 10 и други се ирационални броеви и може да ги пресметуваме само нивните приближни вредности со одредена точност до 1; 0,1; 0,01; 0,001 и тн.

Пример 3. Да се одреди приближната вредност на коренот $\sqrt{17}$ со точност до 0,01.

Решение. За таа цел подкореновиот број 17 го запишуваме во вид на децимален број со две групи од по две нули и добиениот број го коренуваме.

Според тоа, бараната приближна вредност на квадратниот корен $\sqrt{17}$ на две децимали, односно со точност до 0,01 со недостиг е $\sqrt{17} \approx 4{,}12$.

Пример 4. Да се одреди приближната вредност на коренот $\sqrt{5{,}245}$ со точност до 0,01.

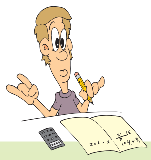
$$\sqrt{17,|00|00} = 4,12$$
$$\begin{array}{l} \underline{16} \\ 100 \quad :81\cdot 1 \\ \underline{81} \\ 1900 \quad :822\cdot 2 \\ \underline{1644} \\ 256 \end{array}$$

$$\sqrt{5,|24|50} = 2,29$$
$$\begin{array}{l} \underline{4} \\ 124 \quad :42\cdot 2 \\ \underline{84} \\ 4050 \quad :449\cdot 9 \\ \underline{4041} \\ 9 \end{array}$$

Решение. Подкореновиот број го разделуваме од лево и десно од децималната запирка на групи од по две цифри. Со цел и последната група да има две цифри, од десно на последната децимала допишуваме една нула. Потоа коренуваме на познатиот начин.

Значи, квадратниот корен   има приближна вредност 2,29 со точност до 0,01 со недостиг.

ЗАДАЧИ



1. Како го определуваме бројот на цифрите на квадратен корен од број кој е точен квадрат?
2. Одреди ги квадратните корени на броевите:

   а) 841, б) 1936, в) 134689, г) 229441.
3. Одреди ги квадратните корени на броевите:

   а) 360000, б) 291600, в) 1008016, г) 22500 .
4. Одреди ги квадратните корени на броевите:

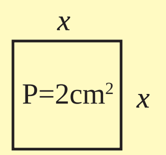
   а) 13,69, б) 1,44, в) 0,49, г) 0,09.
5. Одреди ја приближната вредност на квадратните корени со точност до 0,1:

   а) $\sqrt{10}$, б) $\sqrt{40}$, в) $\sqrt{1,5}$, г) $\sqrt{7,65}$.
6. Одреди ја приближната вредност на квадратните корени со точност до 0,01:

   а) $\sqrt{4,5}$, б) $\sqrt{0,0045}$.

Сите резултати провери ги со дигитрон.

II.6. ПОИМ ЗА ИРАЦИОНАЛЕН БРОЈ



Црт. 4

На цртеж 4 имаме квадрат, чија плоштина е P=2cm^2. Должината на неговата страна да ја означиме со x. Непознатата должина x на квадратот ќе ја одредиме кога ќе ја решиме равенката

$$x^2 = 2. \qquad (1)$$

Според тоа, бараната должина на квадратот со плоштина 2cm^2, ќе биде ненегативното решение на равенката (1), а тоа е

$$x = \sqrt{2}.$$

Да се запрашаме каков број е $\sqrt{2}$?

Дали е тој природен (цел позитивен) број, што очигледно не е, бидејќи $1^2=1<2<2^2=4$. Дали е тој рационален број? Знаеме, рационален број е секој број што може да се претстави во вид на дропка $\frac{p}{q}$, ($p\in Z$, $q\in N$). Ќе го докажеме следново тврдење:

***Теорема.* Бројот $\sqrt{2}$ не е рационален број.**

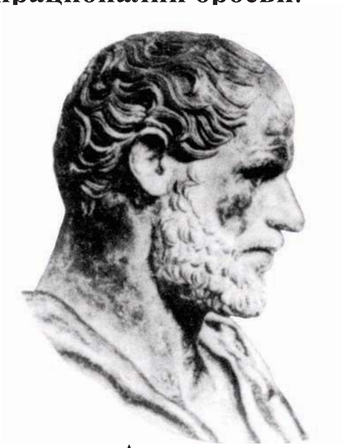
Доказ. Да претпоставиме дека тврдењето во теоремата не е точно, а точно е дека $\sqrt{2}$ е рационален број и дека важи равенството

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \qquad (2)$$

каде p и q се заемно прости броеви. Имено, ако p и q не се заемно прости броеви, секојпат можеме да скратиме со нивниот најголем заеднички делител и да добиеме нескратлива дропка. Со квадрирање на равенството (2) се добива $2=\left(\frac{p}{q}\right)^2$, односно $2q^2=p^2$. Од $p^2=2q^2$ заклучуваме дека p е парен број, т.е. $p=2k$, ($k\in N$), па важи $(2k)^2=2q^2$, $4k^2=2q^2$ односно $2k^2=q^2$. Од последното равенство $q^2=2k^2$ следува дека и бројот q е парен број, т.е. $q=2m$, ($m\in N$).

Според тоа, во равенството (2) p и q се парни броеви, а тоа противречи на претпоставката дека p и q се заемно прости броеви. Значи, тие двата не можат да бидат парни броеви. Оттука следува дека равенството (2) не е точно, па останува да прифатиме дека $\sqrt{2}\neq\frac{p}{q}$, , односно дека $\sqrt{2}$ не е рационален број, т.е. $\sqrt{2}\notin Q$.

Разгледаниот пример јасно укажува дека операцијата коренување не обврзува покрај рационалните броеви да воведеме и нов вид на броеви, кои ќе ги викаме **ирационални броеви**.



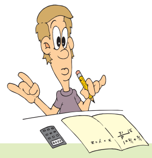
Аристотел

***Дефиниција.* Секој број кој не може да се претстави во вид на дропка $\frac{p}{q}$, ($p\in Z$, $q\in N$) се нарекува ирационален број.**

Може да се докаже дека ирационални броеви се и корените: $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{1{,}5}$ итн.

Претходниот доказ дека бројот $\sqrt{2}$ не може да се запише како дропка му припаѓа на античкиот филозоф Аристотел (384–322 год.п.н.е.).

ЗАДАЧИ



1 Одреди ја должината на страната на квадрат, чија плоштина е:
а) 8 cm^2, б) 12 cm^2, в) 20 cm^2.

2 Одреди ја вредноста на: а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt{3}$, в) $\sqrt{5}$ со точност 0,001.

3 На бројната оска претстави ги ирационалните броеви:

а) $\sqrt{5}$, б) $\sqrt{12}$, в) $\sqrt{6}$.

4 Одреди го множеството решенија на равенката:
а) $x^2=11$, б) $x^2=16$. Какви броеви се нејзините решенија?

5 Реши ги равенките: а) $x^2=8$, б) $x^2=9$, в) $y^2=14$.

6 Докажи дека $\sqrt{5}$ е ирационален број.

7 Ако a и b ($b\neq 0$) се рационални броеви, какви броеви се:

а) $a+b$, б) $a-b$, в) ab, г) a^2, д) $\frac{a}{b}$?

II. 7. РЕАЛНИ БРОЕВИ

1 Во изминатите години се запознавте со следните множества од броеви:
- множеството природни броеви $N=\{1,2,3,...\}$
- множеството цели броеви $Z=\{..,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
- множеството рационални броеви $Q=\{\frac{p}{q} \mid p,q\in Z,\ q\neq 0\}$.

За нив важат релациите: $N\subset Z\subset Q$.

Во претходната лекција се запознавме и со ирационалните броеви, на пример, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$,... итн.

Ќе покажаме дека ирационални броеви има бесконечно многу, дури и повеќе отколку рационални броеви.

***Теорема.* Броевите од видот $a+\sqrt{2}$ и $b\cdot\sqrt{2}$, ($b\in Q$) се ирационални броеви.**

Доказ. Да претпоставиме дека $a+\sqrt{2}$ и $b\cdot\sqrt{2}$ не се ирационални броеви, туку дека тие броеви се рационални. Тогаш од $a+\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ и $b\cdot\sqrt{2}=\frac{r}{s}$, следува $\sqrt{2}=\frac{p}{q}-a$ и $\sqrt{2}=\frac{r}{s}:b$, што значи дека $\sqrt{2}$ е рационален број (бидејќи разликата и количникот на два рационални броја, исто така е рационален број), а тоа е невозможно. Добиената контрадикција потврдува дека броевите од видот $a+\sqrt{2}$ и $b\cdot\sqrt{2}$, исто така се ирационални броеви: $3+\sqrt{2}$, $-5+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $-7\sqrt{2}$, итн.

Според тоа, со помош само на еден ирационален број $\sqrt{2}$ формиравме бесконечно многу ирационални броеви.

Множеството на сите ирационални броеви ако го означиме со I, тогаш унијата од множествата Q и I ќе претставува ново пошироко множество од броеви. Тоа пошироко множество од рационални и ирационални броеви се вика **множество на реални броеви** и се означува со R. Според тоа, важи: $R= Q \cup I$ и притоа $Q\cap I =\varnothing$.

Значи, секој реален број е или рационален или ирационален.

2 Знаете дека секој рационален број може да се претстави во вид на децимален број (уште велиме во својот **децимален запис**), познато ни е дека на секој рационален број одговара конечен или бесконечен, но периодичен децимален запис.

На пример: $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $-\frac{3}{5} = -0{,}6$, $\frac{2}{3} = 0{,}666... = 0(6)$; $\frac{5}{6} = 0{,}8333... = 0{,}8(3)$.

Меѓутоа, покрај бесконечни периодични децимални записи постојат и непериодични бесконечни децимални записи. На пример, таков е бесконечниот децимален запис 0,20200200020... во кој бројот на нулите се зголемува за еден. Таквиот непериодичен бесконечен децимален запис му одговара точно на еден ирационален број.

Дефиниција. **Кој било конечен или периодичен, или непериодичен бесконечен децимален запис се вика реален број.**

3 Да видиме како ги споредуваме реалните броеви.

Нека се дадени два реални броја x и y, чии децимални записи се:

$$x = a_0,a_1a_2a_3..., \quad y=b_0, b_1b_2b_3..., \tag{1}$$

каде a_0, b_0 се цели броеви, а $a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,...\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ се цифри-децимали. Притоа се договараме, во двата записа, да не се случи од некоја децимала натаму да е само цифрата 9. На пример, да нема запис од облик 0,34999..., бидејќи тој број може да се изедначи со 0,35. Тогаш:

1°. Реалните броеви x и y се еднакви, ако и само ако им се еднакви целите делови и им се еднакви сите соодветни децимали, т.е. $x=y \Leftrightarrow a_0=b_0$ и $a_1=b_1$, $a_2=b_2$,$a_3=b_3$,...

2°. За два **позитивни** реални броја x и y цададени со (1) важи:

- ако е $a_0 < b_0$, тогаш е $x < y$,
- ако е $a_0 = b_0$, но $a_1 < b_1$, тогаш е $x < y$,
- ако е $a_0 = b_0$, $a_1=b_1$, но $a_2 < b_2$, тогаш е $x < y$, итн.

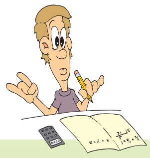
На пример: 5,31407261... < 5,31407467..., бидејќи имаат еднакви цели делови и еднакви им се првите пет децимали, а за шестите децимали е 2 < 4.

Ако реалните броеви што ги споредуваме се негативни, тогаш правилото е обратно. Од два негативни реални броја помал е оној што има поголема апсолутна вредност.

На пример: −5,31407261... > −5,31408631...

Ако имаме предвид дека секој негативен реален број е помал од нула, а нулата е помала од секој позитивен реален број, тогаш споредувањето на два реални броја секогаш е можно кога се познати нивните децимални записи.

ЗАДАЧИ



1 Кои од следниве искази се точни:

а) $N \subset Z$, б) $Q \cap Z = Z$, в) $Q \cup Z = Q$, г) $R \cap Q = Q$, д) $R \cap I = Q$?

2 Одреди го децималниот запис на бројот $\sqrt{2}$ со точност на две децимали, и спореди ги броевите: а) 1,41 и $\sqrt{2}$, б) 1,5 и $\sqrt{2}$.

3 Одреди ги децималните записи на броевите: $\frac{7}{6}$, $\sqrt{3}$ и $\frac{7}{5}$, а потоа спореди ги.

4 Спореди ги броевите: а) $-3{,}814243...$ и $-3{,}814235$, б) $-3{,}814243...$ и $-\sqrt{16}$.

5 Користеј ќи ги само цифрите 0 и 3 напиши во децимални записи:

а) два рационални броја, б) еден ирационален број.

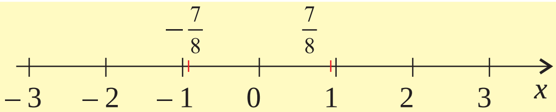
6 Бројот 0,1212212221... (бројот на двојките постојано се зголемува за еден) дали е рационален или ирационален?

7 Броевите 2,5; $-3{,}75$; 1,5 претстави ги во вид на дропка $\frac{p}{q}$ каде p и q се цели броеви; потоа претстави ги на бројната оска.

II. 8. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ НА БРОЈНА ОСКА

Минатата учебна година природните, целите и рационалните броеви геометриски ги претставувавме со точки на бројната оска (црт. 5). За целите броеви тоа станува лесно, кога на секој цел број придружуваме точно по една точка на бројната оска (црт. 5).

Да се потсетиме како рационалните броеви ги претставуваме на бројната оска. На пример, како ја одредуваме точката, што му ја придружуваме на бројот $\frac{7}{8}$. На бројната оска отсечката-сегментот [0,1] го разделуваме на осум еднакви делови (црт. 5), па седмата делбена точка ја придружуваме на бројот $\frac{7}{8}$. Останатите делбени точки им ги придружуваме соодветно на броевите: $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}$.



црт. 5

Точката што треба да ја придружиме на бројот $-\frac{7}{8}$ ја одредуваме налево од почетокот О, а на растојание од него еднакво на $\frac{7}{8}$.

На овој начин на секој рационален број r може да се придружи само една точка M на бројната оска. Бројот r велиме е **координата** на точката M и пишуваме $M(r)$. Точките, што се придружени на рационални броеви се викаат **рационални точки** на бројната оска.

Очигледно е дека, на секој рационален број му одговара точно една рационална точка на бројната оска, и обратно: секоја рационална точка е слика на точно еден рационален број.

При ова пресликување сочуван е **поредокот**, т.е. за два рационални броја a и b, ($a< b$), на помалиот број a му одговара точка A, која на бројната оска **претходи** (се наоѓа пред) на точката B (што е придружена на поголемиот број b).

Природно е да се постави прашањето: На бројната оска Оx дали има само рационални точки? Се покажува дека на бројната оска има и други точки, кои не се рационални точки, т.е. на кои не може да им се придружи ниту еден рационален број. На пример, покажавме како се пресметува квадратниот корен $\sqrt{7}$ и како со помош на вметнати (стегачки) интервали:

$(2; 3)\supset(2,6; 2,7)\supset(2,64; 2,65)\supset(2,645; 2,646)\ldots$ чии должини се: $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$ ја одредуваме точката што му одговара на бројот $\sqrt{7}$ (црт. 2).

Со таквата постапка можеме на секој ирационален и реален број да му придружиме само една точка на бројната оска. Оттука може да заклучиме дека:

На секој реален (рационален или ирационален) број можеме да придружиме по една точка на бројната оска, и обратно: секоја точка на бројната оска е придружена (е слика) точно на еден реален број.

Ако $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ се две различни точки на бројната оска Оx, тогаш точката A е пред B, ако и само ако $\alpha<\beta$.

ЗАДАЧИ

1 На бројната оска Оx претстави ги реалните броеви:

а) $\frac{2}{3}$, б) 4,25, в) $\sqrt{10}$, г) $\sqrt{15}$, д) $\frac{5}{6}$.

2 На бројната оска Оx кои од точките со координати:

A(–2,45), B($-\sqrt{8}$), C($\sqrt{2}$), D($-2\sqrt{3}$) се наоѓаат пред точката $B(-\sqrt{8})$?

3 Дали е точно дека: а) $Q\subset R$, б) $I\subset R$?

4 Какво множество претставува пресекот: а) $R\cap Q$, б) $R\cap I$?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ -II

1 Пресметај ја вредноста на степенот:

а) 6^3, б) $(-6)^3$, в) 1^7, г) $(-1)^7$, д) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$, ѓ) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$, е) -3^4, ж) $-(-7)^2$.

2 За какви вредности на n е точно неравенството:

а) $(-5)^n \geq 0$, б) $(-5)^n < 0$?

3 Дали е точно тврдењето: а) $2^{12} = 4^6$, б) $3^6 = 9^3$?

4 Провери дали се точни равенствата:

а) $1+3=2^2$, б) $1+3+5=3^2$, в) $1+3+5+7=4^2$, г) $1+3+5+7+9=5^2$.

5 Упрости го изразот:

а) $2^4 \cdot 16$, б) $3^{n+1} \cdot 27$, в) $a^n \cdot a^2 \cdot a$.

6 За која вредност на $n \in N$ е точно равенството:

а) $3^2 \cdot 3^n = 3^{10}$, б) $a^n \cdot a^5 = a^9$, в) $c^7 \cdot c^n = c^{11}$?

7 Запиши го a^{20} како степен со основа: а) a^2, б) a^5, в) a^{10} .

8 За која вредност на n е точно равенството:

а) $(3^5)^n = 3^{10}$, б) $(5^n)^4 = 5^{12}$, в) $5^n \cdot 5^4 = 5^{12}$?

9 Одреди ги сите парови природни броеви (m,n) за кои ќе биде точно равенството:

а) $(2^m)^n = 2^6$, б) $3^m \cdot 3^n = 81$.

10 Меѓу кои природни броеви се наоѓа коренот:

а) $\sqrt{52}$, б) $\sqrt{110}$, в) $\sqrt{150}$?

11 За кои вредности на $n \in \{1,2,3,4,5\}$ тврдењето е вистинито:

а) $2^n < 20$, б) $10 < 10^n < 1000$, в) $0{,}0001 < 0{,}1^n$?

12 Пресметај го изразот (користејќи дигитрон или таблица):

а) $2+3\sqrt{45}-2{,}5\sqrt{20}$, б) $\sqrt{17}+2\sqrt{51}-3\sqrt{74}$

13 Ако природниот број a е: а) парен, б) непарен број,

каков број (парен или непарен) е неговиот квадрат a^2?

14 Пресметај го изразот без користење на таблица или дигитрон:

а) $\sqrt{2}\ \sqrt{6}\ \sqrt{48}$, б) $2(3+\sqrt{5})-(\sqrt{5}-1)\cdot 3+\sqrt{5}+3$.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА - II

1 Упрости го изразот:

а) $2^{12} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{12}$, б) $\left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^8$.

2 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) 5^2-2^4, б) $5^2-(-2)^4$, в) $\frac{12^2}{3^2 \cdot 4^3}$.

3 Изврши ги степенувањата:

а) $(-3a^2 \cdot b^2)^2$, б) $(-1{,}5 \cdot a^5 \cdot b^4)^5$, в) $(2 \cdot a)^4$.

4 Со колку цифри е запишан секој од броевите:

а) 10^7, б) $(10^2)^3$, в) $10^3 \cdot 10^5$?

5 Земајќи предвид дека $a^{m^n} = a^{(m^n)}$ пресметај 2^{3^2}.

6 Колку сантиметри кубни има 1 m^3?

7 Одреди ја вредноста на бројниот израз:

а) $\frac{3-2\cdot 4}{(6-2)\cdot 3}$, б) $\frac{5+2\cdot 4}{5^2+1}$.

8 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{6^5\cdot 5^3}{2^5\cdot 3^4\cdot 5^2}$, б) $a^2 \cdot b^2$ за $a = 2$ и $b = \frac{1}{2}$.

9 Колку има пикометри во 1 mm?

10 Колку килобајти има во еден гигабајт?

11 Пресметај го изразот (користејќи диготрон или таблица): $3-2\sqrt{3}+4{,}5\sqrt{2}$.

12 Пресметај го изразот без користење на таблица или дигитрон: $\sqrt{3^5}\cdot\sqrt{3^3}$.

ТЕМА III

ПОЛИНОМИ

III.1. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗ. БРОЈНА ВРЕДНОСТ НА ИЗРАЗ

III.1.1. Бројни изрази

Нека се дадени броевите 12 и -4. Знаеме како нивниот збир, разлика, производ и количник симбилички ги запишуваме.Тоа се изразите: а) $12 + (-4)$ или $12 - 4$, б) $12 - (-4)$, в) $12 \cdot (-4)$ и г) $12 : (-4)$. Бидејќи членовите и нивните вредности се броеви затоа тие се викаат **бројни изрази**.

Наједноставни бројни изрази ги сметаме самите симболи на броевите: 1, 2, -5, 3, 0, $\frac{3}{5}$, $-\frac{2}{3}$. Сложените бројни изрази ги образуваме постапно поаѓајќи од наједноставните преку нивно врзување со некои од знаците на основните операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$, а притоа користиме и загради.

На пример: а) $4 + 28 : 5$, б) $(\sqrt{4} - 1) \cdot 3^5$, в) $\dfrac{16}{15 : 3 - 5}$.

Ако ги извршиме назначените операции во изразот, придржувајќи се на редоследот на нивното извршување, ќе добиеме одреден број, кој се вика **бројна вредност на изразот**, или кратко, само **вредност на изразот**.

На пример:

а) Вредност на изразот $4 + 28 : 5$ е 9,6. Навистина: $4 + 28 : 5 = 4 + 5{,}6 = 9{,}6$.

б) Вредностна изразот $(\sqrt{4} - 1) \cdot 3^5$ е 243. Навистина:

$(\sqrt{4} - 1) \cdot 3^5 = (2 - 1) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.

в) Изразот $\dfrac{16}{15 : 3 - 5}$ нема бројна вредност, бидејќи не сите назначени операции се изводливи. Имено, делењето со $15 : 3 - 5 = 0$ не е можно. Таквите изрази велиме дека немаат смисла.

Израз, што се состои само од еден број, има бројна вредност еднаква на самиот тој број.

1 Одреди ја вредноста на бројниот израз:

а) $30 - 5 \cdot 6$, б) $0{,}2 : 5 + 5 : 0{,}2$, в) $\dfrac{9 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 5}$.

2 Формирај броен израз во кој ќе учествуваат најмалку два броја, таков што неговата вредност да биде еднаква на:

а) 8, б) -2, в) 0, г) 1, д) $-0{,}1$.

ЗАДАЧИ

3 Кој од бројните изрази нема бројна вредност и зошто:

а) $\dfrac{33+2^5:8}{5:0{,}2-25}$, б) $\dfrac{4^3-2^3\cdot 5}{10-26:2}$, в) $\dfrac{6:3+8:3}{4\cdot 9-6^2}$?

4 Не извршувајќи ги назначените операции, спореди ги вредностите на изразите:

а) $24\cdot\dfrac{5}{7}$ и $24:\dfrac{7}{5}$, б) $25-5$ и $25-(-5)$.

5 Избери еден број, кој ќе биде поголем од едниот, а помал од другиот од следниве два броја: а) 2,18 и 2,19, б) –0,6 и 0,32, в) $\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{1}{2}$.

6 Користејќи ја цифрата 2 трипати состави израз, чија вредност да е:
а) 2, б) 3, в) 6, г) 8.

7 Користејќи ги цифрите 1, 2, 3, 4 , 5, 6, 7, 8 и 9 по еднаш, состави израз чија вредност е еднаква на: а) 5, б) 13.

8 Користејќи ги цифрите 1 и 2 состави израз чија вредност е еднаква на 5, а притоа цифрите 1 и 2 да се појавуваат ист број пати.

III.1.2. **Изрази со променливи**

Познато ни е дека за означување на парните и непарните броеви ги користиме соодветно изразите: $2k$ и $2k–1, (k \in N)$.

Тука буквата k го заменува кој било природен број. Значи, k може да добива различни вредности, но од множеството на природните броеви.

Таков симбол (буква), кој е заедничка ознака за елементите на некое дадено множество, се вика **променлива**, а даденото множество се вика **домен или дефиниционо множество на променливата**. Според тоа, во изразите $2k$ и $2k–1$ буквата k е променлива, а со $k \in N$ е кажан (зададен) доменот на променливата k.

Броевите, пак, 2 и –1 во горниве два израза, кои имаат постојана (фиксна) вредност што не ја менуваат, се викаат **константи**. Значи, **константа е број (објект) со потполно определена (фиксна) вредност во даден израз**.

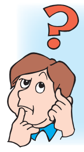
Изрази, во кои учествуваат променливи се викаат **изрази со променливи или алгебарски изрази**.

Според бројот на променливите разликуваме: **изрази со една променлива, со две променливи, со три променливи итн**.

Да ги разгледаме изразите: а) $\frac{3a}{a-2}$, б) $3x-y$, в) $\frac{5}{x-y}$.

Изразот $\frac{3a}{a-2}$ е со една променлива. За $a = 4$ тој добива вредност $\frac{3\cdot 4}{4-2} = 4$, за $a = 3$ тој добива вредност $\frac{3\cdot 3}{3-2} = 9$. За $a = 2$ тој нема смисла, а за некоја друга вредност на a, различна од 2, тој секогаш добива по една точно одредена вредност. Велиме дека **доменот на промената на променливата** a, а воедно со тоа и дефиниционата област на изразот $\frac{3a}{a-2}$ е множеството на сите реални броеви различни од $a = 2$. Тоа симболички го запишуваме

$$D = \{a \mid a\in R,\ a \neq 2\}.$$



Дефинициона област на алгебарски израз со една променлива се вика множеството на сите вредности на променливата, за кои изразот има смисла.

Изразот $3x-y$ е со две променливи. Неговата вредност зависи од промената и на двете променливи. На пример, ако е $x = 4$, $y = 3$ тој добива вредност: $3\cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9$. Ако, пак, $x = 3$, $y = -3$, тогаш вредноста на изразот $3x-y$ е еднаква на 12.

Со други зборови велиме: на парот броеви (4; 3) (каде на прво место е вредноста на променливата x, а на второ место – вредноста на променливата y) на изразот $3x-y$ му одговара вредност еднаква на 9; а на парот (3,–3) му одговара вредност 12.

Дефиниционата област на изразот $3x-y$ е $D=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$. Изразот $\frac{3}{x-y}$ е исто со две променливи. Тој има смисла (уште велиме: **е дефиниран**) за сите парови реални броеви (x,y) за кои е $x \neq y$. Според тоа,

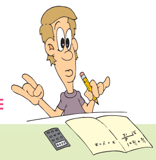
$$D=\{(x,y)\mid x,y\in R,\ x\neq y\}.$$

Кај изразите со две променливи гледаме дека нивната дефинициона област се состои од сите парови вредности на променливите за кои изразот е дефиниран.

За оние кои сакаат да знаат повеќе.

Ние дефиниравме константи и променливи во случај кога имаме броен израз. Се прашуваме што ќе бидат константи, а што променливи во геометријата. За таа цел нацртајте еден триаголник ABC, една права a, една точка M итн. Фугирите што сте ги нацртале, на пример точката M, се константи, бидејќи точката M е точно определена во рамнината. Но, ако напишите триаголник ABC, права a, точка M итн. но без да се зададени овие фигури во рамнината, тогаш тие фигури се променливи. Зошто?

ЗАДАЧИ



1 Одреди ја бројната вредност на изразот:

а) $3a \cdot (a-4)$ за $a \in \{-2,-1,0,1,2\}$, б) x^2-2x+5 за $x \in \{-3,0,3,5\}$.

2 Даден е изразот $A=\frac{2x^2-x+5}{x^2-1}$. Одреди ја неговата бројна вредност за $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$. За кои од дадените вредности на променливата x изразот е недефиниран? Одреди го доменот на променливата и дефиниционата област на изразот.

3 Пополни ја таблицата:

x	-2	0	2	3	$-3\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5
$x+2\cdot(x-1)$							

4 Одреди ја бројната вредност на изразот: a^2-2ab, за:

а) $a=3$, $b=2$; б) $a=-2$, $b=0$; в) $a=0$, $b=3{,}5$.

5 Пополни ја таблицата на вредностите на изразите:

$(x, y,)$	$x-2y$	$2y-x$	$x+y-2$
(3,1)			
(4, –2)			
(–5, –1)			
(2; 0,5)			

Што забележуваш? Какви се вредностите на изразите $x-2y$ и $2y-x$ за ист пар вредности на променливите x и y?

6 За кои вредности на променливата x нема смисла изразот:

а) $\frac{7}{6-x}$, б) $\frac{5x^2}{x+2}$, в) $\frac{4}{x}$, г) $\frac{2x+12}{2x-12}$?

7 Одреди ја дефиниционата област на изразот:

а) $\frac{5}{x-3}$, б) $\frac{1+a}{4-a}$, в) $\frac{y+6}{9}$, г) $4(y-3)$, д) $\frac{7}{x^2+12}$.

8 Избери еден, кој било пар вредности на променливите x и y за кој нема смисла изразот: а) $\frac{2}{x+y}$, б) $\frac{5}{2x-y}$, в) $\frac{7-y}{x}$.

9 Одреди ја дефиниционата област на изразот:

а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$, б) $\frac{5}{x^2}$, в) $\frac{1}{x^2-1}$, г) $\frac{2}{x(x+1)}$.

10 Состави израз кој нема да биде дефиниран за 3 и –3.

III.2. ПОИМ ЗА МОНОМ. СЛИЧНИ И СПРОТИВНИ МОНОМИ

Да ги разгледаме следните поедноставни изрази:

- константните броеви, како што се: 0; 1; 2; –3; $-\frac{2}{3}$;... (1)
-променливите: $x, y, z, ..., a, b, c, ... p, q, ...$ (2)

Во поедноставните изрази спаѓаат и изразите што се формирани со врзување на некои од изразите (1) и (2) со знакот за множење: „·“. На пример, такви се изразите

$$x \cdot x \cdot x; \quad -3 \cdot a \cdot b \cdot b; \quad \frac{2}{3}a^2 \cdot (-4 \cdot a \cdot c^2) \qquad (3)$$

Усвоено е изразите $x \cdot x \cdot x$; $-3 \cdot a \cdot b \cdot b$; $\frac{2}{3}a^2 \cdot (-4 \cdot a \cdot c^2)$ пократко да ги запишуваме со x^3, $-3ab^2$ и $-\frac{8}{3}a^3c^2$, испуштајќи го притоа знакот за множење.

За изразите $x \cdot x \cdot x$ и x^3 велиме дека се **идентични**. Тие добиваат еднакви вредности за која било вредност на променливата x. Замената, пак, на еден од нив со другиот идентичен израз, се вика **идентична трансформација**.

Идентичните изрази поврзани со знакот на равенство често пати искажуваат некои математички правила или закони. На пример, изразите $x + y$ и $y + x$; $(x + y) + z$ и $x + (y + z)$; $x \cdot (y + z)$ и $xy + xz$ се идентични, а равенствата $x + y = y + x$,
$(x + y) + z = x + (y + z)$, $x \cdot (y + z) = xy + xz$
ги изразуваат комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон.

Изразите од видот (1), (2) и (3) се викаат **мономи**.

Поимот моном го воведуваме со следнава:

Дефиниција: **Моном е израз формиран од константи (броеви), променливи и знакот на операцијата множење „·“.**

На пример, мономи се изразите: 7; a; x; $-5a^2b^3$; $\frac{3}{5}ax^3$.

Да одбележиме дека $\frac{ax}{3}$ е моном, иако содржи делење со 3, бидејќи можеме да го запишеме како производ $\frac{1}{3} \cdot ax$.

Гледаме, мономот $-6a^3b^2$ се разликува од мономот $-2 \cdot a \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot b$ по тоа што тој има еден броен множител –6, кој стои на прво место и секој производ на еднакви променливи во него е претставен со степен. Таквиот вид на мономот се вика **нормален** или **стандарден вид на мономот**.

1 Сведи го мономот во стандарден вид и покажи го неговиот броен множител:

а) $3x^2 \cdot (-4x)$, б) $2abc \cdot 7a$, в) $\frac{4}{7}a^2b \cdot 0{,}7ax$.

Бројниот множител на мономот во нормален вид, се вика **коефициент на мономот**, а производот на променливите во него **- главна вредност на мономот**. На пример, коефициентот на мономот $-3a^4b^2$ е еднаковна -3, а главната вредност е еднаква на a^4b^2 .

Бидејќи е $ax^2 = 1 \cdot ax^2$ и $-ax^2 = (-1) \cdot ax^2$, затоа сметаме дека коефициент на мономот ax^2 е 1, а на $-ax^2$ е -1. Гледаме, тие два монома имаат иста главна вредност, а се разликуваат само по нивните коефициенти.

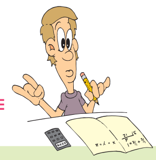
2 Што е коефициент, а што главна вредност на мономот?

Два монома, кои имаат иста главна вредност, се викаат **слични мономи**.

Два слични мономи, пак, чии коефициенти се спротивни броеви, се викаат **спротивни мономи**.

На пример: слични мономи се $3x^2y$, $-4x^2y$ и $-x^2y$, а спротивни мономи се мономите: а) $-3ab^2$ и $3ab^2$, б) a^2b^3 и $-a^2b^3$, в) $-x$ и x.

ЗАДАЧИ



3 Запиши: а) три мономи чии коефициенти се негативни реални броеви,
б) три мономи кои се разликуваат само по коефициентите.

4 Одреди го коефициентот и главната вредност на мономот:
а) $3ab^2 \cdot 2a^3$, б) $-5x^3y$, в) $-a^2b^3$, г) x^3x.

5 Секој од мономите запиши го како производ, така што едниот од множителите да биде $3x^2$: а) $6x^4y^2$, б) x^2y^3, в) $4x^5$.

6 Одреди кои од следниве мономи се слични:
а) $4a^2b$, б) $-3ab^2$, в) $4ax^3$, г) $-2ax^3$, д) $2a^2b$, ѓ) $5ax^3$.

7 Одреди кои од следниве мономи се спротивни:
а) $-x^2$, б) $2ax$, в) x^2, г) $-3ax^2$, д) $-2ax$, ѓ) $3ax^2$.

III.3. БИНОМ. ТРИНОМ. ПОЛИНОМ

1 Ако A и B се два неслични монома, тогаш алгебарскиот збир $A + B$ се вика **бином**. На пример, изразите: $a + b$; $\frac{1}{4} + y$, $2x^2 - 3y$ (тука $2x^2 - 3y$ може да се запише како $2x^3 + (-3y)$) се биноми.

Мономите A и B велиме се членови на биномот $A + B$.

Се поставува прашањето: Што ако A и B се слични мономи?

Тогаш, на пример, изразот $3x + 5x$ (согласно дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето) ќе биде еднаков на $3x + 5x = (3 + 5) \cdot x = 8x$, т.е. ќе биде моном, а не бином. Оттука заклучуваме дека:

Збирот на два слични монома е трет моном сличен со нив.

2 Ако A, B и C се три неслични мономи, тогаш алгебарскиот збир $A + B + C$ се вика **трином**. На пример, изразите $a + 2b - 3c$, $x^2 - 2x + 5$, $\frac{1}{2}x^2 - xy + 3y^2$ се триноми.

Мономите A, B и C велиме се **членови** на триномот $A + B + C$.

Воопшто, ја усвојуваме следнава:

***Дефиниција*: Изразот, што е алгебарски збир од неколку (еден, два, три или повеќе) мономи се вика полином.**

Според оваа дефиниција, мономите, биномите и триномите се специјалн видови полиноми, и тоа мономите се **едночлени полиноми**, биномите **- двочлени полиноми**, а триномите **- тричлени полиноми.**

Да го разгледаме полиномот:

$$4a^3 - 3a^4 + a^2a + \frac{1}{2}a^2 - 5a + a - 2\frac{1}{2}a \cdot a + 6 + 5a^4. \qquad (1)$$

Тој содржи девет членови, од кои некои не се во нормален, а некои се во нормален вид. Така, членовите-мономите: $a^2 \cdot a$ и $-2\frac{1}{2}a \cdot a$ не се во нормаленен вид. Ако нив ги доведеме во нормален вид, полиномот ќе гласи:

$$4a^3 - 3a^4 + a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 5a + a - 2\frac{1}{2}a^2 + 6 + 5a^4. \qquad (2)$$

Во полиномот (2) гледаме дека има слични членови. Ако нив ги групираме и го примениме дистрибутивниот закон, полиномот (2) ќе го добие видот:

$$4a^3 + a^3 - 3a^4 + 5a^4 + \frac{1}{2}a^2 - 2\frac{1}{2}a^2 - 5a + a + 6,$$

$$(4 + 1) \cdot a^3 + (-3 + 5) \cdot a^4 + \left(\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\right) \cdot a^2 + (-5 + 1) \cdot a + 6, \text{ односно} \qquad (3)$$

$$5a^3 + 2a^4 - 2a^2 - 4a + 6.$$

Оваа трансформација на полиномот (2) се вика **сведување на сличните членови** во него.

Гледаме, во полиномот (3), кој е идентичен на дадениот полином (1), сите негови членови се во нормален вид и нема слични членови. Таквиот вид на даден полином се вика **нормален вид**. Значи, **даден полином е во нормален вид, ако сите негови членови**

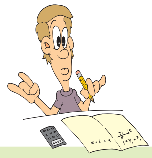
се во нормален вид и ако не содржи слични членови.

1 Доведи го полиномот во нормален вид:

а) $3x^3 - 4x^2 + 2x + 5x^2 + 4x + 7$,

б) $8ab^2 - b^3 - 6a^2 + 3a^2b - 3ab^2 + 2b^3 + 4a$.

ЗАДАЧИ



2 Од мономите: $5ax^2$; $-3a^2x$; $0{,}2ax^2$; $-x^2$; -5; $4a^2x$; $-3x$ формирај неколку биноми.

3 Од мономите: $a, -b, ac, -4a, -a^2b, 3ac, 5b, 7a^2b, 2abc$, формирај неколку триноми.

4 Доведи го полиномот во нормален вид:

а) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a - 4a \cdot a \cdot a \cdot a + 5a \cdot a \cdot a - 7a \cdot a \cdot a + 3a \cdot a + 2ab - 6$,

б) $3x \cdot x \cdot x - 15x^2 \cdot x + 5{,}2x \cdot x - 1$,

в) $3x \cdot (-2y) - 4x^2 \cdot 2x + 8x^3 - 3xy + x - 5$.

5 Записот $\overline{abc}$ го користиме за означување на трицифрен број, во кој има a стотки, b десетки и c единици. Тој број може да го претставиме и во вид на полином: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. На пример: $567 = 100 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 7$. Претстави ги во вид на полином броевите: а) $\overline{abcd}$, б) $\overline{xyz}$, в) $\overline{ab}$, г) $\overline{ba}$.

6 Одреди ја дефиниционата област на полиномот:

а) $2x^2 - 3x + 7$, б) $\frac{3}{4}xy - x + 2$, в) $\frac{2x+5y-1}{3}$.

7 Одреди ја бројната вредност на полиномот:

а) $3x^2 + 2x + 5$ за $x = 10$, б) $-4ab^2 + 3ab - a^2 + 2b$ за $a = -2$ и $b = 8$.

8 Одреди ја бројната вредност на биномите: $A(x) = 2x^2 - x$, $B(x) = -(2x^2 - x)$ и $C(x) = -2x^2 + x$ за $x \in \{-3,-2,0,1\}$, а потоа спореди ги.

III.4. СТЕПЕН НА МОНОМ И НА ПОЛИНОМ

Видовме, мономите и, општо, полиномите може да бидат со една, две, три или повеќе променливи. Мономите, биномите, триномите и, општо, полиномите ги разликуваме уште еден од друг и според нивниот **степен**.

1 Во нормалниот вид на секој моном вообичаено е променливите во него да ги подредуваме по азбучен ред. На пример, пишуваме моном $3a^3b^2x$, а не $3b^2xa^3$ или $3xb^2a^3$.

Кај мономите со една променлива степенот на променливата е и **степен на мономот**. На пример: мономот $-2x^3$ е од трет степен, а мономот $7a^4$ е од четврти степен, итн.

За константите, како што се, на пример: 8, -5, $\frac{1}{3}$ и сл. со исклучок на константата 0, по договор земаме дека се од **нулти степен**. На константата 0 не и придаваме никаков степен.

Кај мономите со две и три променливи разликуваме **степен на мономот** по однос на секоја променлива одделно и **степен на мономот** по однос на сите променливи. На пример, мономот $7a^2b^3c$ е од втор, трет, прв степен по однос на секоја променлива a, b и c соодветно; а по однос на сите променливи тој е од $(2 + 3 + 1 = 6)$ шести степен. Мономот, пак, xy^2 е од прв степен по однос на x, од втор степен по однос на y, а од трет степен по однос на x и y.

1 Одреди го степенот на секој од мономите по однос на секоја променлива и по однос на сите променливи:

а) $-3x^ny^3$, б) $0{,}5a^2b^n$, в) -4, в) $6abc$.

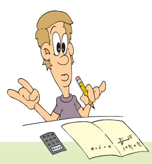
2 Очигледно е дека, секој член на даден полином има одреден степен по однос на секоја променлива и точно одреден степен по однос на сите променливи во него.

Оттука следува дека:

Членовите на секој полином во нормален вид може да ги подредуваме или **според опаѓачките степени на една од променливите** (обично според првата по азбучен ред променлива), или **според опаѓачките степени на членовите по однос на сите промевливи**. Ние ќе го практикуваме првиот начин. На пример, полиномот $7x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 5$ е во нормален вид и подреден е по опаѓачките степени на x, а исто така и полиномот $3x^4y^2 - x^3y^2 + 2x^2y^3 - 5xy^3 + 4y^2 + 2$ е во нормален вид и подреден е по опаѓачките степени на променливата x.

Степен на полиномот во нормален вид со една променлива се вика степенот на најстариот член (т.е. членот со највисок степен). А степен на полиномот со повеќе променливи е највисокиот степен, што го има некој од мономите - собироци. И кај полиномите со повеќе променливи, покрај степен на полиномот по однос на сите променливи, разликуваме и негов степен по однос на некоја одредена променлива во него. На пример:

Полиномот $x^3 - 2x^2 + x - 3$ со една променлива е од трет степен. Полиномот, пак, $x^3y - 4x^2y^2 + 5xy - 1$ со две променливи е од трет степен по однос на x, од втор степен по однос на y, а од четврти степен по однос на двете променливи x и y.



ЗАДАЧИ

2 Одреди го степенот на мономот:

а) $12x^6$, б) $9x^5$, в) $8xy^4$, г) -5, д) $15x^2y^3$, ѓ) $3a^3b^2c$.

3 Наведи три различни мономи со коефициент -5 и променливи x и y, при што секој да е од четврти степен по однос на x и y.

4 Кој од мономите има највисок, а кој најнизок степен:

$$4x^5,\ 9x^3y^4,\ -5xy^4,\ x^3y^3,\ -y^3?$$

5 Подреди го полиномот по степените на променливата x:

а) $4x - 3x^2y - x^4y^2 + 3y^3 - 1$, б) $6ax^3 - 5a^2x^4 + 3x^2 - ax + 1$.

6 Даден е полиномот со две променливи: $4x^2y^3 - 3xy^4 + 5x^4y^2 + x^3y - 2x^5 + 4y^4 - 1$. Подреди го по опаѓачките степени на:

а) променливата x, б) променливата y, в) по двете променливи.

III.5. **СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА МОНОМИ**

1. Видовме дека, збирот на два слични монома е трет моном сличен со нив, чиј коефициент е еднаков на збирот од коефициентите на мономите-собироци. На пример, за сличните мономи $3x$ и $7x$ имаме: $3x + 7x = (3 + 7) \cdot x = 10x$.

Сега да ги собереме несличните мономи $5x$ и $3y$. Бараниот збир симболички го запишуваме како алгебарски збир $5x + 3y$. Добиениот израз не е моном, но тој е одреден бином, или, пак, полином. Велиме, збирот на несличните мономи $5x$ и $3y$ е еднаков на биномот $5x + 3y$, чии членови се дадените мономи.

Според тоа, **за да собереме неколку мономи, доволно е да ги запишеме еден по друг со нивните знаци** (како алгебарски збир).

Потоа, ако во добиениот збир (полином) има слични членови, вршиме сведување.

1 Собери ги мономите:

$$\text{а)}\ \frac{1}{2}ab,\ 3\frac{1}{2}ab\ \text{ и }\ 7ab,\quad \text{б)}\ 5a^2b,\ -3ab^2,\ -a^2b^2,\ 4ab,\ 6a\ \text{ и }\ 2b.$$

За собирањето на мономи важат комутативниот и асоцијативниот закон.

2 Одземањето на два монома го вршиме на ист начин како и одземањето на рационални броеви. Да се потсетиме, од бројот a да се одземе бројот b, доволно е кон бројот a да се додаде спротивниот број на намалителот b, т.е. $a - b = a + (-b)$.

Според тоа, за одземањето на два монома важи следново:

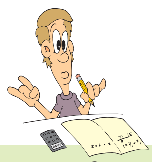
***Правило*. Од мономот *A* да се одземе мономот *B*, доволно е кон мономот *A* да се додаде спротивниот моном на мономот *B*, т.е.**

$$A - B = A + (-B).$$

Пример. Да се најде разликата на мономот $4x^2y^3$ со мономот $-3x^3y^2$.

Решение. $4x^2y^3 - (-3x^3y^2) = 4x^2y^3 + 3x^3y^2$.

ЗАДАЧИ



2 Од мономот $9a^2b$ одземи го мономот: а) $3a^2b$, б) $-2ab^2$.

3 Одреди го збирот на мономите:

а) $4ab^2$, $-ab$, $2a^2b$, $3ab$, б) $8a^2b^2$, $-3ab^2$, $4abc$, $2ac^2$, $6a^2c$ и $-7a^2b^2$.

4 Од мономот $3xy^2$ одземи го мономот: а) $-5xy^2$, б) $4x^2y$, в) $-x$.

5 Запиши го спротивниот моном на мономот: а) $2ax^2$, б) $-7a^2xy$.

6 Запиши го збирот на мономот:
а) $6ab^2$, б) $-4ab$ и неговиот спротивен моном. На што е еднаков нивниот збир?

7 Одреди ги бројните вредности на триномите:
а) $A(x) = -3x^2 + 2x - 5$, $B(x) = -(-3x^2 + 2x - 5)$ и $C(x) = 3x^2 - 2x + 5$ за $x \in \{-2,-1,0,3\}$, а потоа спореди ги.

III.6. **СПРОТИВНИ ПОЛИНОМИ. ОСЛОБОДУВАЊЕ ОД ЗАГРАДИ**

1. Рековме дека за полиномите ќе важат основните закони и својства на операциите со рационалните броеви. Едно од тие својства е што: **секој рационален број *a* има свој спротивен рационален број – *a*, таков што да важи**: $a + (-a) = 0$.

Аналогно, за полиномот ќе важи: $P + (-P) = 0$, каде P е некој полином. Значи, секој полином P има свој **спротивен полином**, што го означуваме со $-P$.

На пример:

а) За полиномот $5x^3 - 2x$ негов спротивен полином е $-(5x^3 - 2x) = -5x^3 + 2x$, бидејќи важи $(5x^3 - 2x) + (-5x^3 + 2x) = 5x^3 - 2x - 5x^3 + 2x = 0$.

б) За полиномот $4a^2 + 3a - 1$, негов спротивен полином е $-(4a^2 + 3a - 1) = -4a^2 - 3a + 1$ бидејќи е $(4a^2 + 3a - 1) + (-4a^2 - 3a + 1) = 4a^2 + 3a - 1 - 4a^2 - 3a + 1 = 0$.

1 Запиши го спротивниот полином на полиномот:

а) $5x^3 - 4x^2 + x - 1$, б) $-7ax + 2x^2 - 5a + 9$.

2. При запишувањето на даден полином, често, истиот го затвораме во заграда пред која не пишуваме никаков знак, а при запишувањето на неговиот спротивен полином, тогаш истиот, исто така, го затвораме во заградата, но, пред неа пишуваме знак минус „–“.

Ослободувањето од тие загради го вршиме согласно правилата:

I **правило. Ако пред заградата не стои никаков знак, или стои знакот плус, тогаш заградата може да се изостави и членовите во заградата ги задржуваат своите знаци.**

На пример, означениот збир на полиноми го трансформираме:
$(3x^2 + 7x - 5) + (-2x^2 - x + 9) = 3x^2 + 7x - 5 - 2x^2 - x + 9$ (ги сведуваме сличните членови) $= x^2 + 6x + 4$.

II правило. Ако пред заградата стои знак минус, тогаш заградата и знакот минус може да се изоставаат, а знаците на членовите во заградата се менуваат во спротивни.

На пример, спротивниот полином на полиномот $P = -3x^2 + 5x - 1$ е полиномот $-P = -(-3x^2 + 5x - 1) = 3x^2 - 5x + 1$. Понекогаш станува потребно група членови на даден полином да се затворат во заграда. Тогаш се придржуваме на следниве две правила за затворање во заграда:

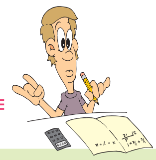
III правило. Ако пред заградата се стави знак „+“, тогаш сите членови во заградата се запишуваат со своите непроменети знаци.

На пример: $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x^3 - 3x^2) + (2x - 6)$.

IV правило. Ако пред заградата се стави знак „–“, тогаш сите членови во заградата се запишуваат со спротивни на своите знаци.

На пример: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x - 2)$.

ЗАДАЧИ



2 Трансформирај го изразот во полином во нормален вид:
а) $(1 + 2a) + (a^2 - 3a)$, б) $(x^2 - x + 5) - (x^2 + x + 7)$.

3 Упрости го изразот:
а) $(x^2 - 2x + y) - (-3x + y^2 - 4)$, б) $(a^3 - a^2 + a - 1) + (2a^2 - a + 1)$.

4 Реши ги равенките:
а) $5 - 2x - (3x - 9) = 5$, б) $1 - (2x - 3) = 8 - 6x$, в) $(7 + 2x) - (4x - 12) = 25$.

5 Докажи дека вредноста на изразот $1 - x^2 + (1 + 3x - x^2) - (3x - 2x^2)$ не зависи од променливата x.

6 Дали е точно дека:
а) збирот на три последователни природни броеви е делив со 3,
б) збирот на четири последователни природни броеви е делив со 4?

7 Докажи дека:
а) збирот на два двоцифрени броја од видот $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ е делив со 11,
б) разликата $\overline{ab} - \overline{ba}$ е делива со 9.

8 Претстави го полиномот $A = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ како разлика од моном и трином.

9 Претстави го триномот:
а) $a^2 + 4a + 1$, б) $x^2 - x - 2$ во вид на збир на два бинома.

10 Претстави го триномот:
а) $a^2 + 6a - 2$, б) $x^2 + x - 4$ во вид на разлика од два бинома.

III.7. СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Собирањето и одземањето на два полинома го вршиме така што, прво, со употреба на загради симболички го запишуваме бараниот збир, односно разлика на дадените полиноми, а потоа се ослободуваме од заградите. Ако во добиениот израз има слични членови, вршиме сведување на истите и на крај ги подредуваме членовите на добиениот полином.

Да го покажеме тоа на следниве примери:

Пример 1. Да се соберат полиномите:

$$A = 5x^2 + 3x - 7 \quad \text{и} \quad \text{B} = -4x^2 + 6x + 1.$$

Решение. Бараниот збир го запишуваме:

$A + B = (5x^2 + 3x - 7) + (-4x^2 + 6x + 1)$. Потоа се ослободуваме од заградите:

$$\text{A} + \text{B} = 5x^2 + 3x - 7 - 4x^2 + 6x + 1.$$

На крај ги сведуваме сличните членови и така добиваме:

$$A + B = x^2 + 9x - 6.$$

1 Одреди го збирот на полиномите: $2ax^3 - a^2x + 3ax - 4a$ и $5a^2x - 6ax + 7a - x + 5$.

Пример 2. Од полиномот $A = 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ да се одземе полиномот $B = -3x^3 + 5x^2 - x + 6$.

Решение. Бараната разлика ја запишуваме:

$$A - B = (4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 1) - (-3x^3 + 5x^2 - x + 6). \qquad (1)$$

Одземањето на полиноми го дефинираме исто како и одземањето на мономи, имено $A - B = A + (-B)$, каде полиномот $-B$ е спротивен на B. Постапувајќи така, за разликата (1) добиваме:

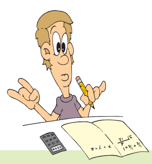
$$\begin{aligned} A - B &= (4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 1) + [-(-3x^3 + 5x^2 - x + 6)] = \\ &= (4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 1) + [+3x^3 - 5x^2 + x - 6] = \\ &= 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 1 + 3x^3 - 5x^2 + x - 6 = \\ &= 4x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x - 7. \end{aligned}$$

Истиот резултат ќе го добиеме и ако во разликата (1) веднаш се ослободиме од двете загради.

2 Пресметај ја разликата на полиномите $A - B$, ако

$$A = 7ax^2 - 5a^2x + 4ax - 2a, \quad B = 5a^2x - 4ax^2 + ax - a + x.$$

ЗАДАЧИ



3 Дадени се полиномите: $A = 4x^2 + 3x - 1$, $B = 3x^2 - 2x + 3$ и $\text{C} = x^2 - 8$. Покажи дека важат законите: $A + B = B + A$, и $(A + B) + C = A + (B + C)$.

4 Изврши го означеното собирање на полиноми:

а) $(2a^2 - 3b^2 + 4ab) + (3b^2 - a^2 - ab + 3a - b)$,

б) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1) + (x^4 - x^2 + 1)$.

5 Трансформирај ја назначената разлика на полиноми во збир на полиноми:

а) $(4ab^2 - 2a^2b + ab) - (3a^2b - ab + 5a + 1)$,

б) $(6x^5 - 4x^4 + x^2 - 1) - (x^4 + 3x^3 + 2x + 1)$.

6 Изврши ги операциите со степените:

а) $x^3 \cdot x^2$, б) $x \cdot x^5$, в) $a^3 \cdot a^4 \cdot a$, г) $(x^2)^3$.

7 Запиши го во нормален вид мономот:

а) $5ab^2 \cdot (3a^2b)$, б) $-4a^3x \cdot (-2ax^2)$, в) $3abc \cdot (-ac^2)$.

III.8. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА МОНОМИ

1. Да ги помножиме мономите $3a^2b$ и $-4ab^2c$.

Бараниот производ го запишуваме $3a^2b \cdot (-4ab^2c)$.

Согласно комутативниот и асоцијативниот закон на множењето, имаме:

$$3a^2b \cdot (-4ab^2c) = 3 \cdot (-4)a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^2 \cdot c.$$

Потоа ги множиме степените со иста основа и добиваме $3a^2b \cdot (-4ab^2c) = -12a^3b^3c$.

Гледаме, производот на два монома е исто така моном.

Слично имаме и со производот на повеќе од два монома. На пример:

$$-5ab^3 \cdot 3a^3 \cdot bc^2 = -15a^4b^3 \cdot bc^2 = -15a^4b^4c^2.$$

Тоа е во согласност со правилото:

Мономи се множат, кога се помножат нивните коефициенти, а исто и степените од нивните главни вредности, што имаат еднакви основи.

1 Пресметај го производот на мономите:

а) $2x^2 \cdot (-3xy^2)$, б) $4xy \cdot 5x$, в) $-6ax^2 \cdot (-3a^2x) \cdot 4ax$.

2 Мономот $12a^3b$ да се подели со мономот $-4a$.

Бараниот количник го запишуваме: $12a^2b : (-4a)$.

Делењето на мономи ја има истата смисла како и делењето на рационалните броеви, имено: да се подели бројот a со бројот b, значи да се најде трет број c кој помножен со b да го даде бројот a, т.е. $a : b = c$, ако $b \cdot c = a$.

Во нашиов случај да се пресмета количникот $12a^3b : (-4a)$ значи да се најде таков моном М, при што да важи $M(-4a) = 12a^3b$.

Лесно воочуваме дека бараниот моном-количник М е мономот $-3a^2b$.

Навистина $-3a^2b \cdot (-4a) = 12a^3b$. Значи имаме: $12a^3b : (-4a) = -3a^2b$.

Во практика моном се дели со моном согласно правилото:

Моном се дели со моном кога, прво, коефициентот на деленикот се подели со коефициентот на делителот. Потоа, одделните степени на променливите од главната вредност на деленикот ги делиме со степените на соодветните променливи од делителот.

Степените на променливите кои се сретнуваат само во деленикот, ги пренесуваме (непроменети) во количникот.

Ако некоја променлива во деленикот и делителот има ист степен, таа променлива не влегува во количникот.

На пример: $6a^2x^3 : (3a^2x) = 2x^2$, бидејќи $2x^2 \cdot 3a^2x = 6a^2x^3$.

2 Пресметај го количникот на мономите:

а) $4a^3x : (-2a^2x)$, б) $9x^3 : (3x^2)$, в) $6a^2x^2 : (3a^2x^2)$.

Како што гледаме во горново правило ништо не се говори за следниве два случаја, кои, исто така, може да се сретнат при делењето на моном со моном, имено:

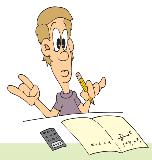
- што, кога во делителот се сретнува променлива, која ја нема во деленикот, или
- што, кога некоја променлива во деленикот има помал степенов показател од соодветниот степен на истата променлива во делителот.

Видовме дека во сите досега разгледани случаи количникот на два монома беше пак моном, но, во овие два случаја тоа не е така.

На пример, количникот $8a^2 : (4ax)$ односно $\frac{8a^2}{4ax} = \frac{3a}{x}$ не е моном. Исто така и количникот $15a^2x : (3a^2x^3) = \frac{15a^2x}{3a^2x^3} = \frac{5}{x^2}$ не е моном, бидејќи содржи делење со променлива.

Во овие два случаја количникот на мономите само го означуваме во вид на дропка, која, пак, не е моном.

ЗАДАЧИ



3 Пресметај го производот на мономи:

а) $a^3 \cdot a^2$, б) $5a^2b \cdot 3ab$, в) $-5a \cdot 2a^3b^2c$, г) $-4x^2y^2 \cdot (0{,}5ax^3)$.

4 Пресметај: а) $-8a^4b^2 \cdot \frac{3}{4}ac^2$, б) $7a^2b^2x \cdot (-4ab^2)$, в) $2a^5 \cdot b^2$.

5 Изврши го означеното делење на мономите:

а) $15a^5b^3c : (-5a^3b^3)$, б) $24a^3b^2c^3 : (8a^2b^2c^2)$, в) $-9a^4b : (ab)$, г) $1{,}2a^7c : (0{,}4a^4c)$.

6 Пресметај:

а) $0{,}5x^3y : (-0{,}04x^2y)$, б) $18ax^3 : (6ax^2)$, в) $\frac{3}{4}xy : \left(\frac{3}{5}xy\right)$.

7 Упрости ги количниците (дропките):

а) $9a^6x^2 : (-a^4xy^2)$, б) $(-25a^4bc^2) : (-10a^2b^3x)$, в) $\frac{32a^3b^2}{20a^2b^5}$, г) $\frac{-18xy^5}{-15x^3y^3}$.

8 Во кои случаи количникот на два монома не е моном?

9 Степенувај ги степените:

а) $(a^3)^2$, б) $(x^2)^4$, в) $(y^4)^2$.

III.9. **СТЕПЕНУВАЊЕ НА МОНОМИ**

Нека мономот $-3a^2x$ го степенуваме на трет степен.

Бараниот трет степен на дадениот моном $-3a^2x$ го запишуваме: $(-3a^2x)^3$. Бидејќи мономот претставува производ, затоа согласно правилото за степенување на производ, имаме:

$$(-3a^2x)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot x^3 = -27a^6x^3.$$

Бараниот степен $(-3a^2x)^3$ може да се сведе на множење на еднакви мономи:

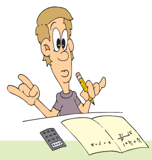
$(-3a^2x)^3 = (-3a^2x) \cdot (-3a^2x) \cdot (-3a^2x) = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot x \cdot x \cdot x = -27a^6x^3$.

Гледаме, го добивме истиот резултат. Оттука правилото:

Моном се степенува, кога секој негов множител се степенува со истиот степенов показател и добиените степени се помножат.

Пример. $(3x^3yz^2)^6 = 3^6(x^3)^6y^6(z^2)^6 = 3^6x^{3\cdot6}y^6z^{2\cdot6} = 3^6x^{18}y^6z^{12}$.

ЗАДАЧИ



1 Изврши го степенувањето на мономите:

а) $(2a^2b^3)^2$, б) $(-5ab^2)^3$, в) $(-4x^3y)^2$, г) $(ab)^3$, д) $(ax^2y)^5$.

2 Пресметај: а) $(2axy)^3$, б) $(2{,}4a^2xy)^2$, в) $(5x^2)^3$, г) $(3a^2y)^4$.

3 Кој закон е искажан со равенството: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$?

4 Пресметај го производот $(5 + 3 + 1) \cdot 4$ на два начина.

III.10. **МНОЖЕЊЕ НА ПОЛИНОМ** СО **МОНОМ**

Да го помножиме полиномот $5x^2 - 3x + 1$ со мономот $2x^3$.

Бараниот производ го означуваме:

$$(5x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3. \qquad (1)$$

Со примена на дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето, производот (1) може да го трансформираме во полином, чии членови се производи на мономи:

$(5x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3 = 5x^2 \cdot 2x^3 + (-3x) \cdot 2x^3 + 1 \cdot 2x^3 = 10x^5 - 6x^4 + 2x^3$.

Слично постапуваме и кога треба даден моном да помножиме со некој полином. Тогаш со примена на комутативниот и дистрибутивниот закон добиваме, на пример:

$$-4a \cdot (5a^2b - 2ab - 3a) = (5a^2b - 2ab + 3a) \cdot (-4a) =$$
$$= 5a^2b \cdot (-4a) + (-2ab) \cdot (-4a) + 3a \cdot (-4a) = -20a^3b + 8a^2b - 12a^2.$$

Оттука следува правилото:

Полином се множи со моном, кога секој член на полиномот се помножи со дадениот моном, а потоа добиените производи се соберат.

1 Пресметај ги означените производи:
а) $2x \cdot (3x^2 - 4x + 5)$, б) $(3x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 4) \cdot (-6x)$,
в) $(4a^3 - ab + b^2) \cdot 2ab$.

ЗАДАЧИ

2 Пресметај:
а) $(3a - 5b) \cdot 4ax^2$, б) $(7ab^2 - 3a^2b + 4ab) \cdot (-2ab^2)$.

3 Изврши ги назначените операции и упрости го изразот:
а) $5a \cdot (2a - 3b) - 4b \cdot (3a + 5b) - 2 \cdot (a - 3b) + 8ab$,
б) $2x[3y - 5(x - 2y)] - 8y[4x + 7y(x - 1)]$,
в) $5x - 2 \cdot \{1 - 4(3x - 2a + 1) - 7 \cdot [a - (6x - 3a) - 8]\}$.

4 Покажи дека вредноста на изразот не зависи од променливата x:
а) $2x \cdot (x - 3y + 1) - 4y \cdot (2x + y - 3) - x \cdot (2x - 14y + 2)$,
б) $3x \cdot (a^2 + 1) - 2a[3 - a(4x - 3)] - x(11a^2 + 3)$.

5 Реши ги равенките:
а) $2 \cdot (3x - 1) + x = 33$, б) $3y - 2 \cdot (y - 5) = 1$,
в) $5 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 2) = 9$, г) $4 \cdot (x - 3) - (2x + 1) = 5$.

III.11. МНОЖЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето и одземањето овозможува, како што ќе видиме, производот на два полинома да се трансформира во вид на полином. Да ги помножиме биномите $a + b$ и $c + d$.

Бараниот производ го означуваме

$$(a + b) \cdot (c + d).$$

Ако биномот $a + b$ го означиме со буквата M (сметајќи го како моном), тогаш бараниот производ ќе гласи

$$M \cdot (c + d).$$

Согласно дистрибутивниот закон го добиваме равенството

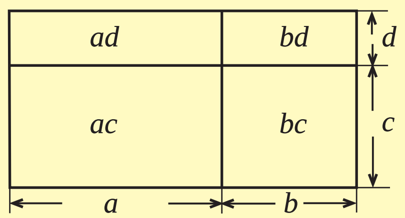
$$M \cdot (c + d) = Mc + Md. \qquad (1)$$

Заменувајќи во равенството (1) наместо M биномот $a + b$, ќе добиеме ново равенство:

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d. \qquad (2)$$

Како што гледаме првиот бином $a + b$ треба да го помножиме со секој член на вториот бином $c + d$. Ако тоа множење го извршиме, ќе добиеме конечно:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd. \qquad (3)$$



Црт. 1

На цртежот 1 дадена е геометриска илустрација на равенството (3).

Според тоа ќе важи правилото:

Полином се множи со полином, кога секој член од едниот полином се помножи поодделно со секој член од другиот полином, а потоа добиените производи се соберат.

Ова правило во практика може да се применува на два начина: 1. Со секој член од множителот да се помножи секој член на множеникот, или 2. со секој член на множеникот да се помножи секој член на множителот. Ние ќе го користиме првиот начин. На пример:

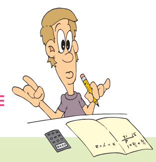
При пресметувањето на производот $(2x^3 - x^2y + 3xy^2 - 5y^3) \cdot (x^2 - 3xy + 2y^2)$ најпрво со првиот член на множителот (x^2) го множиме по ред секој член од множеникот, потоа со вториот член на множителот ($-3xy$) пак, го множиме, по ред секој член на множеникот итн. Така добиваме:

$$(2x^3 - x^2y + 3xy^2 - 5y^3) \cdot (x^2 - 3xy + 2y^2) =$$
$$= 2x^3 \cdot x^2 - x^2y \cdot x^2 + 3xy^2 \cdot x^2 - 5y^3 \cdot x^2 + 2x^3 \cdot (-3xy) - x^2y \cdot (-3xy) + 3xy^2 \cdot (-3xy) -$$
$$5y^3 \cdot (-3xy) + 2x^3 \cdot 2y^2 - x^2y \cdot 2y^2 + 3xy^2 \cdot 2y^2 - 5y^3 \cdot 2y^2 =$$
$$= 2x^5 - x^4y + 3x^3y^2 - 5x^2y^3 - 6x^4y + 3x^3y^2 - 9x^2y^3 + 15xy^4 + 4x^3y^2 - 2x^2y^3 + 6xy^4 - 10y^5.$$

На крајот вршиме сведување на сличните членови (ако има такви), па производот во нормален вид ќе гласи:

$$(2x^3 - x^2y + 3xy^2 - 5y^3) \cdot (x^2 - 3xy + 2y^2) = 2x^5 - 7x^4y + 10x^3y^2 - 16x^2y^3 + 21xy^4 - 10y^5 .$$

ЗАДАЧИ



1 Пресметај ги производите:

а) $(2a - 3b) \cdot (a - 5b)$, б) $(6x^2 - 2x + 3) \cdot (x - 1)$, в) $(7x^2y - 5xy + 4y^2) \cdot (2x - y)$.

2 Изврши ги назначените операции:

а) $(a - 3) \cdot (a + 5) - (a - 4) \cdot (a + 1) + (2a - 3) \cdot (-4a)$,

б) $(x^2 + 3x - 1) \cdot (2x + 1) - 5x \cdot [2 - (x - 1) \cdot (3x + 2)]$.

3 Дадени се биномите: $A = 2x - 1$, $B = 2x + 1$, $C = 3x + 2$. Пресметај:

а) AB, б) AC, в) BC, г) ABC, д) $AB(-C)$.

4 Пресметај го изразот:

а) $AB + C$, б) $(A - B) \cdot C$, в) $(A + B) \cdot (A - C)$, г) $A - BC$,
ако $A = x + 2y$, $B = x - y$ и $C = 3xy$.

5 Во една овошна градина имало a реда по b овошни дрвја во секој ред. Колку дрвја имало повеќе во друга градина, во која имало 15 реда повеќе, но по 3 дрвја помалку во секој ред, отколку во првата градина. Одреди го бројот на дрвјата за $a = 30$, $b = 38$.

6 Докажи дека вредноста на изразот $x^2 - (x - 3) \cdot (x + 3)$ не зависи од променливата x.

7 Покажи дека важи равенството:

а) $(a^2 + ab + b^2) \cdot (a - b) = a^3 - b^3$, б) $(a^2 - ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + b^3$.

III.12. **ФОРМУЛИ ЗА** СКРАТЕНО **МНОЖЕЊЕ**

Во оваа лекција ќе се запознаеме со трансформацијата на некои изрази во полиноми, со кои многу често се сретнуваме во практиката. За нив ќе изведеме посебни формули, со чија помош многу полесно се изведува таа трансформација. Таквите формули се викаат **формули за скратено множење**. Нив ги има многу, но ние ќе се задржиме само на две.

Тие формули ќе ги користиме и подоцна при обратната трансформација: разложување на полиномите на множители.

III.12.1. **Производ од збир и разлика на два монома**

Нека A и B се два неслични монома. Тогаш нивен збир е биномот $A + B$, а нивна разлика биномот $A - B$.

Да го претставиме во вид на полином производот од збирот и разликата на мономите A и B. Бараниот производ ќе биде:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2,$$

т.е. важи формулата

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2. \qquad (1)$$

Изразот $A^2 - B^2$ се вика **разлика на квадрати** на мономите A и B. Според тоа:

Производот од збирот и разликата на два монома е еднаков на разликата на нивните квадрати.

На пример:

а) $(2x + 3y) \cdot (2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$,

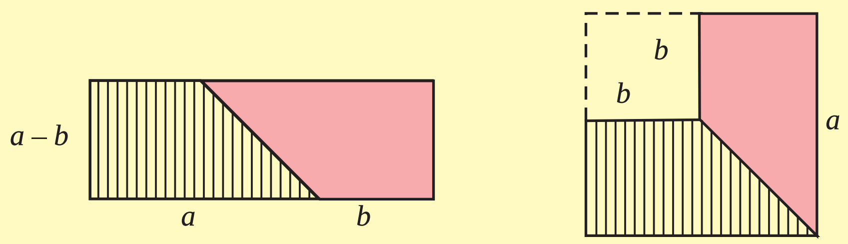
б) $(5ab^2 + 4c^2) \cdot (5ab^2 - 4c^2) = (5ab^2)^2 - (4c^2)^2 = 25a^2b^4 - 16c^4$,

в) $58 \cdot 62 = (60 - 2) \cdot (60 + 2) = 60^2 - 2^2 = 3600 - 4 = 3596$.

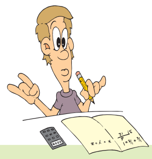
1 Пресметај го производот:

а) $(x + 3y) \cdot (x - 3y)$, б) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$, в) $(5 + 3a) \cdot (5 - 3a)$.

Производот од збир и разлика на два броја a и b, ако $a>b>0$ може и геометриски да се илустрира (црт. 2).



Црт. 2



ЗАДАЧИ

2 Пресметај: а) $(1 + 3x) \cdot (1 - 3x)$, б) $\left(\frac{1}{2}xy+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}xy-1\right)$.

3 Упрости го изразот:
а) $(a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2)$, б) $(3a + b) \cdot (3a - b) - 9a\cdot (a - 3)$.

4 Реши ја равенката $(2x - 1) \cdot (2x + 1) - (4x^2 - 3x + 5) = 0$.

5 Трансформирај го изразот во вид на полином во нормален вид:
а) $(a - 2) \cdot (a + 2) \cdot (a^2 + 4)$, б) $x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5)$, в) $(3 - x) \cdot (3 + x) \cdot (9 + x^2)$.

6 Пресметај ги производите:
а) $97 \cdot 103$, б) $201 \cdot 199$, в) $1,05 \cdot 0,95$, г) $63 \cdot 57$, на наједноставен начин.

7 Страната на еден квадрат е x cm. Ако неговата должина се зголеми за 3 cm, а неговата ширина се намали за 3 cm, ќе се добие правоаголник. Одреди ја разликата од плоштините на квадратот и правоаголникот. Кој има поголема плоштина?

8 Трансформирај го производот на биномите во полином:
а) $(a + b) \cdot (a + b)$, б) $(2a - b) \cdot (2a - b)$, в) $(3x + 2y)^2$.

III.12.2. **Квадрат на бином**

Нека се дадени два неслични монома A и B. Изразот $(A + B)^2$ се вика **квадрат на биномот** $A + B$.

Согласно дефиницијата на квадрат и правилото за множење на полиноми, за изразот $(A + B)^2$, добиваме:

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Значи, квадратот на бином го одредуваме согласно формулата

$$\boxed{(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.} \qquad (2)$$

Според тоа:

Квадратот на бином е еднаков на збирот од квадратот на првиот член, удвоениот производ на првиот и вториот член и квадратот на вториот член.

На пример:

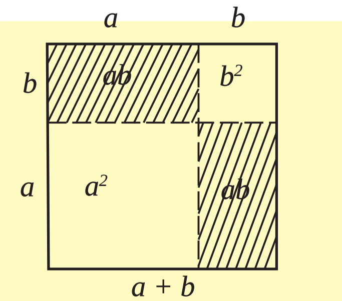
а) $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$,

б) $(x - 2y)^2 = [x + (-2y)]^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-2y) + (-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$,

в) $(-5 - 4a)^2 = (-5)^2 + 2 \cdot (-5) \cdot (-4a) + (-4a)^2 = 25 + 40a + 16a^2$.

Пресметувањето на квадратот на бином можеме и пократко, без записот на одделните чекори, директно да го одредиме.

На пример: $(5x - 3)^2 = 25x^2 - 30x + 9$.



Црт. 3

1 Со користење на формулата за квадрат на бином, пресметај:

а) $(a + 4)^2$, б) $(7 - y)^2$, в) $(-3 + y)^2$, г) $(-x - 1)^2$.

Формулата за квадрат на бином $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, каде $a>0$ и $b>0$, геометриски е илустрирана на црт. 3. Образложи!

Да изведеме формула за квадрат на разлика на два монома A и B. Користејќи ја формулата (2) добиваме

$(A - B)^2 = (A + (-B))^2 = A^2 + 2A(-B) + (-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, т.е.

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \qquad (3)$$

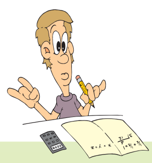
Да напоменеме дека ако треба да се пресмета на пример $(2a - 3b)^2$, можеме да решаваме на два начина: да замениме $A = 2a$ и $B = -3b$, а потоа да ја примениме формулата (2), или пак да замениме $A = 2a$ и $B = 3b$, а потоа да ја примениме формулата (3). Резултатот е ист и во двата случаја.

Обиди се да го искажеш со зборови правилото (3).

Двете равенства (2) и (3) можеме со една формула да ги запишиме на следниот начин:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2.$$

ЗАДАЧИ



2 Трансформирај ги изразите во полиноми:

а) $(x + 2)^2 - (x - 2) \cdot (x + 2)$, б) $(3x - 2y)^2 - (5x + y) \cdot (5x - y)$,

в) $(x + 3y)^2 - 4(2x - y)^2 + 5xy$.

3 Упрости ги изразите:

а) $(2x - 1) \cdot (2x + 1) - (2x - 1)^2$, б) $(c - x + 2) \cdot (c - x - 2)$.

4 Докажи дека важат равенствата:

а) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, б) $(x - y)^2 = (y - x)^2$, в) $(-x - y)^2 = (x + y)^2$.

5 Со помош на формулата за квадрат на бином пресметај ги квадратите:

а) 41^2, б) 23^2, в) 101^2, г) 99^2, д) 68^2.

6 Со помош на формулата за квадрат на бином изведи формула квадрат на трином $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2$.

7 Даден е триномот $x^2 - 3x + 2$. Изврши замена на променливата со $x = y - 1$ и трансформирај го добиениот трином во нормален вид.

8 Кое својство на количникот го означува равенството:

$$(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d\ ?$$

9 Пресметај ја на два начина бројната вредност на изразот:

а) $(48 - 18) : 6$, б) $(63 + 21) : 7$.

III.13. **ДЕЛЕЊЕ** НА **ПОЛИНОМ** СО **МОНОМ**

Полиномот $8x^3 + 12x^2$ да го поделиме со мономот $4x$.

Бараниот количник го означуваме $(8x^3 + 12x^2) : 4x$.

Врз основа на дистрибутивниот закон на делењето во однос на собирањето, добиваме:

$(8x^3 + 12x^2) : 4x = 8x^3 : 4x + 12x^2 : 4x = 2x^2 + 3x$.

Проверка: $(2x^2 + 3x) \cdot 4x = 8x^3 + 12x^2$. Според тоа, важи правилото:

Полином се дели со моном, кога секој член на полиномот се подели со мономот и добиените количници се соберат.

На пример:

$$(15x^5y - 9x^4 + 12x^3y^2) : (-3x^3) =$$
$$= 15x^5y : (-3x^3) - 9x^4 : (-3x^3) + 12x^3y^2 : (-3x^3) = -5x^2y + 3x - 4y^2.$$

Очигледно е дека, даден полином за да биде делив со даден моном, потребно е секој член на полиномот да биде делив со мономот.

Знаеме во кои случаи два монома не се деливи, но како ќе познаеме кога даден полином не е делив со даден моном.

Даден полином не е делив со даден моном:

- кога делителот - (мономот) содржи некоја променлива, која не се содржи барем во еден од членовите на полиномот, или
- кога некоја променлива во мономот има поголем показател од показателот на соодветниот степен на таа променлива барем во еден член на полиномот.

Бараниот количник во такви случаи само го означуваме и претставува дропка, чиј именител содржи променлива, т.е. не е полином.

На пример, такви се количниците: $\dfrac{5a+b}{a}$, $\dfrac{a^2-3b+2ab^2}{5ab}$.

ЗАДАЧИ

1. Како се дели полином со моном? Покажи го тоа на примерот:
$(18a^3b^4x - 12a^4b^2 + 6a^2b^3c) : 3a^2b^2$.

2. Изврши го означеното делење:
а) $(20x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 5x) : 5x$, б) $(14a^5 - 21a^4 + 35a^3 - 7a^2) : (-7a^2)$.

3. Пресметај го количникот:
а) $(8x^2y^2 - 12x^2y + 20x^4y^3) : (4x^2y)$,
б) $(0{,}5x^8y^5 - 0{,}8x^5y^4 + 3x^4y^5 - x^3y^3) : (-2x^3y^3)$,
в) $(9a^5b^3 - 10a^3b^2 - 12a^4b^4 + a^3b) : (-5a^3b)$.

4. Изврши ги назначените операции:
а) $(8a^5 - 4a^4) : 2a^3 - (12a^4 - 9a^3) : (-3a^3)$, б) $5ax - 3a[2x - (9a^2x - 6ax^2) : (3ax)]$.

5. Објасни зошто следниве количници не се полиноми:
а) $(2a - b) : (5ab)$, б) $(4ab - 3a^2 + b^2) : (2ab)$, в) $(8x - 5a) : (3a^2)$.

6. Пресметај ги количниците: а) $6345 : 15$, б) $25984 : 112$.

III.14. **ДЕЛЕЊЕ** НА **ПОЛИНОМ** СО **ПОЛИНОМ**

1. Постапката за одредување на количникот на броевите 651 и 21 запишана е лево во позициона форма, а десно во полиномна форма:

$$\begin{array}{l} 651 : 21 = 31 \\ \underline{-63} \\ \;\;21 \\ \underline{-21} \\ \;\;\;0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (6\cdot10^2 + 5\cdot10 + 1) : (2\cdot10 + 1) = 3\cdot10 + 1 \\ \underline{\pm 6\cdot10^2 \pm 3\cdot10} \\ \qquad\quad 2\cdot10 + 1 \\ \qquad\quad \underline{\pm 2\cdot10 + 1} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Од делењето на броевите 651 и 21 во полиномна форма заклучуваме дека првиот член во количникот се добива кога првиот член на деленикот се подели со првиот член на делителот: $(6 \cdot 10^2) : (2 \cdot 10) = 3 \cdot 10$. Аналогно се одредува и вториот член на количникот, кога првиот член на остатокот се подели со првиот член на делителот: $(2 \cdot 10) : (2 \cdot 10) = 1$.

При одземањето се користи правилото, дека кон намаленикот се додаде намалителот со спротивни знаци.

Ова правило се пренесува да важи и кај делењето на полиноми.

$$
\begin{array}{l}
(6x^2+5x+1):(2x+1)=3x+1 \\
\underline{\pm 6x^2 \pm 3x} \\
\qquad\quad 2x+1 \\
\qquad\quad \underline{\pm 2x \pm 1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(6x^2):(2x)=3x \\
(2x):(2x)=1
\end{array}
$$

Друг пример:

$$
\begin{array}{l}
(24x^5+6x^4y+4x^3y^2-2x^2y^3-4xy^4):(3x^2-y^2)=8x^3+2x^2y+4xy^2 \\
\underline{\pm 24x^5 \qquad \mp 8x^3y^2} \\
\qquad 6x^4y+12x^3y^2-2x^2y^3 \\
\qquad \underline{\pm 6x^4y \qquad \mp 2x^2y^3} \\
\qquad\qquad 12x^3y^2 \qquad -4xy^4 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 12x^3y^2 \qquad \mp 4xy^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(24x^5):(3x^2)=8x^3 \\
(6x^4y):(3x^2)=2x^2y \\
(12x^3y^2):(3x^2)=4xy^2
\end{array}
$$

Да забележиме дека, полиномите (деленикот и делителот) ако не се подредени, треба претходно да се подредат по опаѓачките степени на една иста променлива. Во нашиов случај тие се подредени по степените на променливата x.

1 Изврши го делењето на полиномите:

а) $(x^4+x^2+1):(x^2+x+1)$, б) $(3x^5-8x^4+8x^3-5x^2+3x-1):(x^2-2x+1)$.

2 Количникот при делењето на полином со полином, само во ретки случаи може да се изрази во полином. Во општ случај, при делењето на полином со полином добиваме полином неполн количник и полином-остаток. Притоа, степенот на полиномот-остаток е понизок од степенот на полиномот-делител.

На пример, при делењето на полиномите:

$$
\begin{array}{l}
(5x^3-6x^2+10x+7):(x^2-2x+3)=5x+4 \\
\underline{\pm 5x^3 \mp 10x^2 \pm 15x} \\
\qquad 4x^2 \;-5x \;+\;7 \\
\qquad \underline{\pm 4x^2 \;\mp 8x \pm 12} \\
\qquad\qquad 3x \;-5
\end{array}
$$

Добиваме неполн количник $q(x)=5x+4$ и остаток $r(x)=3x-5$. Притоа запишуваме

$5x^3 - 6x^2 + 10x + 7) : (x^2 - 2x + 3) = 5x + 4 + \dfrac{3x-5}{x^2-2x+3}$, односно

$5x^3 - 6x^2 + 10x + 7 = (x^2 - 2x + 3) \cdot (5x + 4) + 3x - 5.$

Делењето на два полинома со остаток е секогаш можно и притоа:

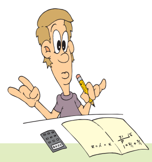
Да се подели полином $A(x)$ со полином $B(x)$ значи да се одредат два полинома: полином-количник $q(x)$ и полином-остаток $r(x)$, така што да важи равенството $A(x) = B(x)q(x) + r(x)$ и степенот на $r(x)$ да е понизок од степенот на $q(x)$ или остатокот да е нула.

2 Одреди го полиномот-неполн количник и полиномот-остаток при делењето

$$(2x^3 + x^2 + 2x + 1) : (x^2 - x + 2).$$

Формулите за скратено множење може да се применуваат и при делењето на полиноми. На пример, од формулата $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$ следува дека $(x^2 - y^2) : (x + y) = x - y$ или $(x^2 - y^2) : (x - y) = x + y$.

ЗАДАЧИ



3 Изврши го означеното делење на полиномите:

а) $(6x^2 + 8xy - 8y^2) : (3x - 2y)$, б) $(12ab - 16a + 9b - 12) : (3b - 4)$.

4 Прво, подреди ги полиномите, а потоа изврши го делењето:

а) $(-3x - 3x^2 + 2x^3 + 2) : (2 - x)$, б) $(4ab - 4b^2 + 35a^2) : (2b + 5a)$.

5 Изврши го означеното делење на полиномите со остаток:

а) $(15x^2 - 4x + 4) : (3x - 2)$, б) $(a^4 + a^3 + 7a^2 + 3a + 25) : (2a^2 + 3a + 5)$.

6 Што се добива, ако разликата на квадратите на два броја се подели со:

а) збирот, б) разликата на тие броеви?

7 Ако разликата на трицифрените броеви $\overline{xyz} - \overline{zyx}$ се подели со разликата $x - z$ се добива количник, што не зависи од изборот на трицифрениот број $\overline{xyz}$. Докажи.

8 Кој израз треба да стои на празното место за да важи равенството:

а) $6x^2 + 3x = (...) \cdot (2x + 1)$, б) $7x \cdot (...) = 35x^2 + 14x$.

9 Полиномот $24a^4 - 48a^3 - 4a^2 + 35a - 2$ претстави го како производ од два полинома, така што едниот од нив да биде $2a^2 - a - 2$.

III.15. **ВИДОВИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ**

Досега работевме со изрази во кои променливите се сврзани само со операциите: собирање, одземање, множење и степенување со показател природен број (специјален случај на множење) и ги нарековме **полиноми**.

Изразите со променливи ги викаме уште и **алгебарски изрази**. Според тоа, полиномите се еден специјален вид на алгебарски изрази. Алгебарски изрази имаме различни, нив ги делиме на видови, според тоа, кои алгебарски операции со променливите се застапени во нив.

Сите познати до сега алгебарски операции ги делиме на **рационални** и **ирационални операции**. Операциите: **собирање**, **одземање**, **множење**, **делење** и **степенување со показател природен број** се **рационални операции**, а операцијата **коренување** е **ирационална операција**. Затоа, алгебарските изрази во кои се застапени, само рационални операции со променливите се викаат **рационални алгебарски изрази**, а изрази во кои е застапена (покрај другите) и операцијата коренување на некоја променлива, се викаат **ирационални алгебарски изрази**. На пример, од изразите:

$$4x^2y,\quad x^2+3,\quad \frac{2}{5}x\cdot y^2-3xy,\quad \frac{x-5}{4x},\quad \sqrt{x}+y$$

првите четири изрази се рационални изрази, а петтиот е ирационален израз.

Во зависност од тоа: дали во рационалниот израз се содржи или не се содржи делење со променлива, или делење со израз со променлива, рационалните изрази ги делиме на **цели рационални** и **дробни рационални изрази**.

Според тоа ги усвојуваме дефинициите:

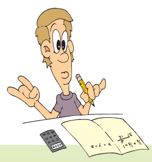
Дефиниција 1. **Рационален алгебарски израз, кој не содржи делење со променлива или делење со израз кој содржи променлива, се вика цел рационален израз или полином.**

Дефиниција 2. **Рационален алгебарски израз, кој содржи делење со променлива или делење со израз кој содржи променлива, се вика дробен рационален израз.**

На пример, дробни рационални изрази се изразите:

$$\frac{x^2+2x-3}{5x-2},\quad \frac{x}{y}(2y-3x),\quad \frac{7}{2-x}.$$

ЗАДАЧИ



1 Одреди кои од следниве рационални изрази се цели, а кои дробни рационални изрази:

а) $6-5xy$, б) $\frac{5x-y}{x-1}$, в) $\frac{3x^2-xy+5}{14}$, г) $\frac{x}{y}-2y$.

2 Запиши сам три алгебарски изрази, кои не се рационални.

3 Одреди ја дефиниционата област на дробниот рационален израз:

а) $\frac{5}{x-y}$, б) $3x+\frac{1}{x}$, в) $\frac{x+y}{x-3}$.

4 Скрати ги дропките:

а) $\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$, б) $\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$, в) $\frac{1-a^2}{(a-1)^2}$.

III.16. РАЗЛОЖУВАЊЕ ПОЛИНОМИ НА ПРОСТИ МНОЖИТЕЛИ

Досега најмногу се задржавме на трансформацијата на целите рационални изрази во полиноми во нормален вид. На пример, научивме како производот на два полинома да го трансформираме во полином во нормален вид. Меѓутоа, непомалку важна е и обратната трансформација: даден полином да се трансформира во производ од моном и полином, или во производ на два полинома. Таа трансформација на полиномите се вика **разложување полиноми на множители**.

Разложувањето на полиномите на множители е многу слична на разложувањето на целите броеви на прости множители. Познато е дека, не секој цел број може да се разложи на множители. Исто така, и не секој полином може да се разложи на множители. На пример, биномот $x + y$ не може да се разложи на множители во множеството на целите рационални изрази.

Секој цел рационален израз, кој не може да се разложи на множители се вика **прост** или **неразложлив**, а во спротивен случај изразот се вика **сложен**.

Постојат различни начини на разложување на полиномите на прости множители, што ги применуваме од еден до друг случај.

III.16.1. Разложување со извлекување на заедничките множители пред заграда

1 Овој начин на разложување на полиномите на множители се заснова врз дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето. Така, од равенството $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ со промена на неговите страни, добиваме: $a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$. Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Да се разложи на множители триномот

$$16x^3y + 12x^2y^2 - 8x^2yz.$$

Решение. Прво го наоѓаме најголемиот заеднички делител за коефициентите на триномот. Во нашиот случај НЗД (16, 12, 8) = 4. Потоа гледаме: променливата x се содржи и во трите членови и тоа со најнизок степенов показател 2 (во вториот и третиот член), променливата y се содржи, исто така, во трите членови и тоа со најнизок степенов показател 1 (во првиот и третиот член). Променливата z не ја разгледуваме, бидејќи не ја содржат сите членови. На тој начин наоѓаме, мономот-најголем заеднички множител (делител) на сите членови на дадениот трином, ќе биде: $4x^2y$.

Потоа дадениот полином го делиме со мономот $4x^2y$, а добиениот полином-количник го затвораме во заграда. Така добиваме:

$$16x^3y + 12x^2y^2 - 8x^2yz = 4x^2y \cdot 4x + 4x^2y \cdot 3y + 4x^2y \cdot (-2z) = 4x^2y \cdot (4x + 3y - 2z).$$

Пример 2. Да се разложи на множители биномот $15x^3 - 5x^2$.

Решение. Гледаме дека заеднички множител за двата члена е мономот $5x^2$. Извлекувајќи го тој множител пред заграда добиваме:

$$15x^3 - 5x^2 = 5x^2 \cdot 3x - 5x^2 = 5x^2(3x - 1).$$

Да забележиме дека, полиномот што се добива во заградата мора да има исто толку членови, колку што има и дадениот полином. Ние тука пред заграда извлековме $5x^2$, но можевме да извлечеме и множител: x^2, $-x^2$, $-5x^2$, $-15x^2$, $10x^2$ итн. На пример, ако пред заграда извлечеме $-15x^2$, добиваме:

$$15x^3 - 5x^2 = -15x^2 \cdot (-x) + (-15x^2) \cdot \frac{1}{3} = -15x^2 \cdot (-x + \frac{1}{3}).$$

Пример 3. Да се разложи на множители изразот $3a \cdot (x - y) + b \cdot (y - x)$.

Решение. Забележуваме множителите $x - y$ и $y - x$ се спротивни биноми, т.е. $y - x = -(x - y)$. Ако производот $b \cdot (y - x)$ го замениме со нему идентичниот израз $-b \cdot (x - y)$, добиваме:

$$3a \cdot (x - y) + b \cdot (y - x) = 3a \cdot (x - y) - b \cdot (x - y).$$

Потоа со извлекување на заедничкиот множител $(x - y)$ пред заграда, добиваме:

$$3a \cdot (x - y) + b \cdot (y - x) = 3a \cdot (x - y) - b \cdot (x - y) = (x - y) \cdot (3a - b).$$

1 Извлечи го заедничкиот множител пред заграда:

а) $8ab + 12ac$, б) $2a^2 - 6a$, в) $x^3 - x^2y$.

Пример 4. Да се скрати дропката $\frac{x^2 + ax}{5x + 5a}$.

Решение. Го разложуваме на множители броителот и именителот на дропката: $\frac{x(x+a)}{5(x+a)}$. Забележуваме, биномот $x + a$ е заеднички множител на броителот и именителот на дропката.

Со тој множител, ако $x + a \neq 0$, може да се скрати дропката, па добиваме:

$$\frac{x^2 + ax}{5x + 5a} = \frac{x(x+a)}{5(x+a)} = \frac{x}{5}.$$

2 При решавање на равенките често се стремиме левата нејзина страна да ја претставиме во вид на производ од два или неколку полиноми (меѓу кои може да има и мономи), а десната страна да е нула. На пример да ја решиме равенката $(3x - 6) \cdot (5 - x) = 0$.

Гледаме, левата страна е производ од два множитела, а десната страна е нула. Познато ни е дека, производот на два или неколку множители е еднаков на нула, само ако барем еден од множителите е нула. Тоа значи, дадената равенка ќе биде задоволена само за вредностите на променливата x, за која важи

$$3x - 6 = 0, \text{ односно } 5 - x = 0,$$

или со други зборови: секое решение на равенката $3x - 6 = 0$ е решение и на дадената равенка, а и секое решение на равенката $5 - x = 0$ е, исто така, решение на дадената равенка

$$(3x - 6) \cdot (5 - x) = 0.$$

Значи, множеството решенија на дадената равенка е унијата од множествата решенија на простите равенки $3x - 6 = 0$ и $5 - x = 0$.

Ја решаваме првата равенка $3x - 6 = 0$, $x = 2$. Гледаме, таа има едно решение $x = 2$. Ја решаваме втората равенка $5 - x = 0$, $x = 5$. И втората равенка има едно решение $x = 5$. Според тоа, дадената равенка има множество решенија $M = \{2,5\}$.

ЗАДАЧИ

3 Извлечи ги заедничките множители пред заграда:

а) $3x - 3$, б) $2a^2 - ab$, в) $a^3 - a^2$, г) $3ax - 9ay$, д) $-2a + 5ab$, ѓ) $12ax - 15ay$, е) $a^2x^2 - ax^3$.

4 Разложи ги полиномите на множители:

а) $xy^2 - 5xy - x^2y$, б) $12x^3y^2 - 18x^2y + 6x^2y^2 + 30x^4y$, в) $6a^4c^2 - 8a^2c^3 + 16a^3c$.

5 Претстави го изразот во вид на производ од два множитела:

а) $a \cdot (b - c) + c \cdot (b - c)$, б) $a \cdot (x - y) - b \cdot (y - x)$, в) $(x - 3)^2 - (3 - x)$.

6 Скрати ги дропките: а) $\frac{x+y}{3x+3y}$, б) $\frac{2a+2b}{(a+b)^2}$, в) $\frac{(x-4)^2}{28-7x}$.

7 Докажи дека, бројот:

а) $38^6 - 38^5$ е делив со 37, б) $34^9 + 34^8$ е делив со 35.

8 Реши ги ги равенките:

а) $5x \cdot (2x - 1) = 0$, б) $(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$,
в) $x + 4 - 2x \cdot (x + 4) = 0$, г) $x \cdot (x - 1) + 5 \cdot (1 - x) = 0$.

9 Одреди ги производите:

а) $(3x - y) \cdot (3x + y)$, б) $(a - x) \cdot (a + x)$.

10 Мономот: а) $16x^4y^2$, б) $25x^2y^6$, в) $4a^2$.

претстави го како квадрат на некој друг моном.

III.16.2. **Разложување на полиноми од видот A^2 - B^2**

Познато ни е равенството

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2. \qquad (1)$$

Со промена на местата на левата и десната страна го добиваме идентичното равенство

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B). \qquad (2)$$

Значи: **Разликата од квадратите на два израза е еднаква на производот од разликата на тие изрази и нивниот збир**.

Формулата (2) е згодна при разложувањето на биномите од видот $A^2 - B^2$. Еве неколку примери:

Пример 1. Да се разложи на множители биномот $4x^2 - 9$.

Решение. Гледаме дека, дадениот бином претставува разлика од квадратите $(2x)^2$ и 3^2, чии основи се $2x$ и 3.

Со примена на формулата (2), добиваме:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3) \cdot (2x + 3).$$

Пример 2. Да се разложи на множители биномот

$$25a^2b^2 - 49c^2.$$

Решение. $25a^2b^2 - 49c^2 = (5ab)^2 - (7c)^2 = (5ab - 7c) \cdot (5ab + 7c).$

1 Разложи ги биномите на множители: а) $x^2 - y^2$, б) $a^2 - 1$, в) $9x^2 - 25$.

Пример 3. Да се разложи на множители

$$12x^3 - 3xy^2.$$

Решение. Членовите на овој бином не може да се претставаат како квадрати на некои изрази, но забележуваме дека и двата члена на биномот имаат заеднички множител $3x$. Со негово извлекување пред заграда, добиваме:

$$12x^3 - 3xy^2 = 3x \cdot (4x^2 - y^2).$$

Со тоа дадениот бином е разложен на множители. Меѓутоа, забележуваме биномот множител $4x^2 - y^2$ е разлика на квадрати. Затоа тој не е прост израз, со негово разложување согласно формулата (2), конечно добиваме:

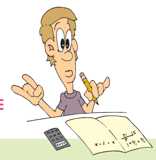
$$12x^3 - 3xy^2 = 3x \cdot (4x^2 - y^2) = 3x \cdot (2x - y) \cdot (2x + y).$$

Овој пример покажува дека разложувањето на некој полином треба секогаш да го отпочнеме со извлекување на заедничките множители пред заграда (ако тоа е можно), па дури потоа да се оди со примена на некоја од формулите за скратено множење.

Пример 4. Да се разложи на множители изразот $(a + 1)^2 - b^2$.

Решение. $(a + 1)^2 - b^2 = [(a + 1) - b][(a + 1) + b] = (a - b + 1) \cdot (a + b + 1).$

ЗАДАЧИ



Разложи ги следниве биноми на множители.

2 а) $9x^2y^2 - 1$, б) $a^2 - 16^2b^2\mathrm{c}^2$, в) $49x^2 - 36y^2$.

3 а) $100 - 9a^{:2}$, б) $25x^2 - \frac{4}{9}$, в) $x^2y^2 - \frac{9}{16}$.

4 а) $(x - y)^2 - 1$, б) $(1 - x)^2 - 4x^2$, в) $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$.

Разложи ги следниве изрази на прости множители:

5 а) $5x^2 - 20y^2$, б) $x^4y^2 - x^2y^4$, в) $5x^3 - 5xy^2$.

6 а) $x^4 - x^2y^2$, б) $a^4 - a^2b^2$, в) $27ab^2 - 3ac^2$.

7 а) $a^5 - a^3$, б) $3a^2 - 3b^2$, в) $8ax^2 - 2a$.

8 Пресметај: а) $58^2 - 48^2$, б) $131^2 - 69^2$, в) $\left(7\frac{2}{3}\right)^2 - \left(6\frac{1}{3}\right)^2$.

9 Реши ги равенките: а) $x^2 = 121$, б) $x^2 - 3x = 0$.

10 Скрати ги дропките: а) $\dfrac{x^2-6x}{x^2-36}$, б) $\dfrac{9-3a}{a^2-9}$, в) $\dfrac{1-x^2}{x-1}$.

11 Докажи дека, за кој било $n \in N$ вредноста на изразот:
а) $(n+11)^2-n^2$ е делива со 11, б) $(4n+7)^2-1$ е делива со 4.

III.16.3. **Разложување на триноми од видот $A^2 \pm 2AB + B^2$**

Равенството за квадрат на бином

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \qquad (3)$$

со промена на местата на левата и десната страна, го добива видот:

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2. \qquad (4)$$

Равенството (3), односно (4) запишано во овој вид погодно е да се применува за трансформација на триномот $A^2 + 2AB + B^2$ во квадрат на бином. Да го покажеме тоа на примери:

Пример 1. Триномот $9x^2 + 24x + 16$ да се разложи на два еднакви множитела, односно во квадрат на некој бином.

Решение. Гледаме, два од неговите три члена можеме да ги претставиме како квадрати на некои изрази. Тоа се членовите $9x^2 = (3x)^2$ и $16 = 4^2$, а третиот член на триномот $24x$ проверуваме дали е удвоен производ од тие изрази, т.е.

$$24x = 2 \cdot 3x \cdot 4.$$

Тогаш согласно равенството (4) дадениот трином го трансформираме:

$$9x^2 + 24x + 16 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = (3x+4)^2.$$

Пример 2. Триномот $25x^4 - 20x^2y + 4y^2$ да се претстави како квадрат на бином.

Решение. Бидејќи два негови члена се квадрати на мономи:

$$25x^4 = (5x^2)^2 \text{ и } 4y^2 = (2y)^2,$$

останува уште да провериме дали третиот негов член $-20x^2y^2$ е удвоен производ од мономите $5x^2$ и $-2y$. Навистина важи $-20x^2y = 2 \cdot 5x^2 \cdot (-2y)$.

Значи, може да запишеме

$$25x^4 - 20x^2y + 4y^2 = (5x^2 - 2y)^2.$$

1 Трансформирај го триномот во вид на квадрат на бином:
а) $x^2 - 8x + 16$, б) $1 + 10y + 25y^2$, в) $y^2 - 2y + 1$.

Пример 3. Да се разложи триномот $x^2 + 6x + 8$ на множители.

Решение. Дадениот трином не може да се претстави како квадрат на бином.

Навистина, имаме еден член квадрат x^2, потоа членот $6x$ може да се претстави како удвоен производ од x и бројот 3, но бројот 8 не е квадрат на бројот 3.

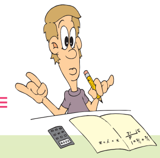
Ако собирокот 8 го замениме со разликата $8 = 9 - 1$, тогаш дадениот трином ќе го добие видот:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 1 = (x+3)^2 - 1.$$

Оваа трансформација на дадениот трином се вика **издвојување на квадрат од бином** во него. Меѓутоа, добиениот израз може да го разгледуваме и како разлика на квадрати, па да продлжиме:

$$x^2 + 6x + 8 = \ldots = (x+3)^2 - 1^2 = [(x+3)-1][(x+3)+1] = (x+2) \cdot (x+4).$$

ЗАДАЧИ



Разложи ги триномите на множители:

2 а) $x^2 + 4x + 4$, б) $a^2 - 2ab + b^2$, в) $9x^2 + 6x + 1$.

3 а) $4x^2 + 12x + 9$, б) $a^2 - 2a + 1$, в) $16a^2 + 24ab + 9b^2$.

4 а) $4a^2 + 4ab + b^2$, б) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$, в) $ax^2 + 2ax + a$.

5 На местото на ѕвездичката стави таков член за да се добие израз, кој ќе може да се запише како квадрат на бином:
а) $a^2 + 10a + *$, б) $x^2 - * + 25$, в) $* - 42ab + 49b^2$.

6 Пресметај ја вредноста на изразот на побрз начин:
а) $47^2 + 2 \cdot 23 \cdot 47 + 23^2$, б) $71{,}5^2 - 2 \cdot 71{,}5 \cdot 21{,}5 + 21{,}5^2$.

7 Скрати ја дропката:
а) $\frac{3ax - a}{9x^2 - 6x + 1}$, б) $\frac{9y^2 - 24y + 16}{16 - 9y^2}$.

8 Докажи дека изразот:
а) $a^2 - 6a + 9$, б) $x^2 - 10x + 25$ не може да добие негативна вредност.

9 Издвои од триномот квадрат на бином:
а) $x^2 - 14x + 48$, б) $y^2 + 8y + 15$, в) $a^2 - 8a - 1$.

10 Разложи ги на множители изразите:
а) $x^2 + 2xy + y^2 - c^2$, б) $a^2 - 2ab + b^2 - 49$, в) $x^2 - 8x + 16 - y^2$.

III.16.4. **Разложување на полиноми со групирање**

Овој начин на разложување на полиноми ќе го илустрираме со следните примери.

Пример 1. Да го разложиме полиномот $x^3 - 2x^2 + x - 2$ на множители. Групирајќи го првиот со вториот член, а третиот со четвртиот член, добиваме

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^3 - 2x^2) + (x - 2) = x^2 \cdot (x - 2) + (x - 2) = (x - 2) \cdot (x^2 + 1).$$

Пример 2. Да го разложиме полиномот $x^3 - x^2y + 3xy - 3y^2$ на множители. Групирајќи ги првиот со третиот член, а вториот со четвртиот член, добиваме

$$x^3 - x^2y + 3xy - 3y^2 = (x^3 + 3xy) - (x^2y + 3y^2) = x \cdot (x^2 + 3y) - y \cdot (x^2 + 3y) = (x - y) \cdot (x^2 + 3y).$$

Овој метод на разложување не секогаш може да се примени, исто како и другите методи. Но, и кога може да се примени неговата примена често пати не е очигледна. Тоа ќе го илустрираме со следниот пример.

Пример 3 (**за оние кои сакаат да знаат повеќе**). Да се разложи триномот $x^2 + 6x + 8$ на множители. Овој трином ние го разложивме во претходната лекција, но сега ќе покажеме како на друг начин тој може да се разложи. Ако бројот 6 го претставиме како $4 + 2$, ќе добиеме

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + (4 + 2) \cdot x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) =$$
$$= x \cdot (x + 2) + 4 \cdot (x + 2) = (x + 4) \cdot (x + 2).$$

Меѓутоа, ако 6 го запишевме како 3 + 3, или 5 + 1, пробата немаше да биде успешна, бидејќи тоа не дава разложување на дадениот полином. Всушност, ако добро го разгледаме примерот ќе забележиме дека претставувањето 6 = 4 + 2 водеше кон резултат, затоа што слободниот член 8 се јавува како производ на истите броеви 4 и 2. Ова важи во општ случај. Ако сакаме да го разложиме полиномот $x^2 + Ax + B$, тогаш проблемот се сведува на наоѓање на цели или рационални броеви p и q, такви што $A = p + q$ и $B = pq$. Ако во тоа успееме, тогаш сме успеале да го разложиме триномот:

$$x^2 + Ax + B = x^2 + (p + q) \cdot x + pq = x^2 + px + qx + pq =$$
$$= x \cdot (x + p) + q \cdot (x + p) = (x + q) \cdot (x + p).$$

ЗАДАЧИ

Да се разложат следните полиноми:

1 а) $x^3 - 5x^2 + x - 5$, б) $x^3 + x^2 + x + 1$, в) $y^3 + 4y^2 + 2y + 8$.

2 а) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 9x$, б) $y^5 - y^4 + y^3 - y^2 + y - 1$.

3 а) $x^2 + 5x + 6$, б) $x^2 + x - 2$, в) $x^2 - x - 2$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ -III

1 Од мономот $7ax^2$ одземи го мономот: а) $2ax$, б) $5ax^2$, в) $-5ax^2$.

2 Полиномот $2x^2 - 7x + 4$ запиши го како збир од два бинома.

3 Полиномот $9a^2 - 5a$ запиши го како разлика на два полинома, така што:
а) намаленик да биде $10a^2 - 5$, б) намалител да биде $4a^2 + 4$.

4 Пресметај:
а) $(-5a + 6a^2 - 7ax^2) \cdot 3a^2x$, б) $6ax^2 \cdot (2x - 2x^3 + 4a^2x)$.

5 Докажи дека изразот е идентично еднаков на нула:
а) $a \cdot (b - c) + b \cdot (c - a) + c \cdot (a - b)$, б) $a \cdot (b + c - bc) - b \cdot (c + a - ac) + c \cdot (b - a)$.

6 Докажи дека вредноста на изразот $n \cdot (n + 5) - (n + 3) \cdot (n + 2)$ за секој природен број n е делива со 6.

7 Докажи дека квадратот на кој било природен број за 1 е поголем од производот на неговиот претходник и неговиот следбеник.

8 Докажи дека важат равенствата:
а) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, б) $(x - y)^2 = (y - x)^2$, в) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

9 Ако збирот на два непарни броја се помножи со нивната разлика, се добива број делив со 4. Докажи.

10 Упрости ги изразите: а) $\frac{x(x-y)+2xy}{(x+y)y}$, б) $\frac{2(x+y)+xy-2x}{5(x+2)}$.

11 Пресметај ја вредноста на дропката по најкраток пат: а) $\frac{13^2+13\cdot 7}{12\cdot 11-12}$, б) $\frac{59^2+59\cdot 41}{25\cdot 7+25\cdot 5}$.

12 Збирот на три последователни природни броеви е еднаков на трикратната вредност на средниот од тие броеви. Докажи.

13 Изврши го означеното делење: а) $(4x^2-9):(2x+3)$, б) $(3x^3-5x^2+x+1):(x^2-2x+1)$.

14 Полиномот $3x^3-2x^2-5x+4$ разложи го на два множитела, ако знаеме дека едниот од нив е x^2-2x+1.

15 Изврши го делењето на полиномите: а) $(x^3-3x^2+x-1):(x-1)$, б) $(x^3+3x^2+x+1):(x+1)$.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА - III

1 Степенувај ги мономите: а) $(-3a^2b^2)^2$, б) $(-1\frac{1}{2}a^5b^4)^5$, в) $(2a)^4$.

2 Одреди го доменот на променливата x во изразот $\frac{2x^2-5}{x-3}$.

3 Запиши го спротивниот моном на мономот:

а) $2{,}4x^2$, б) $-5xy^3$, в) $\frac{3}{5}a$, г) $\frac{2xy}{3}$, д) $-0{,}75a^3$.

4 Одреди го степенот на мономот во однос на сите променливи:

а) $3a^2b$, б) $4^3x^2y^2$, в) $-5xy^3$, г) $2x$, д) 5^2ab.

5 Изврши го означеното делење на мономите:

а) $-6a^3b^4:(-2ab^3)$, б) $-4xy^4:(8y^2)$, в) $(x^3y^4):(-0{,}2x^3y^2)$.

6 Разложи ги на множители полиномите: а) $64x^2-9$, б) $5x^2-20$.

7 Мономот а) $49xy^3$, б) $2x^2yz$, помножи го со моном од најмала можна степен, така што производот да биде квадрат на некој моном.

8 Упрости го изразот $\frac{x-y+x^2-y^2}{2(y-x)}$.

9 На местото од ѕвездата „*“ стави моном така што триномот x^2+*+4y^2 да биде квадрат на некој бином. Колку можни одговори има задачата?

10 Докажи дека изразот $(n+5)\cdot(n+7)-(n+2)\cdot(n+10)$ не зависи од вредноста на бројот n.

11 Полиномот y^3-3y^2+y+1 подели го со биномот $y-1$.

12 Разложи ги на множители полиномоте: а) $4x^2-4x+1$, б) $y^3+4xy^2+4x^2y$.

ТЕМА IV

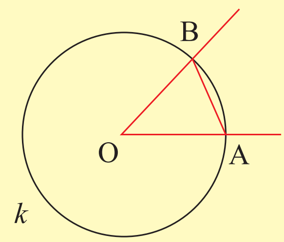
КРУЖНИЦА И МНОГУАЛГОЛНИК. ПЛОШТИНА

IV.1. ЦЕНТРАЛЕН АГОЛ. СВОЈСТВА

1. Поимот централен агол го воведуваме со следнава:

***Дефиниција.* Агол, чие теме е во центарот на дадена кружница, а краците му се насочени по два радиуса се вика централен агол на таа кружница.**

На пример, аголот AOB на цртежот 1 е централен агол на кружницата *k*. За лакот $\overset{\frown}{AB}$ од кружницата *k* и тетивата AB, што се содржат во централниот агол AOB (црт. 1), велиме дека се **соодветни** (му одговараат) на тој агол, а за централниот агол AOB велиме дека **е над лакот** $\overset{\frown}{AB}$, или дека **е соодветен** (му одговара) на лакот $\overset{\frown}{AB}$ односно на тетивата AB.



Црт. 1

***Теорема* 1. Ако два централни агла во една кружница се еднаквн, тогаш еднакви се и нивните соодветни лаци и тетиви.**

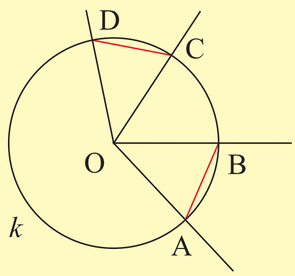
Услов: Дадена е кружницата *k* (O, *r*) и ∠AOB = ∠COD. (црт.2).

Тврдење: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ и $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Доказ: Ќе докажиме дека $\overline{AB} = \overline{CD}$, а тврдењето дека $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ќе го прифатиме без доказ.

Од $\overline{OA} = \overline{OC}$ (=*r*), $\overline{OB} = \overline{OD}$ (=*r*) и ∠AOB = ∠COD, според прпвиот признак за складност на триаголници (CAC) добиваме дека $\Delta A\ \ B \cong \Delta C\ \ D$. Оттука следува дека $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Може да се докаже дека важи и обратната теорема:



Црт. 2

***Теорема* 2. Ако два лака (односно две тетиви) во една кружница се еднакви, тогаш еднакви се и нивните соодветни централни агли.**

1 Околу рамнокракиот триаголник ABC со основа AB е опишана кружница. Какви се кружните лаци $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BC}$?

2. Знаеме дека аглите ги карактеризира посебна величина, која ја нарековме **големина на аглите**. Знаеме исто така, со помош на неа можеме да вршиме споредување и мерење на аглите во степени.

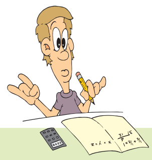
Теоремите 1 и 2 ни даваат можност за споредување и мерење и на кружните лаци и тоа преку споредување и мерење на нивните соодветни централни агли. Значи, и лаците ги карактеризира одредена величина, што е во тесна врска со големината на аглите. Таа величина ја викаме **аголна големина на кружните лаци**. Усвојуваме:

Дефиниција 2. **Аголна големина на лак од кружницата се вика големината на соодветниот негов централен агол во таа кружница.**

Аголната големина на лакот $\overset{\frown}{AB}$ симболички ќе ја означуваме исто со $\overset{\frown}{AB}$, како и самиот лак, разгледан како геометриска фигура. На пример, аголната големина на полукружницата изнесува 180°, а аголната големина на лакот $\overset{\frown}{MN}$ што одговара на прав централен агол изнесува 90° и пишуваме $\overset{\frown}{MN}=90°$.

2 Околу рамностран триаголник ABC е опишана кружница. Одреди ја аголната големина на кружните лаци $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AC}$.

ЗАДАЧИ



3 Во една кружница повлечени се два заемно нормални дијаметра и нивните крајни точки се сврзани последователно со отсечки. Докажи дека добиениот четириаголник е квадрат.

4 На кружницата се дадени два еднакви кружни лака $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$. Докажи дека кружниот лак, чии крајни точки се средините на дадените лаци, е еднаков со секој од нив.

5 Еден кружен лак претставува:

а) $\frac{1}{6}$, б) $\frac{1}{8}$, в) $\frac{1}{12}$, г) $\frac{1}{18}$ од кружницата. Одреди ја аголната големина на тој лак.

6 Дали е точно дека:

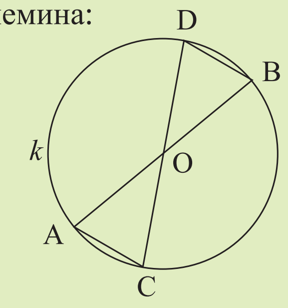
а) Ако два лака на кружницата не се еднакви, тогаш и соодветните централни агли не се еднакви?

б) Ако два централни агла на една кружница не се еднакви, тогаш и соодветните два лака не се еднакви?

7 Без употреба на агломер конструирај кружен лак со аголна големина:
а) 45°, б) 30°, в) 60°, г) 135°.

8 На цртежот 3 AB и CD_се дијаметри на кружницата *k*.
Докажи дека: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ и $\overline{AC} = \overline{BD}$.

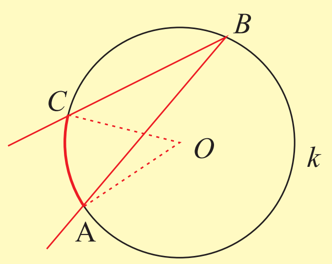
10 Низ едниот крај на дијаметарот AB на кружницата *k* повлечени се две тетиви AC и AD, кои со дијаметарот зафаќаат еднакви агли. Докажи дека $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$.



Црт. 3

IV.2. ПЕРИФЕРЕН АГОЛ. ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА

1. Агол, чие теме е некоја точка од кружницата, а краците ја сечат кружницата, се вика **периферен агол** на таа кружница, или **агол впишан во кружница**.



Црт. 4

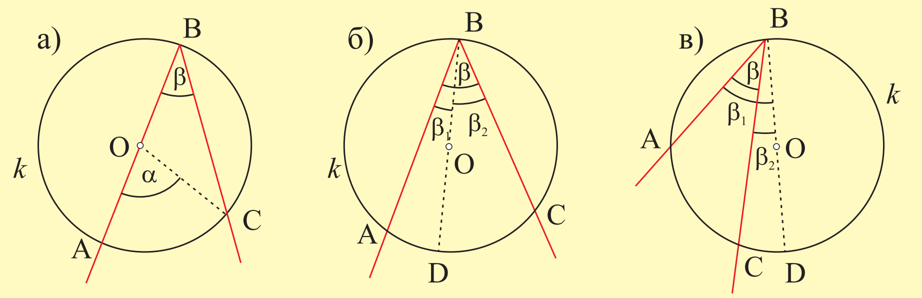
На пример, аголот ABC е периферен агол на кружницата *k* (црт. 4) За лакот $\overset{\frown}{AC}$, што лежи во областа на периферниот агол ABC, велиме дека е **соодветен** (му одговара) на периферниот агол ABC, а за периферниот агол ABC велиме дека е **над лакот** $\overset{\frown}{AC}$.

Ќе покажеме дека важи следнава:

***Теорема*. Големината на секој периферен агол е еднаква на половина од аголната големина на неговиот соодветен лак.**

Услов: ∠ABC = β е периферен агол во кружницата *k*.

Тврдење: $\angle ABC=\beta=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ (црт.5).



Црт. 5

Доказ. Ќе разликуваме три случаи:

а) Центарот на кружницата лежи на еден од краците на периферниот агол (црт. 5а). Да го повлечеме радиусот OC. Гледаме, аголот $\angle AOC=\alpha$ е централен агол над лакот AC, над кој се наоѓа и дадениот периферен агол $\angle ABC=\beta$. Бидејќи аголот α е надворешен на рамнокракиот триаголник BOC ($\overline{\ B} = \overline{\ C}$ - радиуси на кружницата), затоа ќе биде $\alpha=2\beta$, односно $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Ако земеме предвид дека: големината на централниот агол е еднаква на аголната големина на соодветниот лак $\overset{\frown}{AC}$ ($\alpha=\overset{\frown}{AC}$), тогаш добиваме: $\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

б) Центарот на кружницата лежи во областа на периферниот агол. Дијаметарот BD повлечен низ темето на периферниот агол β, го разделува истиот на два дела β_1 и β_2, при што $\beta=\beta_1+\beta_2$ (црт. 5б). За аглите β_1 и β_2, врз основа на претходниот случај, имаме:

$$\beta_1 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \quad \text{и} \quad \beta_2 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}.$$

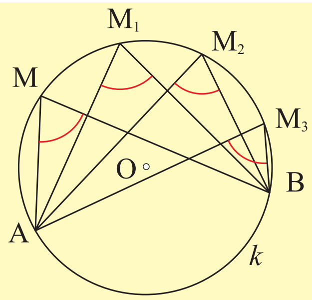
Според тоа: $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, т.е. $\beta = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

в) Центарот на кружницата лежи надвор од периферниот агол (црт. 5в). Во тој случај, ако го повлечеме дијаметарот BD, дадениот агол β може да го разгледуваме како разлика од периферните агли β_1 и β_2, т.е. $\beta=\beta_1-\beta_2$.

Според тоа: $\beta = \beta_1 - \beta_2 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, т.е. $\beta = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

Со тоа теоремата е целосно докажана. Од неа следува следнава важна:

***Последица*: Сите периферни агли во една кружница, што се над ист кружен лак, се еднакви меѓу себе (црт. 6).**



Црт. 6

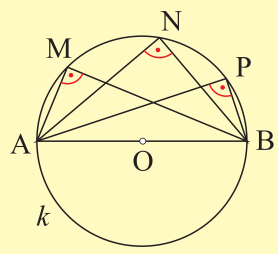
Навистина, големината на секој од тие е еднаква на половина од аголната големина на еден ист кружен лак.

1 Каков дел од кружницата претставува кружниот лак над кој лежи периферен агол од:
а) 45°, б) 36°, в) 30°?

2. На цртежот 7 нацртана е кружница со дијаметар AB. Дијаметарот AB ја разделува кружницата на две полукружници. На една од полукружниците да земеме неколку произволни точки M, N, P, ... различни од A и B. За периферните агли, чии краци минуваат низ крајните точки на дијаметарот AB често велиме дека се **„над полукружницата“**, или **„над дијаметарот“** на кружницата.

Директна последица од горнава теорема е и следнава:

***ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА*. Секој периферен агол над полукружницата е прав.**



Црт. 7

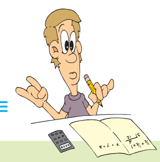
Навистина, периферните агли ∠M, ∠N, ∠P,... (црт. 7) се прави, бидејќи големината на секој од нив е еднаква на половина од аголната големина на полукружницата над AB, т.е. од 180°.

***Последица*. Сите точки од кружницата со дијаметар AB (освен точките A и B) се темиња на правоаголен триаголник со хипотенуза AB.**

Талесовата теорема, како што ќе видиме понатаму, има широка примена.

2 Дадени се три точки A, B и C на кружницата k, при што AC е дијаметар на k. Одреди ја големината на аголот ABC.

ЗАДАЧИ



3 Во кои граници се менува големината на периферниот агол во кружницата?

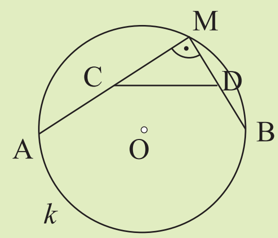
4 Колкав е периферниот агол над кружен лак, кој претставува:

а) $\frac{1}{4}$, б) $\frac{2}{9}$, в) $\frac{5}{6}$, г) $\frac{2}{5}$, од кружницата?

5 Збирот од големината на периферниот агол и соодветниот централен агол изнесува 180°. Одреди ја големината на двата агла.

6 Дадена е права p и две точки $A \notin p$ и $B \notin p$. На правата p одреди точка M, таква што аголот AMB да е прав.

7 Од точката M на кружницата $k(O, r)$ се повлечени две заемно нормални тетиви MA и MB (црт. 8). Растојанието меѓу средините на тие тетиви е еднакво на $\overline{CD}=2{,}5\text{cm}$. Одреди го дијаметарот на кружницата k.



Црт. 8

8 Над страната AB на рамностраниот триаголник ABC конструирана е полукружница, која ги сече другите две страна на ΔABC во точките M и N. Одреди ја аголната големина на лаците $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{MN}$ и $\overset{\frown}{NB}$.

9 Докажи дека: Ако една тетива и дијаметарот на кружницата зафаќаат агол од 30°, тогаш отсечката, што ги сврзува нивните незаеднички точки, е еднаква на радиусот на кружницата.

10 Нацртај отсечка AB, и нека $a < \overline{AB}$. Најди точка C така што триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во точката C и $\overline{BC} = a$.

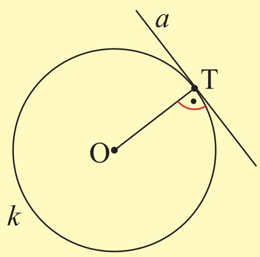
11 Нацртај кружница $k(O,r)$ и обележи точка S надвор од неа. Конструирај кружница k_1, со дијаметар OS. Ако T е една заедничка точка на k и k_1, докажи дека триаголникот OST е правоаголен.

IV.3. **КОНСТРУКЦИЈА НА ТАНГЕНТА НА КРУЖНИЦА**

1. Поимот тангента на кружница го дефинирравме минатата година со следнава:

***Дефиниција*. Тангента на кружницата се вика правата, која лежи во рамнината на кружницата и со неа има само една заедничка точка.**

Заедничката точка на тангентата и кружницата се вика **допирна точка** на тангентата, а радиусот што и одговара на таа точка се вика **радиус на допирната точка**. Познато е: ако една права е тангента во точката T на кружницата $k(O,r)$, тогаш таа е нормална на радиусот OT (црт. 9). Сега ќе го докажеме обратното тврдење:



Црт. 9

***Теорема*: Ако една права *p* минува низ точката A од дадена кружница (O, *r*) и *p*⊥*OA*, тогаш *p* е тангента на кружницата .**

Услов: Дадени се кружница $k(O, r)$ и права p. Нека $A \in k$, $A \in p$ и $p \perp OA$ (црт. 10).

Тврдење: Правата p е тангента на кружницата k.

Доказ. Од $p \perp OA$, следува дека растојанието на која било точка M од правата p, што е различна од A ($M \neq A$), ќе биде поголемо од радиусот $\overline{A}$, т.е. $\overline{M} > \overline{A}$ (Зошто?). Тоа значи, дека сите точки од правата, освен точката A лежат надвор од кружницата k. Според тоа, правата p и кружницата k имаат само една заедничка точка A, т.е. $p \cap k = \{A\}$, значи, правата p е тангента на кружницата k.

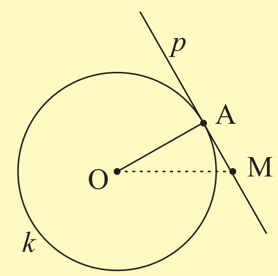
2. Горнава теорема ја применуваме кога треба да докажеме дека една права е тангента на кружницата, а исто и при конструкцијата на тангента во дадена точка од кружницата.

Задача 1. Да се конструира тангента на кружницата $k(O, r)$ во дадена точка A од неа.

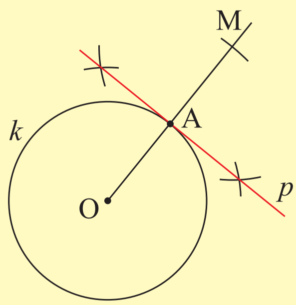
Решение. За да конструираме тангента на кружницата $k(O, r)$ во точката A (црт. 11) доволно е да конструираме права низ точката A, која е нормална на радиусот OA. Тоа го постигнуваме на следниот начин: а) Конструираме точка M на полуправата OA, таква што $\overline{AM} = \overline{\quad A}$, б) Конструираме симетрала p на отсечката OM. Правата p е бараната тангента на кружницата k.

Задача 2. Да се конструира тангента на кружницата $k(O,r)$, која минува низ дадена точка P што лежи надвор од кружницата k.

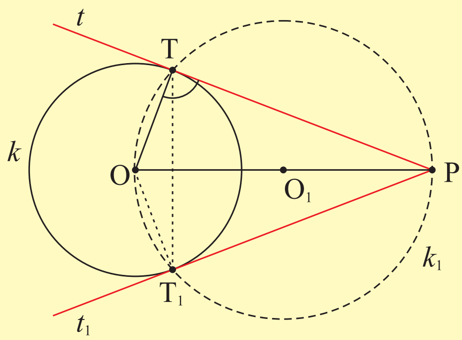
Решение. **Анализа**: Бараната тангента нека е правата , која минува низ точката P и ја допира кружницата k во точката T (црт. 12). За да биде правата тангента на кружницата k во точката T, доволно е аголот OTP да биде прав. А за да биде тој агол прав, согласно Талесовата теорема, доволно е тој да е периферен агол над полукружницата со дијаметар OP. Според тоа, допирната точка T е една од пресечните точки на дадената кружница k и кружницата k_1, чиј дијаметар е отсечката OP (црт. 12).



Црт. 10



Црт. 11



Црт. 12

Конструкција: Точката P ја сврзуваме со центарот на кружницата k и ја одредуваме средината на отсечката OP. Ја конструираме кружницата $k_1(O_1, \overline{\quad}_1)$ над дијаметарот OP. Го одредуваме пресекот $k \cap k_1$ а потоа низ секоја точка од него и точката P повлекуваме права.

Доказ. Бидејќи точките O и P од кружницата k_1 се една внатрешна и една надворешна за кружницата k, затоа k_1 и k имаат две заеднички точки T и T_1, т.е. $k \cap k_1 = \{T, T_1\}$. Аглите OTP и OT_1P врз основа на Талесовата теорема се прави. Тоа значи дека правите PT и PT_1 се нормални на радиусите OT и OT_1 на дадената кружница, па според тоа, тие се бараните тангенти.

Дискусија: Бидејќи две кружници се сечат само во две точки, затоа од точка што лежи надвор од дадена кружница може да се повлечат точно две тангенти на неа.

Отсечката од тангентата на кружницата, меѓу која било нејзина точка и допирната точка, се вика **тангентна отсечка**.

Задача 3. Да се докаже дека: тангентните отсечки од тангентите, што се повлечени од точка надвор од кружницата, се еднакви.

Доказ. Нека точката P е надворешна за кружницата $k(O,r)$ и низ неа нека се повлечени две тангенти и ${}_1$ со допирни точки T и T_1.

Да ги разгледаме триаголниците OTP и OT_1P (црт. 12). Тие се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза OP и еднакви катети OT и OT_1. Според тоа: $\Delta OTP \cong \Delta OT_1P$. Оттука следува $\overline{} = \overline{}_1$.

Од складноста на триаголниците OTP и OT_1P (црт. 12) заклучуваме уште и тоа дека:

а) Правата OP е заедничка симетрала на аглите TPT_1 и TOT_1.

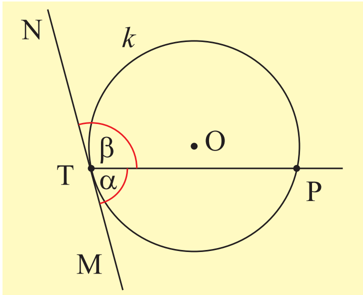
б) Правата OP е симетрала на тетивата TT_1.

ЗАДАЧИ

1. Конструирај тангента на кружницата во дадена точка од неа.
2. Конструирај кружница со даден радиус r, која ќе се допира до дадена права p во дадена точка M од неа.
3. Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците, кои се допираат до дадена права во дадена точка од неа?
4. Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците со даден радиус r, кои се допираат до дадена права p?
5. Докажи дека: тангентите на кружницата, што се повлечени во крајните точки на еден дијаметар, се паралелни.
6. Да се конструира тангента на дадена кружница, која е: а) паралелна, б) нормална на дадена права p.
7. Конструирај кружница, која се допира до дадена права p во точката A од неа, а центарот да ѝ лежи на дадена права q.
8. Дадена е права p и точка $M \notin p$. Конструирај кружница со центар во точката M, а да се допира до правата p.
9. Дадени се кружница $k(O,r)$ и точка C, која лежи надвор од неа. Конструирај ги тангентите на кружницата k, кои минуваат низ точката C.
10. Од точката M што лежи надвор од кружницата k, повлечени се тангенти и ${}_1$ на кружницата, чии допирни точки се T и T_1. Аголот меѓу тангентите и ${}_1$ изнесува 45°. Одреди ја аголната големина на кружниот лак $\overset{\frown}{}_1$.

IV.4. **АГОЛ МЕЃУ ТАНГЕНТА И ТЕТИВА**

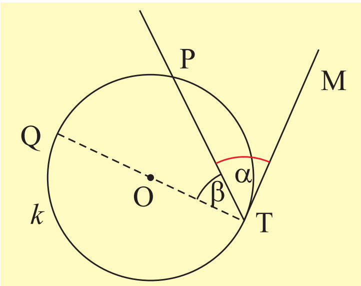
На цртежот 13 во точката T од кружницата *k* е повлечена тангента MN и тетива TP на кружницата *k*. Полуправата TP, што ја содржи тетивата TP, со тангентата MN образува два агла ∠MTP=α и ∠NTP=β, со теме во допирната точка T на тангентата и кружницата. Секој од тие два агла се вика **агол меѓу тангента и тетива** на кружницата.



Црт. 13

За кружниот лак $\overset{\frown}{\ }$, што лежи во областа на аголот MTP, велиме дека е **соодветен** (му одговара) на тој агол.

***Теорема*. Големината на аголот меѓу тангента и тетива е еднаква на половината од аголната големина на кружниот лак, што му одговара.**



Црт. 14

Теоремата ќе ја докажеме само за остриот агол α (црт. 14). Го повлекуваме дијаметарот TQ⊥TM на допирната точка T.

Притоа го добиваме периферниот агол $\beta = \frac{\overset{\frown}{\ }}{2}$ (црт. 14).

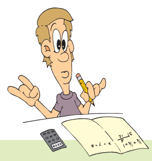
Во тој случај имаме: α=90°–β, односно

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{\ }}{2} - \frac{\overset{\frown}{\ }}{2} = \frac{\overset{\frown}{\ } - \overset{\frown}{\ }}{2} = \frac{\overset{\frown}{\ }}{2}, \text{ т.е. } \alpha = \frac{\overset{\frown}{\ }}{2}.$$

Докажете ја теоремата за случаите кога аголот MTP е тап и кога тој е прав.

***Последица*. Аголот α меѓу тангента и тетива на кружницата е еднаков со секој периферен агол над истиот кружен лак, што му одговара на аголот α.**

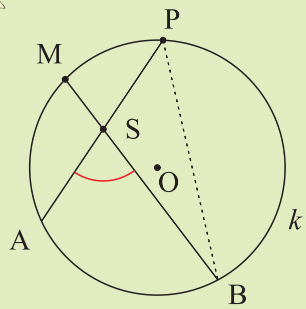
1 Тангентите на кружницата *k* во точките A∈*k* и B∈*k* се сечат во точката K и образуваат прав агол. Одреди ја големината на аглите MBA и MAB.



ЗАДАЧИ

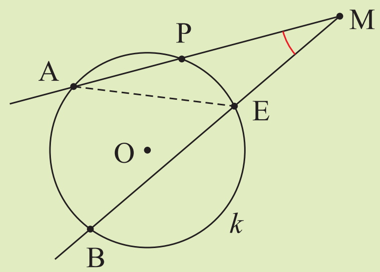
2 Околу рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) опишана е кружница и низ врвот C на триаголникот повлечена е тангента на кружницата. Докажи дека: ||AB.

3 Тетивите AP и BM на кружницата *k* се сечат во точката S (црт. 15). Докажи дека големината на аголот ASB е еднаква на полузбирот од аголните големини на кружните лаци $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{M}$.



Црт. 15

4 Од точката M што лежи надвор од кружницата k, повлечени се две прави, кои ја сечат кружницата соодветно во точките A, P и B, E (црт. 16). Докажи дека: големината на аголот AMB е еднаква на полуразликата од аголните големини на кружните лаци $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{}$, т.е. $\angle AMB=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{}}{2}$.

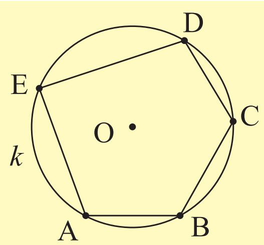


Црт. 16

5 Докажи дека, големината на аголот, што го образуваат две тангенти повлечени кон кружницата од една точка, е еднаква на полуразликата од аголните големини на зафатените кружни лаци.

6 На кружница $к$ избери последователно четири точки A, B, C и D. Измери ги аглите ABC и ADC, а потоа пресметај го нивниот збир. Што забележуваш?

IV.5. ТЕТИВЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК



Црт. 17

Многуаголник на кој сите темиња лежат на една кружница, односно сите негови страни се тетиви на кружницата, се вика **тетивен многуаголник** (црт. 17). За многуаголникот ABCDE на цртежот 17 уште велиме дека е **вписан во кружницата** k, а за кружницата k дека е **опишана околу многуаголникот** ABCDE.

Знаеме, околу секој триаголник може да се опише кружница и тоа само една. Според тоа, секој триаголник е тетивен. Меѓутоа, не секој четириаголник, петаголник е тетивен.

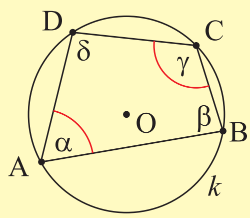
Сега ќе се запознаеме со својствата на тетивен четириаголник, како и со признакот според кој може да се препознае дали еден четириаголник е тетивен.

***Теорема* 1. Во секој тетивен четириаголник спротивните агли се суплементни.**

Доказ. Нека четириаголникот ABCD е вписан во кружницата k, т.е. нека A, B, C, D$\in k$ (црт. 18). Ќе докажеме дека $\alpha+\gamma=180°$.

Гледаме дека внатрешните агли α, β, γ и δ на четириаголникот ABCD се периферни агли на кружницата k. Тогаш за аглите α и γ ќе важи:

$\alpha=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$, $\gamma=\dfrac{\overset{\frown}{DAB}}{2}$, односно:



Црт. 18

$$\alpha+\gamma=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{DAB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BCDAB}}{2}=\frac{360}{2}=180$$, т.е. $\alpha+\gamma=180°$.

На ист начин може да се докаже дека е и $\beta+\delta=180°$.

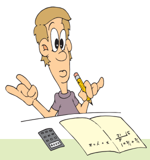
Може да се докаже дека важи и обратната теорема:

***Теорема* 2. Ако во четириаголникот два спротивни агли се суплементни, тогаш тој четириаголник е тетивен.**

Од неа заклучуваме дека: ако за четириаголникот ABCD е исполнет условот „$\angle A+\angle C=180°$" (тогаш ќе биде и $\angle B+\angle D=180°$, зошто?), тогаш тој е тетивен четириаголник. Затоа, за условот „$\angle A+\angle C=180°$" велиме дека претставува **доволен услов** или **признак** четириаголникот ABCD да е тетивен.

1 Околу кој паралелограм може да се опише кружница?

ЗАДАЧИ



2 Може ли да се опише кружница околу четириаголник ABCD, чии агли A, B, C и D соодветно се еднакви на:

а) 70°, 90°, 120°, 80°, б) 80°, 100°, 100°, 80°, в) 45°, 85°, 135°, 95°.

3 Два од аглите на тетивен четириаголник ABCD се еднакви на $\angle A=85°$ и $\angle B=115°$. Одреди ја големината на другите два агла на тој четириаголник.

4 Докажи дека секој тетивен трапез е рамнокрак.

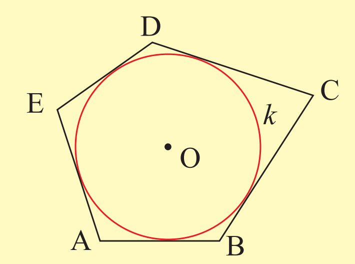
5 Докажи дека, точките A и B и нивните симетрични точки A_1, B_1 во однос на правата *p*, лежат на една кружница.

6 Докажи дека во тетивниот четириаголник ABCD е $\angle ABD=\angle ACD$.

7 На кружницата *k* избери последователно четири точки, A, B, C и D. Во секоја од нив повлечи тангенти $_A$, $_B$, $_C$ и $_D$ соодветно. Нека $_A\cap{}_B=\{M\}$, $_B\cap{}_C=\{N\}$, $_C\cap{}_D=\{P\}$, $_D\cap{}_A=\{Q\}$. Измери ги должините $\overline{MN}$, $\overline{N\ }$, $\overline{\ \ }$ и $\overline{\ M}$, а потоа пресметај ги збировите: $\overline{MN}+\overline{\ \ }$ и $\overline{N\ }+\overline{\ M}$. Што забележуваш?

IV.6. ТАНГЕНТЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Многуаголник на кој сите страни се тангенти на дадена кружница, се вика **тангентен многуаголник** (црт. 19). За многуаголникот ABCDE на цртежот 19 велиме уште дека е **опишан околу** кружницата *k*, а за кружницата *k* дека **е впишана во** многуаголникот ABCDE.

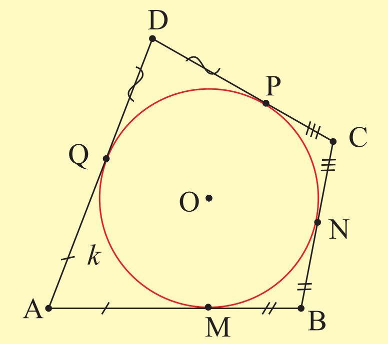


Црт. 19

Знаеме, во секој триаголник може да се впише кружница. Според тоа, секој триаголник е и тангентен. Меѓутоа, не секој четириаголник е тангентен.

Тангентните четириаголници го имаат следново важно својство:

Теорема **1. Во секој тангентен четириаголник збирот од должините на две спротивни страни е еднаков на збирот од должините на другите две спротивни страни.**



Црт. 20

Доказ. Нека четириаголникот ABCD е опишан околу кружницата *k* и нека неговите страни ја допираат кружницата во точките M, N, P и Q (црт. 20). Ќе докажеме дека:

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}.$$

Врз основа на теоремата за тангентните отсечки AM и AQ, CP и CN, BM и BN, DP и DQ, важи:

$$\overline{AM}=\overline{A\ \ },\ \overline{BM}=\overline{BN},\ \overline{C\ \ }=\overline{CN},\ \overline{D\ \ }=\overline{D\ \ }.$$

Ако ги собереме соодветните страни на горниве равенства, добиваме:

$(\overline{AM}+\overline{BM})+(\overline{C\ \ \ +D\ \ })=(\overline{A\ \ }+\overline{D\ \ })+(\overline{BN}+\overline{CN})$, односно: $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$, штд.

Може да се докаже дека важи и обратната теорема:

Теорема **2. Ако во четириаголникот збировите од должините на неговите спротивни страни се еднакви, тогаш тој е тангентен.**

Со оваа теорема се утврдува дека: ако за четириаголникот ABCD е исполнет условот:

„$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$“, тогаш тој е тангентен.

Според тоа, таа е **доволен услов** или **признак** четириаголникот ABCD да е тангентен.

1 Во кој паралелограм може да се впише кружница?

ЗАДАЧИ

2 На тангентниот четириаголник ABCD познати се должините на три негови страни: $\overline{AB}=7$cm, $\overline{BC}=12$cm и $\overline{AD}=5$cm. Одреди ја должината на четвртата страна.

3 Докажи дека должината на средната линија на тангентниот трапез е еднаква на $\frac{1}{4}$ од не говиот периметар.

4 Конструирај ромб, ако се дадени: страната *a* и радиусот на впишаната кружница во него.

5 Докажи дека околу правоаголен трапез не може да се опише кружница.

6 Даден е триаголник ABC. Конструирај кружница, чиј центар да лежи на страната BC, а другите две страни на ABC да се тангентни.

7 Даден е триаголник ABC. Конструирај кружница *k*, таква што страната BC и продолженијата на страните AB и AC да се нејзини тангенти.

8 Нацртај делтоид и впиши во него кружница.

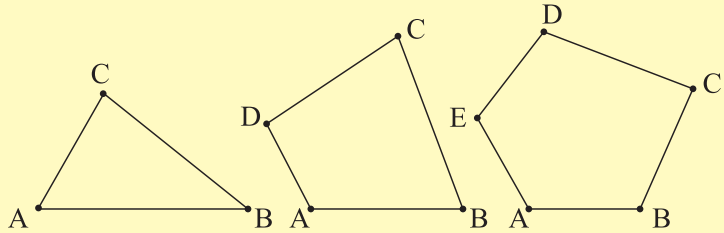
IV.7. **ОПШТО ЗА МНОГУАГОЛНИК**

Поимот многуаголник ви е познат од V и VI одделение. Научивте што **се темиња,** а што **страни** на многуаголникот. Две темиња, што и припаѓаат на иста страна се викаат **соседни темиња**, а две страни со заеднички крај (теме) се викаат **соседни страни** на многуаголникот.

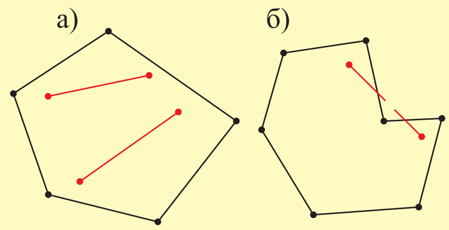
Многуаголникот симболички го означуваме со именување на сите негови темиња: ABC, ABCD, ABCDE, итн (црт. 21).

Во секој многуаголник бројот на темиња е еднаков на бројот на страните. Многуаголниците ги делиме на видови според бројот на страните. Знаеме, многуаголник со три страни се вика **триаголник**, многуаголник со четири страни - **четириаголник**, многуаголник со пет страни - **петаголник**, итн. (црт. 21), или воопшто многуаголник со *n* страни се вика уште и **-аголник**.

Многуаголникот може да биде **конвексен** (црт. 22а) или **неконвексен (конкавен)** (црт. 22б). Ние ќе разгледуваме само конвексни многуаголници. Даден многуаголник е конвексен, ако на неговата внатрешна област ѝ припаѓа секоја отсечка, чии крајни точки се од таа област (црт. 22а). Секој многуаголник кој не го исполнува тој услов (црт. 22б) се вика неконвексен или конкавен.



Црт. 21



Црт. 22

1 Може ли триаголникот да биде неконвексен? Зошто?

Аголот, чии краци содржат две соседни страни на многуаголникот и на кој му припаѓа целиот (конвексен) многуаголник, се вика **внатрешен агол** на многуаголникот (црт. 23), или кратко само **агол** на многуаголникот.

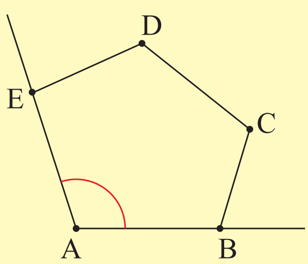
Аглите, што се напоредни на внатрешните агли на многуаголникот, се викаат негови **надворешни агли**. Секој n-аголник има n внатрешни и n надворешни агли. На цртежот 24 внатрешните агли на петаголникот ABCDE се означени со α, β, γ, δ и θ, а надворешните агли со α_1, β_1, γ_1, δ_1 и θ_1.

Ако е $n \geq 4$, тогаш во n-аголникот може да се повлечат и отсечки, кои сврзуваат кои било несоседни темиња на тој n-аголник. Тие отсечки се викаат **дијагонали на многуаголникот**. За дијагоналите и аглите на многуаголникот важат следниве теореми:

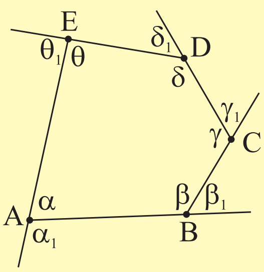
Теорема **1. Бројот ( ) на сите дијагонали на -аголникот е еднаков на**

$$D(n) = \frac{1}{2}n(n-3), \qquad n \geq 4.$$

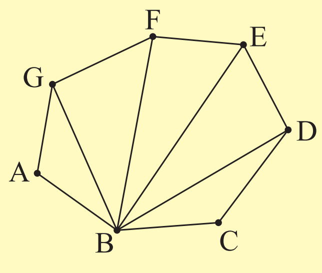
Доказ. Од едно теме на n-аголникот, на пример од темето B, може да се повлечат дијагонали кон секое теме, освен кон самото себе (B) и кон двете негови соседни темиња (A и C) (црт. 25).



Црт. 23



Црт. 24



Црт. 25

Според тоа, од секое теме на n-аголникот може да се повлечат n–3 дијагонали. На прв поглед изгледа дека од сите n темиња ќе може да се повлечат n пати по n–3 дијагонали, т.е. вкупно $(n-3)\cdot n$ дијагонали. Но бидејќи, на пример, дијагоналата BD се совпаѓа со дијагоналата DB, затоа во производот $(n-3)\cdot n$ секоја дијагонала е двапати броена. Затоа вистинскиот број на сите дијагонали во n-аголникот ќе биде: $\frac{1}{2}n(n-3)$, штд.

Пример 1. Седумаголникот има $D(7)=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot(7-3)=14$ дијагонали, десетаголникот има $D(10)=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10-3)=35$ дијагонали, итн.

2 Колку вкупно дијагонали може да се повлечат во многуаголникот, што има:
а) 5, б) 12, в) 20, г) 50 страни?

Теорема 2. **Сите дијагонали повлечени од едно теме на -аголникот истиот го разделуваат на -2 триаголника**.

Доказ. Темињата да ги означиме со $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Да ги повлечеме сите дијагонали од темето A_n. Тогаш *n*-аголникот се разделува на следниве триаголници:

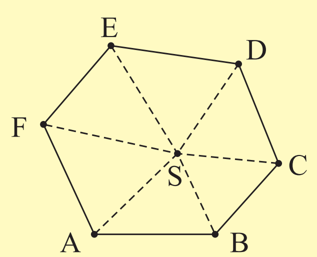
$$A_1A_2A_n,\quad A_2\,A_3A_n,\quad \ldots,\ A_{n-2}A_{n-1}A_n,$$

и нив ги има точно *n*–2, штд.

Пример 2. Ако *n*=7, тогаш сите дијагонали од темето B го разделуваат седумаголникот ABCDEFG на пет триаголници (црт. 25).

Теорема 3. **Збирот на внатрешните агли на -аголникот е еднаков на S** =(–2)·180 .

Доказ. Ако ги повлечеме сите дијагонали од едно теме на *n*-аголникот, тој ќе се раздели на *n*–2 триаголника. Знаеме, збирот на внатрешните агли на секој триаголник изнесува 180°. Бидејќи внатрешните агли на добиените триаголници, со повлекување на дијагоналите од едно теме точно ги поклопуваат внатрешните агли на *n*-аголникот, затоа збирот на сите внатрешни агли на тие триаголници ќе биде еднаков на збирот на внатрешните агли на *n*-аголникот. Според тоа, $S_n=(n-2)\cdot 180°$.



Црт. 26

Разгледајте го цртежот 26. Со негова помош како на друг начин може да се докаже теоремата 3?

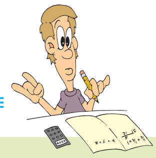
Пример 3. Збирот на внатрешните агли во петаголникот е еднаков на $S_5=(5-2)\cdot 180°=3\cdot 180°=540°$, а на шестаголникот тој ќе биде: $S_6=(6-2)\cdot 180°=4\cdot 180°=720°$.

Теорема 4. **Збирот на надворешните агли на секој многуаголник е еднаков на** 360 .

Доказ. Нека $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ се внатрешните агли на еден *n*-аголник. Користејќи дека $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=(n-2)\cdot 180°$, за збирот на надворешните агли добиваме:

$$\alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_n=(180°-\alpha_1)+(180°-\alpha_2)+\ldots+(180°-\alpha_n)=n\cdot 180°-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=$$
$$=n\cdot 180°-(n-2)\cdot 180°=2\cdot 180°=360°.$$

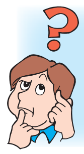
ЗАДАЧИ



3. Кои многуаголници ги викаме конвексни, а кои неконвексни? Нацртај по еден конвексен и еден неконвексен шестаголник.
4. Колку дијагонали може да се повлечат од едно теме кај:
   а) четириаголникот, б) шестаголникот, в) петнаесетаголникот?
5. Познато е дека од едно теме во еден многуаголник може да се повлечат:
   а) 4, б) 7, в) 15, г) 25 дијагонали.
   Кој е тој многуаголник и одреди колку вкупно дијагонали има?
6. На колку триаголници се разделува многуаголникот што има:
   а) 4, б) 5, в) 7, г) 15 страни, ако се повлечат сите дијагонали од едно негово теме?
7. Одреди го збирот на внатрешните агли кај:
   а) петаголникот, б) шестаголникот, в) осумаголникот, г) дванаесетаголникот?
8. Збирот на шесте внатрешни агли во еден седумаголник изнесува 784°.
   Одреди ја големината на седмиот внатрешен агол.
9. Кој многуаголник има збир на внатрешните агли, еднаков на:
   а) 540°, б) 720°, в) 900°, г) 1440°, д) 1800°?

IV.8. **ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ**

Знаеме, рамностраниот триаголник има три еднакви страни и три еднакви агли (секој од нив има по 60°); а квадратот има четири еднакви страни и четири еднакви агли (секој по 90°).

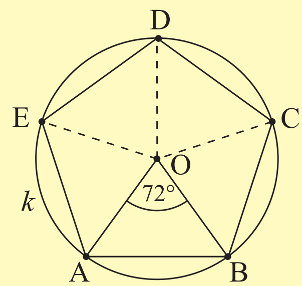


***Дефшшција*. Многуаголник, на кој сите страни се еднакви и сите агли се еднакви, се вика правилен многуаголник.**

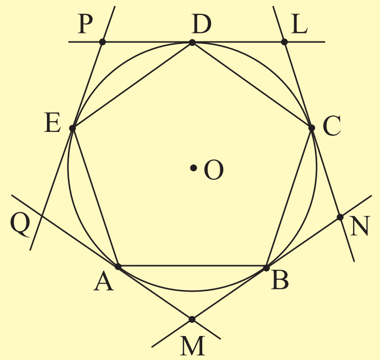
Се поставува прашањето: дали постои кој било правилен n-аголник и како тој може да се нацрта?

Ќе покажеме дека поставените прашања имаат позитивен одговор.

Да ја разделиме дадената кружница k на n, ($n \geq 3$) еднакви лаци, на пример на 5 еднакви лаци. Тоа може да се постигне со последователно цртање на пет централни агли - сите со големина $\frac{360^o}{5} = 72^o$ (црт. 27). Ако разделните точки последователно ги сврземе со тетиви, ќе добиеме петаголник ABCDE што е впишан во кружницата k. Нацртаниот петаголник е правилен, бидејќи: а) страните му се еднакви како тетиви, што им одговараат на еднакви лаци во иста кружница и б) сите агли му се еднакви, како периферни агли над еднакви лаци во иста кружница.



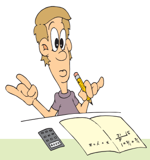
Црт. 27



Црт. 28

На ист начин може да нацртаме кој било правилен n аголник. Правилен n-аголник може да се нацрта уште и на следниот начин: Да ја разделиме дадената кружница k на n ($n \geq 3$) (на пример на $n=5$) еднакви лаци и во разделните точки A, B, C, D и E да конструираме тангенти на кружницата (црт. 28). Образуваниот петаголник MNLPQ (чии темиња се пресечните точки на тангентите во разделните точки) е правилен.

Бидејќи, согласно дефиницијата, сите внатрешни агли на правилниот n-аголник се еднакви, а збирот на сите внатрешни агли е $(n-2)\cdot 180°$, добиваме дека големината на секој внатрешен агол на правилниот n аголник изнесува $\alpha = \dfrac{(n-2)\cdot 180}{n}$. Периметарот на правилниот n-аголник е еднаков на $L = na$.



ЗАДАЧИ

1. Дали е точно дека:
а) Секој многуаголник со еднакви страни е правилен?
б) Постои ли многуаголник со еднакви страни што не е правилен?

2. Дали е точно дека:
а) Секој многуаголник со еднакви агли е правилен?
б) Постои многуаголник со еднакви агли, а да не е правилен?

3. Одреди ја големината на еден внатрешен агол на правилниот:
а) петаголник, б) осумаголник, в) 12-аголник, г) 18-аголник.

4. Кај кој правилен многуаголник внатрешниот агол изнесува:
а) 135°, б) 150°, в) 156°, г) 162°?

5. Одреди ја големината на еден надворешен агол на правилниот:
а) петаголник, б) шестаголник, в) деветаголник.

6. Ако страните на рамностран триаголник ги разделиме на по три еднакви делови, тогаш разделните точки се темиња не еден правилен шестаголник. Докажи!

7. Докажи дека секој тетивен многуаголник, на кој сите страни му се еднакви, е правилен многуаголник.

8. Дали е точно дека, секој тетивен многуаголник, на кој сите внатрешни агли му се еднакви, е правилен многуаголник?

7. Нацртај квадрат со страна a, потоа во него и околу него конструирај кружница.

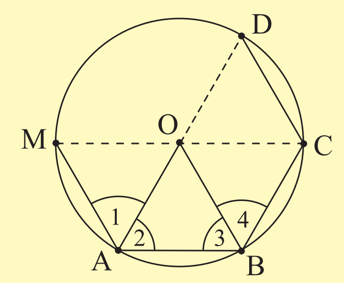
IV.9. **ОПИШАНА И ВПИШАНА КРУЖНИЦА**

Правилните многуаголници ги имаат следниве поважни својства:

1°. **Околу правилниот многуаголник може да се опише кружница**.

Доказ. Нека ABC...M е правилен многуаголник (црт. 29). Да ги конструираме бисектрисите на два соседни агла (на пример ∠A и ∠B). Тие се сечат во некоја точка O, бидејќи ∠A и ∠B се помали од 180°. Точката O да ја сврземе со преостанатите темиња на многуаголникот.

Триаголникот AOB е рамнокрак, бидејќи ∠2=∠3 (како половинки од еднакви агли). Според тоа, $\overline{OA} = \overline{OB}$. Да ги разгледаме триаголниците AOB и BOC. Забележуваме:



Црт. 29

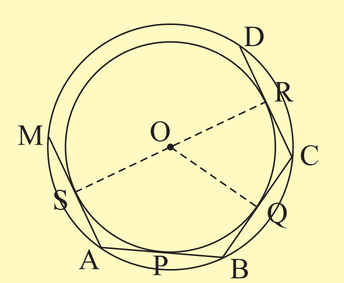
а) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (по услов),

б)OB е заедничка страна,

в)∠3=∠4 (како половинки од аголот B).

Според тоа, важи ΔAOB ≅ ΔBOC. Оттука $\overline{\ B} = \overline{\ C}$.

Ако продолжиме на истиот начин, наоѓаме: $\overline{\ A} = \overline{\ B} = \overline{\ C} = ... = \overline{\ M}$. Според тоа, сите темиња на многуаголникот ABC...M се еднакво оддалечени од точката O, која е центар на опишаната кружница.



Црт. 30

2°. **секој правилен многуаголник може да се впише кружница**.

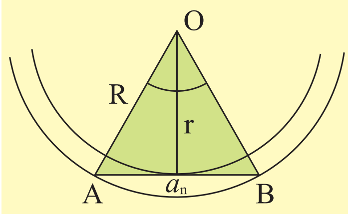
Доказ. Околу правилниот многуаголник ABC...M нека е опишана кружница со центар O (црт. 30). Бидејќи страните AB, BC,...,MA се еднакви тетиви на опишаната кружница, затоа тие се еднакво оддалечени од центарот на кружницата. Според тоа, средините P,Q,…,S на тие тетиви се точки од друга кружница со центар во истата точка O и радиус со должина еднаква на растојанието од точката O до една страна на многуаголникот.

Таа кружница се допира до страните на многуаголникот во средината на секоја од нив, па според тоа, таа е вписана во правилниот многуаголник. Од својството 2° следува дека:

Опишаната кружница околу правилниот многуаголник и впишаната кружница во истиот многуаголник имаат заеднички центар, кој се вика центар на правилниот многуаголник.

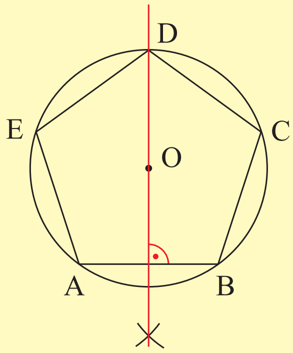
Ако центарот O на правилниот многуаголник го сврземе со неговите темиња, како што видовме, добиваме *n* складни рамнокраки триаголници. Еден од тие триаголници се вика **карактеристичен триаголник** на правилниот многуаголник (ΔAOB на црт. 31).

Основата на карактеристичниот триаголник е страна на правилниот многуаголник, краците му се радиуси (R) на опишаната кружница околу многуаголникот; а висината што ѝ одговара на неговата основа е радиус (r) на впишаната кружница. Таа висина се вика **апотема** на правилниот многуаголник. Аголот при врвот на карактеристичниот триаголник изнесува $\frac{360^o}{n}$ и се вика **централен агол** на правилниот многуаголник.

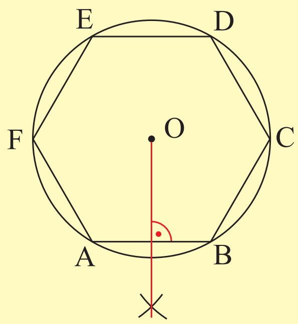


Црт. 31

3 **Секој правилен многуаголник е осно симетрична фигура**. **Негови оски на симетрија се симетралите на страните и симетралите на аглите**.



Црт. 32



Црт. 33

Навистина, симетралата на секоја страна на правилниот многуаголник минува низ центарот на опишаната кружница околу него (Зошто?). Значи, таа претставува оска на симетријата на опишаната кружница околу правилниот многуаголник (црт. 32 и 33).

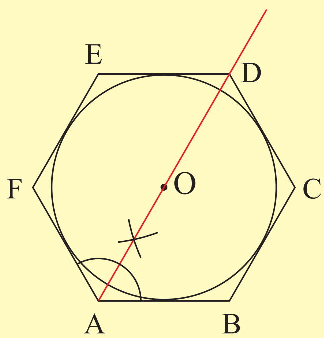
Симетралата пак на секој внатрешен агол на правилниот многуаголник минува низ центарот на впишаната кружница во него. Значи, таа е оска на симетријата на впишаната кружница, во правилниот многуаголник (црт. 34 и 35). Но, бидејќи кај правилниот многуаголник сите страни се еднакви и сите агли се еднакви, нивните симетрали ќе бидат оски на симетријата и на правилниот многуаголник. Со тоа ова својство е докажано.

Ако земеме предвид дека секоја оска на симетријата на правилниот многуаголник (и на секоја фигура) ја разделува неговата контура на два складни дела, тогаш од својството 3° не е тешко да заклучиме дека важи:

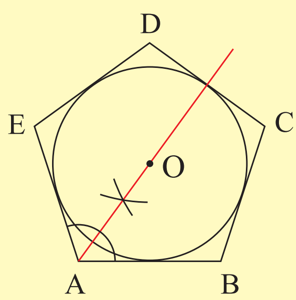
а) **Секоја оска на симетријата на правилен многуаголник со непарен број страни е истовремено симетрала на една страна и симетрала на аголот при спротивното теме** (црт. 32 и 35).

б) **Секоја оска на симетријата на правилен многуаголник со парен број страни е или заедничка симетрала на две спротивни страни, или заедничка симетрала на два спротивни агла** (црт. 33и34).

в) **Правилниот многуаголник страни има оски на симетрија**.



Црт. 34



Црт. 35

Видовме, спротивните страни кај правилните многуаголници со парен број страни имаат заедничка симетрала, а тоа може да биде ако и само ако тие се паралелни. Според тоа, важи:

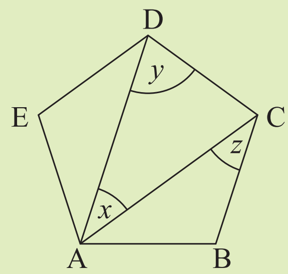
4 **Кај правилните многуаголници со парен број страни, спротивните страни се паралелни**.

Може да се докаже дека важи и следново својство:

5 **Еден правилен -аголник е централно симетричен, ако и само ако е парен број**.

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека големината на централниот агол на кој било правилен многуаголник е еднаква со големината на неговиот надворешен агол.
2. Одреди го централниот агол на правилниот:
а) триаголник, б) четириаголник, в) петаголник, г) шестаголник.
3. Одреди ги внатрешниот, надворешниот и централниот агол на правилен:
а) седумаголник, б) осумаголник, в) деветаголник.
4. Одреди кој правилен многуаголник има:
а) централен агол 45°, б) надворешен агол 30°, в) внатрешен агол 144°.
5. Постои ли правилен многуаголник во кој централниот агол има:
а) 17°, б) 20°, в) 25°, г) 45°, д) 50°, ѓ) 100°? Ако постои, кој е тој многуаголник?
6. Докажи дека дијагоналите AC и AD на правилниот петаголник ABCDE го разделуваат аголот BAE на три еднакви дела.
7. На цртежот 36 петаголникот ABCDE е правилен. Одреди ја големината на означените агли со x, y и z без мерење.



Црт. 36

8. Нацртај неправилен шестаголник, кој има само:
а) една оска на симетријата, б) две оски на симетријата.
9. Кај правилните многуаголници со непарен број страни дали постојат барем две оски на симетријата, што се заемно нормални? А кај правилните многуаголници со парен број на страни дали постојат барем две такви оски на симетрија?
10. Над страните на правилен шестаголник конструирај однадвор квадрати. Така добиената фигура колку има оски на симетрија и дали таа е централно симетрична?
11. Нацртај кружница и повлечи еден нејзин радиус, а потоа низ неговата средина повлечи тетива што е нормална на радиусот. Покажи дека таа тетива претставува страна на впишан рамностран триаголник во нацртаната кружница.

IV.10. **КОНСТРУКЦИЈА НА НЕКОИ ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ**

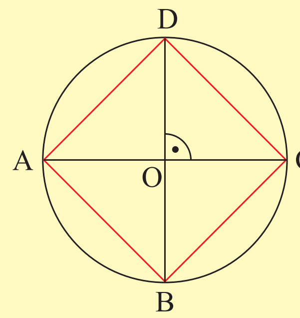
Знаеме да конструираме рамностран (правилен) триаголник кога е дадена неговата страна. Исто така знаеме да конструираме и квадрат (правилен четириаголник), кога е дадена страната.

Проблемот на конструкција на кој било правилен многуаголник се сведува на конструкција на неговиот карактеристичен триаголник АОВ (црт. 31). За конструкцијата на триаголникот АОВ треба да се знае или страната (a_n) на правилниот многуаголник, или радиусот (R) на опишаната кружница, или радиусот (r) на впишаната кружница, бидејќи аголот при врвот е $\frac{360^o}{n}$ секогаш да се конструира (само со помош на шестар и линијар), но тој секогаш може да се нацрта со доволна точност со агломер.

Конструкцијата (односно цртањето) на правилен многуаголник кога е даден радиусот на опишаната кружница околу него, или радиусот на впишаната кружница во него, се изведува кога кружницата со помош на централниот агол $\alpha=\frac{360^o}{n}$, прво, ја разделиме на складни делови, а потоа или разделните точки последователно ги соединуваме со тетиви, или во разделните точки конструираме тангенти на кружницата. Подолу ќе покажеме како вршиме конструкција на некои правилни многуаголници.

Задача 1. Да се конструира квадрат што е впишан во (или опишан околу) кружница со радиус r.

Решение. Конструираме кружница со радиус r и неа ја разделуваме на четири еднакви лаци. Тоа го постигнуваме со повлекување на два заемно нормални дијаметра на кружницата. Потоа со последователно соединување на четирите разделни точки го добиваме бараниот квадрат ABCD, што е впишан во дадената кружница (црт. 37).



Црт. 37

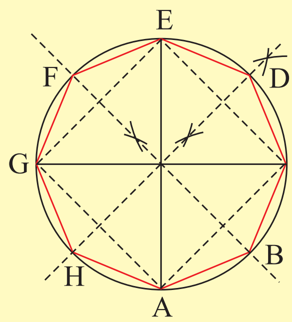
Ако, пак, низ секоја од четирите разделни точки повлечеме тангенти на кружницата, тогаш тие тангенти ќе образуваат квадрат, што е опишан околу дадената кружница. Бидејќи кружницата конструктивно може да се раздели на 4 еднакви делови, затоа со последователно преполовување на секој од добиените лаци, кружницата може конструктивно да ја разделиме и на 8,16,32,... еднакви делови.

На цртежот 38 е покажано како се конструира правилен осумаголник, што е впишан во дадена кружница.

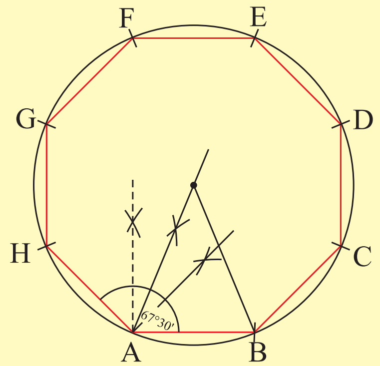
Задача 2. Да се конструира правилен осумаголник со страна долга a= 1,5 cm.

Решение. Карактеристичниот триаголник на правилниот осумаголник има централен агол $\alpha=\frac{360^o}{8}=45^o$, а агли при основата по 67°30’. Агол од 67°30’ конструираме кога имаме предвид дека 67°30’=45° $+\frac{45^o}{2}$, а потоа лесно можеме да го конструираме карактеристичниот триаголник АОВ на правилниот осумаголник со основа a = 1,5 cm.

Кружницата со центар O и радиус $R=\overline{A}=\overline{B}$ е опишана кружница на правилниот осумаголник. Темињата, пак, C, D, E, F, G и H ги добиваме со разделување на опишаната кружница со отвор на шестарот a=1,5 cm (црт. 39).



Црт. 38

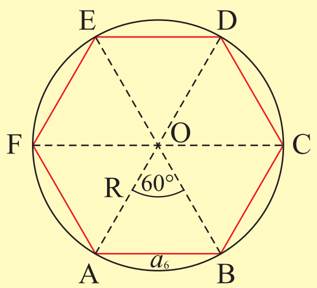


Црт. 39

Задача 3. Да се конструира правилен шестаголник со страна a=2cm.

Решение. Знаеме дека централниот агол на правилниот шестаголник изнесува $\alpha=\frac{360^o}{6}=60^o$. Според тоа, карактеристичниот триаголник на правилниот шестаголник е рамностран триаголник.

Оттука следува: Радиусот на опишаната кружница околу правилниот шестаголник е еднаков на должината на неговата страна, т.е. $R = a$.



Црт. 40

Овој факт ни дава можност на наједноставен начин да ја разделиме дадената кружница на 6 еднакви делови, односно да конструираме правилен шестаголник кога е даден радиусот на опишаната кружница, или должина на неговата страна. Тоа го правиме кога од произволна точка A на кружницата со радиус R=a со отвор на шестарот еднаков на радиусот ги конструираме точките B, C, D, E и F, а потоа последователно ги сврзуваме со отсечки и го добиваме правилниот шестаголник ABCDEF (црт. 40).

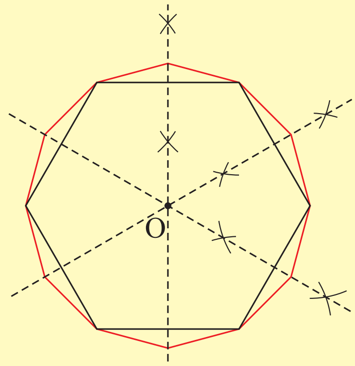
Забележуваме дека со оваа конструкција сме впишале и два рамнострани триаголника: ΔACE и ΔBDF.

Задача 4. Да се конструира правилен дванаесетаголник што е впишан во (или опишан околу) дадена кружница.

Решение. Прво дадената кружница, ја разделуваме на 6 складни лаци, а потоа со конструкција на нивните симетрали, таа (кружницата) се разделува на 12 еднакви делови (црт. 41).

Ако така добиените 12 разделни точки ги сврземе како што следуваат една со друга, го добиваме бараниот правилен дванаесетаголник, што е впишан во дадената кружница (црт. 41).

Ако, пак, во секоја од 12-те разделни точки повлечеме тангенти на кружницата, тогаш тие тангенти ќе образуваат правилен 12-аголник, што е опишан околу дадената кружница.



Црт. 41

Од правилниот 12-аголник на сличен начин може да се конструира и правилен 24-аголник, итн.

ЗАДАЧИ

1. Во кружница со радиус R=4 cm впиши:
а) квадрат, б) правилен осумаголник, в) правилен 16-аголник.

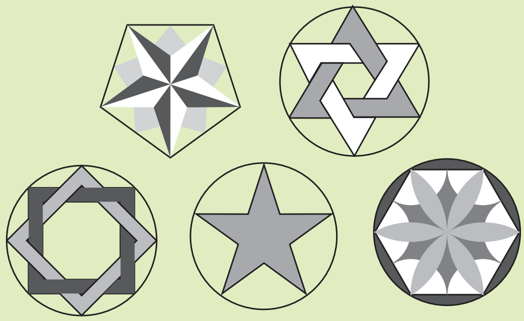
2. Конструирај квадрат, ако е дадена неговата:
а) страна *a*, б) дијагонала *d*.

3. На цртежот 42 нацртани се неколку фигури. Обиди се тие фигури да ги нацрташ во твојата тетратка.

4. Околу дадена кружница опиши правилен:
а) 6-аголник, б) 12-аголник.

5. Еден базен има форма на правилен шестаголник со страна *a* = 7,5 m. Нацртај го планот на тој базен во размер 1:250.

6. Во кружница со радиус R впиши рамностран триаголник.



Црт. 42

7. Со помош на агломер во кружница со радиус R=4cm впиши правилен:
а) петаголник, б) десетаголник.

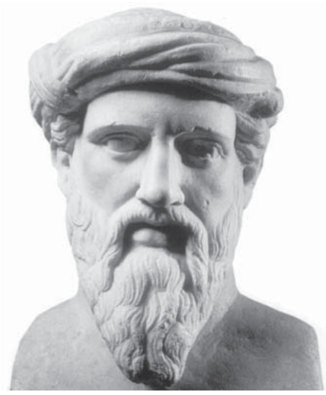
8. Со помош на агломер нацртај правилен петаголник со страна *a*=3cm.

IV.11. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

1. Правоаголниот триаголник е еднозначно определен со неговите катети, или со хипотенузата и една катета. Тоа значи дека: ако земеме две произволни отсечки за катети, тогаш со тоа и хипотенузата е наполно определена; или ако се дадени хипотенузата и една катета, тогаш со тоа и другата катета е наполно определена. Тоа покажува дека помеѓу должините на страните на правоаголниот триаголник постои некоја зависност. Таа зависност ни ја дава следнава:

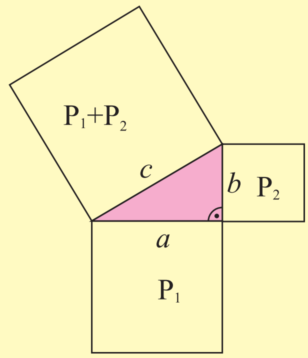
***ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА*. Во секој правоаголен триаголник квадратот на хипотенузата е еднаков на збирот од квадратите на катетите, т.е.** $^2 = \ ^2 + \ ^2$.

Оваа теорема е една од најважните и најприменуваните теореми во целата геометрија. Името го добила во чест на старогрчкиот математичар и филозоф Питагора, кој живеел во VI век пред нашата ера. Иако Питагоровата теорема била позната во Месопотамија пред Питагора, се претпоставува дека Питагора прв дал доказ на теоремата.



Питагора

За ценетоста на теорема говори и фактот што според преданијата, Питагора по откривањето на теоремата во знак на благодарност кон боговите, принел како жртви 100 бика.

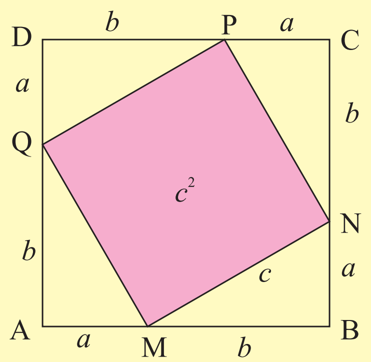


Црт. 43

На цртежот 43 нацртан е правоаголен триаголник со катети a и b, и хипотенуза c. Над трите страни од триаголникот конструирани се квадрати. Питагоровата теорема тврди дека квадратот над хипотенузата има плоштина еднаква на збирот од плоштините на квадратите конструирани над катетите.

2. За Питагоровата теорема постојат повеќе докази. Еден од нив е следниот:

Доказ (за оние кои сакаат да знаат повеќе). Да конструираме квадрат ABCD со страна $a+b$ (црт. 44). На страните AB, BC, CD и DA избираме точки M, N, P и Q така што $\overline{AM}=\overline{BN}=\overline{C\ \ }=\overline{D\ \ }=a$, а оттука и $\overline{MB}=\overline{NC}=\overline{\ \ D}=\overline{\ \ A}=b$. Триаголникот MBN е правоаголен со катети a и b, а хипотенузата да ја означиме со c. Триаголниците MBN, NCP, PDQ и QAM се складни. Затоа $\overline{MN}=\overline{N\ \ }=\overline{\ \ \ \ }=\overline{\ \ M}=c$. Ќе покажеме дека $\angle MNP=90°$. Навистина: $\angle BNM+\angle MNP+\angle PNC=180°$, $\angle BNM+\angle MNP+\angle NMB=180°$. Но, $\angle BNM+\angle NMB=90°$, бидејќи триаголникот MBN е правоаголен. Затоа $90°+\angle MNP=$l $80°$, па $\angle MNP=90°$.



Црт. 44

Аналогно се докажува дека $\angle NPQ=\angle PQM=\angle QMN=90°$. Затоа MNPQ е квадрат со страна c.

Квадратот ABCD е разделен на четири складни правоаголни триаголници со катети a и b и еден квадрат со страна c. Затоа ако ги споредиме нивните плоштини, добиваме:

$P_{ABCD} = 4\cdot P_{MBN}+P_{MNPQ}$, односно

$$(a+b)^2=4\cdot\frac{ab}{2}+c^2,\ a^2+2ab+b^2=2ab+c^2,\ \text{т.е.}\ \ ^2+\ ^2=\ ^2. \qquad (1)$$

Од равенството (1) следува:

$$\ ^2=\ ^2-\ ^2\ \text{ и }\ \ ^2=\ ^2-\ ^2, \qquad (2)$$

а од равенствата (1) и (2) добиваме:

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\ a=\sqrt{c^2-b^2}\ \text{ и }\ b=\sqrt{c^2-a^2}. \qquad (3)$$

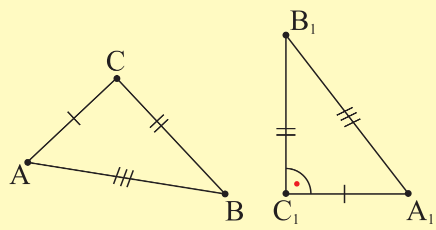
Со помош на формулите (3) може да се одреди должината на која било страна на правоаголниот триаголник, кога се дадени должините на другите две негови страни.

3. За Питагоровата теорема важи и нејзината

Обратна теорема: Ако квадратот на најголемата страна на еден триаголник е еднаков на збирот од квадратите на другите две страни, тогаш тој триаголник е правоаголен.

Доказ (за оние кои сакаат да знаат повеќе).

Нека за триаголникот ABC важи равенството $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ (црт. 45). Треба да докажеме дека триаголникот ABC е правоаголен.

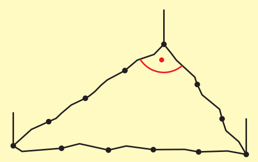


Црт. 45

Да конструираме правоаголен триаголник $A_1B_1C_1$, ($\angle C_1=90°$) со катети $\overline{A_1C_1}=\overline{AC}$ и $\overline{B_1C_1}=\overline{BC}$. Врз основа на Питагоровата теорема за $\Delta A_1B_1C_1$ имаме:

$\overline{A_1B_1}^2=\overline{A_1C_1}^2+\overline{B_1C_1}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$, т.е. $\overline{A_1B_1}=\overline{AB}$.

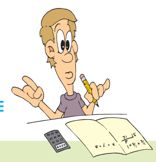
Според тоа, конструираниот правоаголен триаголник $A_1B_1C_1$, е складен со дадениот ΔABC (согласно признакот за складност ССС), а оттука следува дека и ΔABC е правоаголен. Со тоа теоремата е докажана.


Црт. 46

Оваа теорема ја користиме кога треба да докажеме дека даден триаголник со должини на страните a,b и c е правоаголен. На пример, триаголникот со страни 3, 4 и 5 единици е правоаголен, бидејќи важи равенството $3^2+4^2=5^2$. Тоа го знаеле уште старите Египќани, па затоа тој го добил името **египетски** триаголник. Врз основа на него во Египет конструирале (трасирале на терен) прав агол (црт. 46). Триаголникот со страни 5, 12 и 13 единици е исто правоаголен, бидејќи $5^2+12^2=13^2$. Тој им бил познат и на старите Индијци, па затоа го добил името **индиски триаголник**.

За кои било три природни броеви m, n и k за кои важи $m^2+n^2=k^2$ се викаат Питагорови тројки броеви. Такви тројки броеви се, на пример: 3, 4 и 5; 5, 12 и 13; 20, 21 и 29.

ЗАДАЧИ

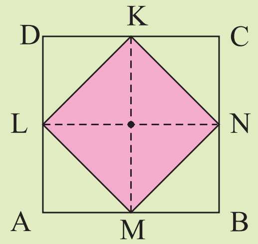


1 Одреди ја хипотенузата (c) на правоаголен триаголник, ако се познати неговите катети:
а) a=5cm, b=12cm, б) a=7cm, b=9cm, в) a=8cm и b=15cm.

2 Одреди ја должината на едната катета на правоаголен триаголник, кога се познати другата катета и хипотенузата:
а) a=14cm, c=18cm, б) a=24cm, c=26cm, в) a=3,3dm, c=6,5dm, г) b=8,5m, c=12m.

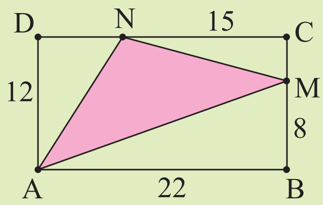
3 Пресметај го периметарот на правоаголен триаголник, ако се познати хипотенузата и едната катета:
а) c=65cm, b=48cm, б) c=28cm, a=20cm, в) c=17m, b=12,3m.

4 Квадратот ABCD има страна долга 8cm. Во него е впишан друг квадрат MNKL, чии темиња лежат во средините на страните на дадениот квадрат. Одреди го периметарот на квадратот MNKL (црт. 47).



Црт. 47

5 Пресметај го периметарот на триаголникот AMN, што е впишан во правоаголникот ABCD (црт. 48). Димензиите се во сантиметри.



Црт. 48

6 Катетата што лежи спроти аголот од 30° во правоаголен триаголник е долга $b$cm. Одреди го периметарот на тој триаголник.

7 Од едно пристаниште истовремено исловиле два брода и тоа едниот во насока југ со брзина 24km/h, а другиот во насока исток со брзина 18km/h. Одреди колку километри ќе бидат оддалечени еден од друг по 5 часа од тргнувањето.

8 Може ли должините на страните на правоаголниот триаголник да бидат изразени:
а) трите со парни броеви, б) трите со непарни броеви,
в) едната со парен, а другите две со непарни броеви,
г) едната со непарен, а другите две со парни броеви?

9 Испитај дали триаголникот е правоаголен, ако:
а) a=15cm, b=36cm, c=39cm, б) a=7cm, b=12cm, c=15cm,
в) a=20cm, b=13cm, c=25cm, г) a=9cm, b=12cm, c=15cm.

10 Познати ти се Питагоровите тројки броеви (3,4,5) и (5,12,13). Покажи како од нив се добиени следниве Питагорови тројки броеви:
а) (6,8,10), б) (9,12,15), в) (10,24,26), г) (15,36,39), д) (25,60,65), ѓ) (1,5;2;2,5).

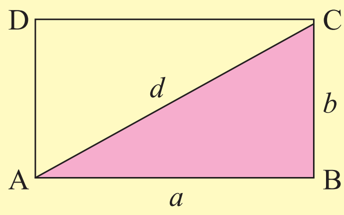
IV.12. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Питагоровата теорема има широка и разновидна примена во геометријата. Со повлекување на некои отсечки кај одредени рамнински фигури, како што ќе видиме, тие можат да се разделат на такви делови, меѓу кои ќе има и правоаголни триаголници. Тоа ќе го покажеме на следниве примери:

Задача 1. Да се одреди должината на дијагоналата d на правоаголник, чии страни се долги a=7cm и b=4cm.

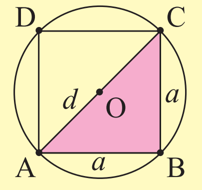
Решение. Со повлекување на една (која било) дијагонала во правоаголникот, истиот се разделува на два складни правоаголни триаголника (црт. 49). Од правоаголниот триаголник ABC, добиваме: $d^2=a^2+b^2$, односно

$d=\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$ (cm).



Црт. 49

Задача 2. Да се изразат должините на дијагоналата *d* и радиусот R на опишаната кружница околу квадрат преку неговата страна *a*.



Црт. 50

Решение. На цртежот 50 е нацртан квадрат ABCD со страна *a* и околу него е опишана кружница. Дијагоналата *d* го дели квадратот на два складни рамнокраки правоаголни триаголници, а таа е хипотенуза на секој од нив. Со примена на Питагоровата теорема на еден од нив, имаме:

$$d^2 = a^2+a^2 = 2a^2 \quad \text{или} \quad d=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}, \quad \text{т.е.} \quad d=a\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Според тоа:

Должината на дијагоналата на квадратот е еднаква на производот од должината на неговата страна и бројот $\sqrt{2}$.

Бидејќи радиусот R на опишаната кружница околу квадратот е половина од неговата дијагонала *d*, т.е. $R=\dfrac{d}{2}$, затоа:

$$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Задача 3. Да се одреди страната на квадрат, чија дијагонала е долга 8cm.

Решение. Од формулата $d=a\sqrt{2}$, имаме:

$$a=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{d\sqrt{2}}{2}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}\approx 4\cdot 1{,}41=7{,}6 \text{ (cm)}.$$

Значи, страната на квадратот е долга $a\approx 7{,}6$cm.

Задача 4. Да се пресмета периметарот на ромб, чии дијагонали се: 9cm и 12cm.

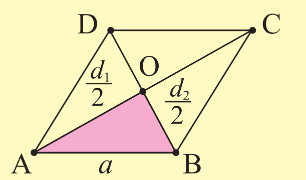
Решение. Познато е дека дијагоналите на ромбот при сечењето се преполовуваат и се нормални една на друга. Според тоа, тие го разделуваат ромбот на четири складни правоаголни триаголници. Од правоаголниот триаголник ABO (црт. 51), добиваме:

$$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2.$$

Оттука ја одредуваме страната на ромбот:

$$a^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{12}{2}\right)^2=4{,}5^2+6^2=20{,}56+36=56{,}25$$

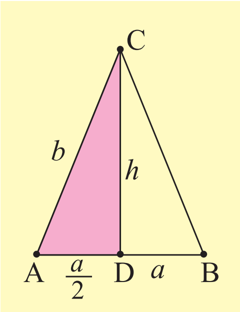
$$a=\sqrt{56{,}25}=7{,}5 \text{ (cm)}.$$



Црт. 51

Бараниот периметар на ромбот ќе биде: L = 4*a* = 4·7,5 = 30 (cm).

Задача 5. Да се пресмета висината   на рамнокрак триаголник, што е повлечена од врвот кон основата, ако се познати основата *a*=12cm и кракот *b*=15cm.



Црт. 52

Решение. Висината , што е повлечена кон основата, го разделува рамнокракиот триаголник на два складни правоаголни триаголника (црт. 52). Од правоаголниот ΔADC, добиваме:

$$^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 .$$

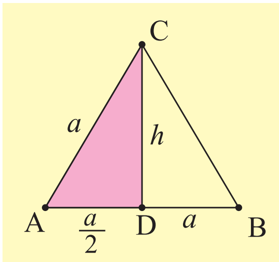
Оттука $\ = \sqrt{225-36} = \sqrt{189} \approx 13{,}7$ (cm).

Задача 6. Да се докаже дека за рамностраниот триаголник со страна *a* важат формулите:

а) $\boxed{\ = \frac{a\sqrt{3}}{2},}$ б) $\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{3},}$ в) $\boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{6},}$ (3)

каде што , R и *r* се соодветно, висината, радиусот на опишаната и радиусот на впишаната кружница кај него.

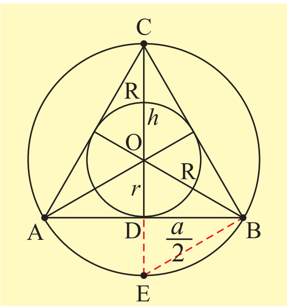
Доказ. а) Со повлекување на која било висина , рамностраниот триаголник ABC (црт. 53.) се разделува на два складни правоаголни триаголника. Од правоаголниот триаголник ADC (или DBC), добиваме:



Црт. 53

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ а оттука } \ = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Според тоа, важи $\boxed{\ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.}$



Црт. 54

б), в) На цртежот 54 е нацртан рамностран триаголник ABC, во него и околу него е впишана и опишана кружница.

Познато е дека висините на рамностраниот триаголник се истовремено и негови тежишни линии, а тежишните линии се сечат во една точка, која ја дели секоја тежишна линија на делови во размер 2:1 сметајќи од темето. Според тоа, важи

$$\frac{\overline{\ C}}{\overline{\ D}} = \frac{2}{1}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{R}{r} = \frac{2}{1}, \quad \text{а оттука} \quad R = 2r .$$

Бидејќи R+*r*= , затоа 2*r*+*r*= , 3*r*=   или $r = \frac{1}{3}\ $. Но бидејќи R=2*r*, имаме $R = \frac{2}{3}\ $.

Според тоа, важат формулите: $\boxed{R = \frac{2}{3}\ ,}$ а $\boxed{r = \frac{1}{3}\ .}$ (4)

Ако во формулите (4) висината ја замениме со изразот за неа $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, добиваме

$$R = \frac{2}{3}\ = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{3}\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Според тоа, важат формулите: $\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$ и $\boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.}$ (5)

Задача 7. Да се одредат висината и радиусите на опишаната и впишаната кружница на рамностраниот триаголник со страна a=12 cm.

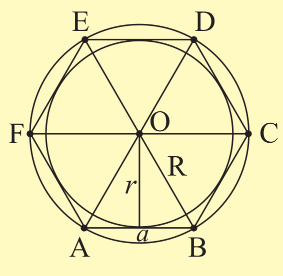
Решение. Користејќи ги изведените формули во претходната задача, добиваме:

$$=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\approx 6\cdot 1{,}73\approx 10{,}38\approx 10{,}4 \text{ (cm)},$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\approx 4\cdot 1{,}73\approx 6{,}92\approx 6{,}9 \text{ (cm)},$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{12\sqrt{3}}{6}=2\sqrt{3}\approx 2\cdot 1{,}73\approx 3{,}46\approx 3{,}5 \text{ (cm)}.$$

Задача 8. Да се изразат радиусите R и r на опишаната и впишаната кружница на правилен шестаголник преку неговата страна a.



Црт. 55

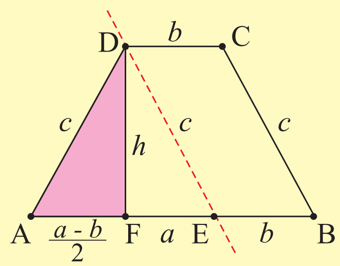
Решение. Конструирајте правилен шестаголник со страна a, па во него и околу него впишете и опишете кружница (црт. 55). Ако центарот на правилниот шестаголник го соединиме со секое теме, истиот се разделува на шест складни рамнострани триаголници (Зошто?). Оттука следува дека радиусот на опишаната кружница околу правилниот шестаголник е еднаков со должината на неговата страна a, т.е. важи:

$$= \,. \qquad (6)$$

Од цртежот 55 гледаме дека радиусот на впишаната кружница во правилниот шестаголник е еднаков со висината на рамностраниот триаголник ABO, т.е. важи формулата

$$\boxed{r=\frac{a\sqrt{3}}{2}.} \qquad (7)$$

Задача 9. Да се одреди висината на рамнокрак трапез ABCD, со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ и крак $\overline{AD}=\overline{BC}=c$ (црт. 56).

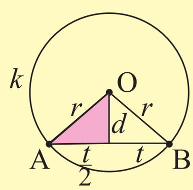


Црт. 56

Решение. Низ темето D да повлечеме права DE паралелна со кракот BC. Тогаш рамнокракиот трапез ќе се раздели на паралелограмот BCDE и еден рамнокрак триаголник AED, со основа $\overline{A\ }=a-b$ и висина $\overline{D\ }=$. Висината DF го дели рамнокракиот триаголник AED на два складни правоаголни триаголници. Од нив добиваме:

$$^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \text{ односно } =\sqrt{c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}\ .\text{т}$$

Задача 10. Во кружница со радиус r = 4cm е повлечена тетива долга =6,4cm. Да се одреди растојанието на таа тетива од центарот на кружницата.

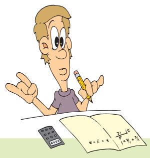


Црт. 57

Решение. Од рамнокракиот триаголник ABO, односно од правоаголниот триаголник ADO на цртежот 57, добиваме:

$$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{\ }{2}\right)^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{6{,}4}{2}\right)^2}=\sqrt{16-3{,}2^2}=\sqrt{5{,}76}=2{,}4 \text{ (cm)}.$$

ЗАДАЧИ

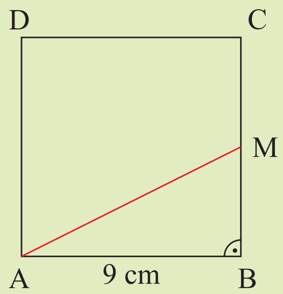


1 Одреди ја дијагоналата на правоголник, чии страни се:
а) a = 7cm, b = 9cm, б) a = 6,2 cm, b = 8,5 c .

2 Во областа на еден прав агол лежи точка M, која од неговите краци е оддалечена 4,8 cm и 1,4 cm. Одреди колку е оддалечена точката M од темето на правиот агол.

3 Одреди ја должината на дијагоналата на квадрат, чија страна е долга a = 6cm.

4 Во квадрат со страна 9cm едно теме е сврзано со средината на една страна на која не лежи тоа теме. Пресметај ја должината на повлечената отсечка (црт. 58).



Црт. 58

5 Одреди ја страната на квадрат, чија дијагонала е 3cm.

6 Пресметај ја висината на рамнокрак триаголник, ако се познати неговата основа a=7cm и кракот b=5,5cm.

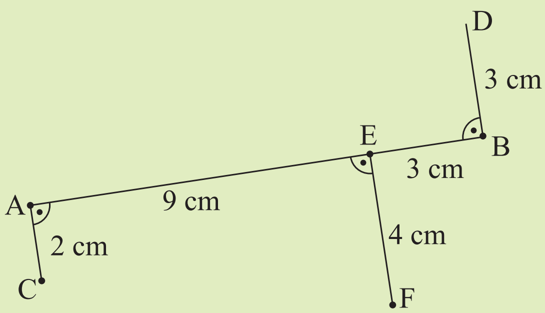
7 Нацртај два квадрата секој со страна 3,5cm, исечи ги, а еден од нив исечи го и по дијагоналата. Од добиените делови состави рамнокрак правоаголен триаголник и одреди го неговиот периметар.

8 Одреди ги радиусите на впишаната и опишаната кружница на рамностран триаголник со страна a =22,5cm.

9 Пресметај ги периметарот, радиусот на впишаната и на опишаната кружница на рамностран триаголник чија висина е 18cm.

10 Двете основи на еден правоаголен трапез се долги 5cm и 10cm, а неговиот подолг крак има должина 13cm. Најди ја висината на трапезот.

11 Одреди ги растојанијата $\overline{B\ }$, $\overline{C\ }$ и $\overline{CD}$ на цртежот 59.



Црт. 59

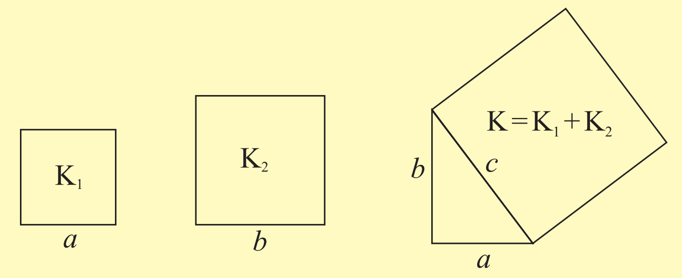
IV.13. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА ВО КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

1. Со примсна на Питагоровата теорема може да се решаваат и некои конструктивни задачи, на пример:

Задача 1. Дадени се два квадрата $K_1=a^2$ и $K_2=b^2$ (црт. 60). Да се конструира квадрат K, чија плоштина е еднаква на збирот од плоштините на дадените квадрати, т.е. $K=K_1+K_2$.

Решение. Бараниот квадрат $K=c^2$ е квадратот над хипотенузата c на правоаголниот триаголник, чии катети се a и b (страните на квадратот K_1 и квадратот K_2) (црт. 60), бидејќи е:

$$c^2=a^2+b^2, \text{ а со тоа и } K=K_1+K_2.$$

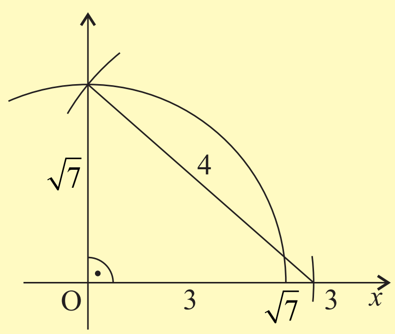


Црт. 60

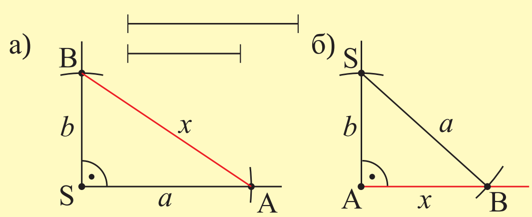
На цртежот 61 покажано е како со користење на равенството $\sqrt{7}=\sqrt{4^2-3^2}$ може да се конструира точка на бројната оска што одговара на бројот $\sqrt{7}$.

Задача 2. Да се конструира отсечка со должина x, така што:
а) $x=\sqrt{a^2+b^2}$, б) $x=\sqrt{a^2-b^2}$, $(a>b)$, каде што a и b се должини на две дадени отсечки.

Решение. а) Земајќи ја предвид Питагоровата теорема, бараната отсечка со должина $x=\sqrt{a^2+b^2}$ може да се разгледува како хипотенуза на правоаголен триаголник SAB со катети $\overline{\ A}=a$ и $\overline{\ B}=b$ (црт. 62а). б) Бараната отсечка со должина $x=\sqrt{a^2-b^2}$ може да се разгледува како катета на правоаголниот триаголник ABS, чија хипотенуза е дадената отсечка a, а другата катета е отсечката b (црт. 62б).



Црт. 61

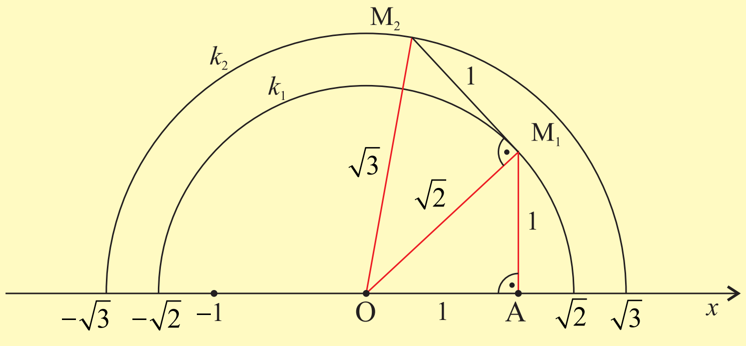


Црт. 62

2. (**За оние кои сакаат да знаат повеќе**) Видовме како може да се конструираат точките на бројната оска на некои ирационални броеви, на пример $\sqrt{7}$. Меѓутоа на истиот начин не може да се конструира точката што одговара на ирационалниот број $\sqrt{6}$. Затоа сега ќе покажеме како може да се конструираат точки на бројната оска што им ги придружуваме на ирационалните броеви $\sqrt{n}$, каде n е кој било природен број кој не е полн квадрат ($n \in \{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,\dots\}$).

Задача 3. На бројната оска да ги конструираме точките што им ги придружуваме на броевите $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

Решение. Прво конструираме правоаголен триаголник OAM_1, чии катети се единечни отсечки $\overline{OA} = \overline{AM_1}=1$ (црт. 63).



Црт. 63

Согласно Питагоровата теорема должината на хипотенузата на тој триаголник е

$$\overline{OM_1} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AM_1}^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Потоа цртаме кружница k_1, со центар O и радиус $r = \overline{OM_1}$. Таа ќе ја пресече бројната оска во две точки, на кои им го придружуваме бројот $\sqrt{2}$, односно $-\sqrt{2}$ (црт. 63).

Ако отсечката $\overline{OM_1} = \sqrt{2}$, ја земеме за една катета, а за друга катета ја земеме отсечката M_1M_2 со должина 1, тогаш ќе го добиеме правоаголниот триаголник OM_1M_2, чија хипотенуза има должина

$$\overline{OM_2} = \sqrt{\overline{OM_1}^2 + \overline{M_1M_2}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{3}.$$

Кружницата k_2 со центар O и радиус $\overline{OM_2} = \sqrt{3}$ ќе ја пресече бројната оска во две точки на кои им ги придружуваме броевите $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

Задача 4. На бројната оска да ги конструираме точките што им одговараат на броевите $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$

Решение. Прво конструираме правоаголен триаголник OAM_1, чии катети се $\overline{OA} = 2$ и $\overline{AM_1} = 1$ (црт. 64). Хипотенузата на тој правоаголен триаголник ќе биде

$$\overline{OM_1} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

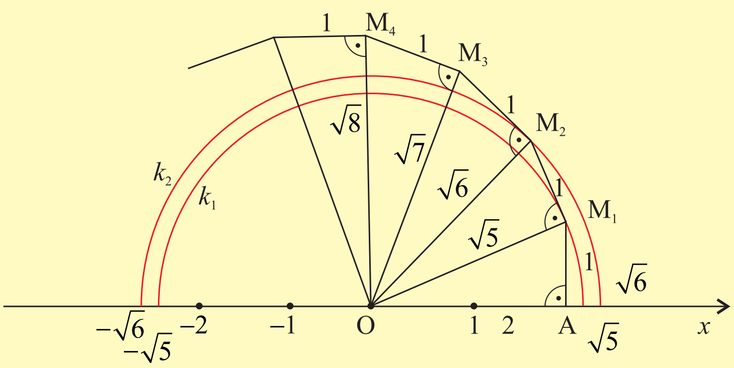
Кружницата k_1, со центар O и радиус $\overline{OM}_1 = \sqrt{5}$ ќе ја пресече бројната оска во точки што им ги придружуваме на бројот $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

За правоаголниот триаголник OM_1M_2, имаме $\overline{OM}_1 = \sqrt{5}$, $\overline{M_1M}_2 = 1$,

$$\overline{OM}_2 = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}.$$

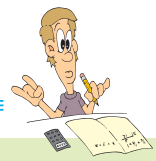
Кружницата k_2 со центар O и радиус $\overline{OM}_2 = \sqrt{6}$ ќе ја пресече бројната оска во точките што им одговараат броевите $\sqrt{6}$, односно $-\sqrt{6}$, итн. (црт. 64).

Во општ случај, ако за даден број n важи $k^2 < n < (k+1)^2$, тогаш тргнувајќи од отсечка со должина k и применувајќи $= n - k^2$ чекори како во претходните примери, ќе добиеме отсечка со должина $\sqrt{n}$.



Црт. 64

ЗАДАЧИ



1. Конструирај точки на бројната оска на кои им ги придружуваме броевите:

   а) $\sqrt{10}$ и $-\sqrt{10}$, користејќи го равенството $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$,

   б) $\sqrt{8}$ и $-\sqrt{8}$, користејќи дека $\sqrt{8} = \sqrt{3^2 - 1^2}$.

2. Конструирај квадрат еднаков на разликата на два дадени квадрата.

3. Дадени се две отсечки со должини a и b. Конструирај отсечки со должини x и y, така што $x = \sqrt{a^2 + 4b^2}$, $y = \sqrt{a^2 - 4b^2}$.

4. Дадена е отсечка долга a cm. Конструирај отсечка со должина $x = \sqrt{a^2 + 1}$.

5. Ако a и b $(a>b)$ се должини на две дадени отсечки, конструирај отсечка со должина:

   а) $\sqrt{a^2 + 4b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}$, б) $a - \sqrt{a^2 - b^2}$.

6. Конструирај отсечка со должина $\sqrt{a^2 + 2ab}$, користејќи дека $a^2+2ab = (a+b)^2-b^2$.

IV.14. **ПОИМ ЗА ПЛОШТИНА**

Практичните потреби ги натерале луѓето рамните површини (на пример: две парцели, два килима, два листа хартија и сл). да ги споредуваат меѓу себе по големина. За да би можеле да го вршиме тоа споредување, на површините им придружуваме броеви според некоја постапка, па така нивните големини ги изразуваме и споредуваме со помош на тие броеви.

Бројот, што ја изразува големината на дадена рамна површина, се вика **плоштина** на таа површина. За одредување на плоштината на рамните површини потребно е, пред сé, една површина да се земе за **единица плоштина**.

За единица плоштина е прифатена плоштината на квадрат, чија страна има единица должина. На пример, за единица плоштина може да се земе плоштината на квадрат со страна долга 1 m (1cm, 1 dm, 1 km). Плоштината на тој квадрат се вика **квадратен метар** (**квадратен сантиметар**, **квадратен дециметар**, **квадратен километар**) и се означува со 1 m^2 (1 cm^2, 1 dm^2, 1 km^2).

Одредувањето на плоштината, т.е. одредувањето на бројот кој покажува колку пати единицата плоштина се содржи во разгледуваната површина, многу ретко може да се изврши со мерење-непосредно пренесување на единицата плоштина. Затоа во геометријата изведуваме формули, со чија помош врз основа на должините на страните (или некои други елементи) со пресметување ја одредуваме плоштината на разгледуваната површина.

Плоштината на површините ќе ја означуваме со буквата P.

Во оваа тема ние ќе изведеме соодветни формули за наоѓање на плоштината на различните многуаголници и кругот. Притоа, секогаш ќе се потпреме на следниве две основни својства на плоштините, што ќе ги прифатиме без доказ:

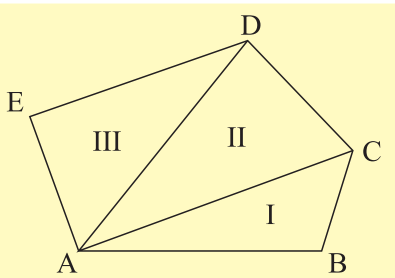
1 . **Складните фигури имаат еднакви плоштини**, т.е.

$$\Phi \cong F \Rightarrow P_{\phi}=P_{F}\,.$$

2°. **Ако дадена фигура Φ со некоја линија е разделена на две фигури Φ_1 и Φ_2, тогаш нејзината плоштина е еднаква на збирот од плоштините на тие две фигури**, т.е.

$${}_{\Phi} = {}_{\Phi_1} + {}_{\Phi_2}\,.$$

На пример, плоштината на петаголникот на цртежот 65 е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците I, II и III.



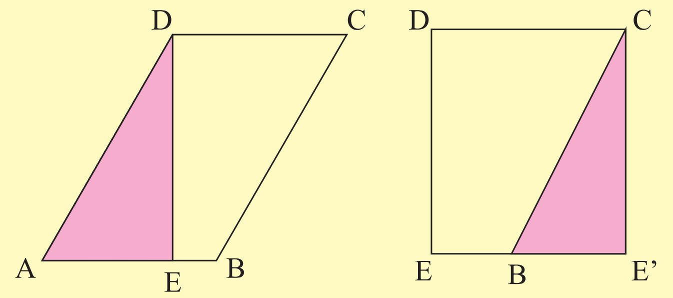
Црт. 65

За две фигури, кои имаат еднакви плоштини, ќе велиме дека се **еднакво плошни** (или **еквивалентни**). Од својството 1° следува дека: Складните фигури се еднакво плошни. Меѓутоа, обратното не е точно, т.е. ако две фигури се еднакво плошни, тие не мораат да бидат и складни.

На пример, кога од паралелограмот ABCD на цртежот 66 отсечеме еден негов дел (правоаголниот триаголник ADE) па составиме нова фигура (правоаголникот EE’CD), јасно е дека новата фигура е еднакво плошна со паралелограмот, но, таа не е складна со него.

Велиме дека паралелограмот ABCD (црт. 66) е **„претворен“** во правоаголникот EE’CD (со иста плоштина).

Да се претвори една фигура во друга сакана фигура, значи да се промени само нејзината форма, но не и нејзината плоштина.

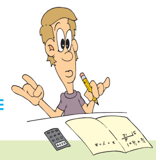


Црт. 66

1. Што значи да се одреди плоштината на една фигура?

2. Кои основни својства ги имаат плоштините на фигурите?

ЗАДАЧИ



3. Една парцела има плоштина 10 ha. Изрази ја нејзината плоштина во:
а) ари, б) квадратни метри, в) кв. километри.

4. Дали е точно дека:
а) Секои две складни фигури се еднакво плошни,
б) Секои две еднакво плошни фигури се складни,
в) Не секои две еднакво плошни фигури се складни?

5. Даден квадрат е разрежан по неговите дијагонали. Кои геометриски фигури може да се состават од добиените триаголници? Какви се така добиените фигури?

6. Нацртај произволен правоаголник и повлечи ја едната негова дијагонала. Изрежи ги двата добиени правоаголни триаголници. Кои различни фигури може да се состават од тие триаголници?

7. Нацртај правоаголник, чија една страна има двапати поголема должина од другата. Со цртеж покажи како треба да се разреже тој правоаголник на два дела, од кои ќе може да се состави:
а) рамнокрак триаголник, б) правоаголен триаголник.

IV. 15. **ПЛОШТИНА НА ПРАВОАГОЛНИК**

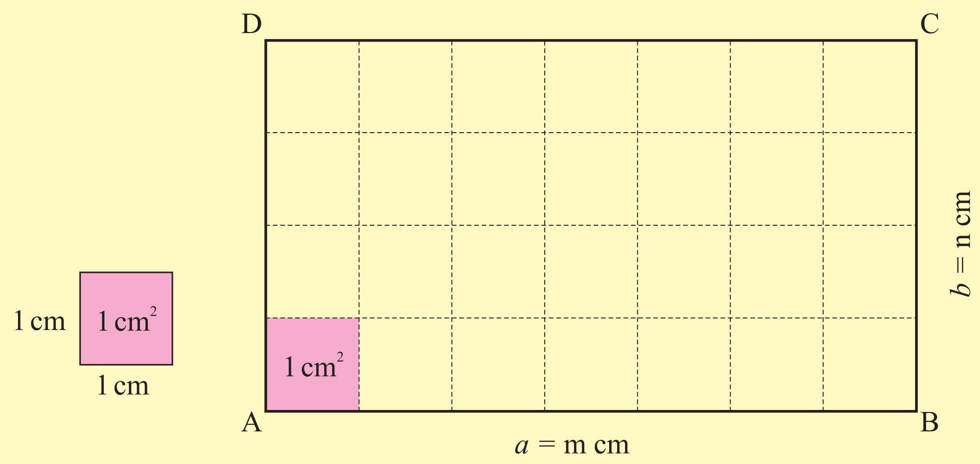
Порано научивме дека плоштината на секој правоаголник со должини на соседните страни a и b, ја пресметуваме со формулата

= · , т.е. важи следнава:

***Теорема*. Плоштината на секој правоаголник е еднаква на производот од должините на неговите две соседни страни.**

Доказ. Нека е даден правоаголникот ABCD, чии соседни страни се долги a=m cm и b=n cm, каде што и n се природни броеви (црт. 67). Во тој случај правоаголникот ABCD е составен од mn квадрати со страна 1 cm (црт. 67). Сите тие квадрати се складни, па според својството 1° тие имаат една иста плоштина 1cm^2. Според тоа, согласно својството 2° бараната плоштина на правоаголникот ќе биде P=(m· n) cm^2, или P=(cm)· (n cm), односно

= · .



Црт. 67

На цртежот 67 правоаголникот ABCD е со страни a=7cm и b=4cm. Тој е составен од 7· 4=28 складни квадратчиња од по 1 cm^2. Неговата плоштина ќе биде P = ab = (7· 4) cm^2 = 28 cm^2, каде што неименуваниот број 28 се вика **мерен број** на плоштината на правоаголникот ABCD при мерна единица 1 cm^2.

Доказот дека горнава формула важи и кога мерните броеви на должините на страните се рационални или ирационални броеви го изоставаме.

Должините на две соседни страни на правоаголникот често ги викаме **димензии**. Ако една од страните на правоаголникот ја избереме за **основа**, тогаш нејзината соседна страна е **висина** на правоаголникот.

Пример. Да се одреди плоштината на правоаголник, чии димензии се a=1,2 dm и b=7 cm.

Решение. Пред да ги замениме мерните броеви на димензиите во формулата за плоштина на правоаголникот, нив претходно треба да ги изразиме во иста единица должина. Така за a = 1,2 dm = 12 cm и b =7 cm, добиваме: $=a\cdot b= 12\cdot 7 = 84$ cm^2.

1 Пресметај ја плоштината на правоаголник, чии страни се долги:

а) a=1,7 dm и b=6cm , б) a=1,2 m и b=4 dm.

Бидејќи квадратот е специјален случај на правоаголник (тој има еднакви соседни страни, т.е. $b = a$), затоа формулата за неговата плоштина ќе биде: P = $a\cdot a$, т.е. **P**= ^{2}.

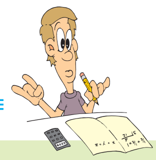
На пример, квадрат со страна долга a=6 cm има плоштина

$$P= a^2 = 6^2=36\ cm^2.$$

2 Колкава плоштина има квадрат со страна:

а) $\sqrt{3}$ cm, б) $\frac{3}{5}$ m.

ЗАДАЧИ



3 Дадена е плоштината на правоаголникот ABCD и една негова страна. Одреди ја другата страна на правоаголникот, ако:

а) P=1400 m^2, a = 35 m, б) P=53,3 dm^2, b=6,5 dm.

4 Нацртај четири правоаголници, од кои секој да има плоштина 24cm^2, а основата да му е долга: а) 4 cm, б) 5 cm, в) 6 cm, г) 8 cm.

5 Како ќе се промени плоштината на даден правоаголник, ако:

а) основата се зголеми 2 пати, а висината остане иста,

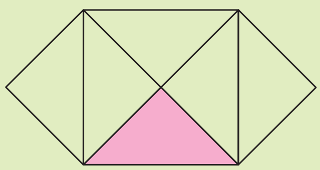
б) основата се зголеми 3 пати, а висината се зголеми 2 пати?

6 Конструирај квадрат, што е еднакво плошен со даден правоаголник чии димензии се a = 6 cm и b = 24 cm.

7 Колку различни правоаголници може да се нацртаат при услов: страните да му се изразени во цел број сантиметри, а периметарот на секој од нив да е еднаков на 16 cm. Кој од тие правоаголници ќе има најголема плоштина?

8 Квадрат со страна 7,5cm и правоаголник со една страна 5cm имаат еднакви периметри. Која од тие две фигури има поголема плоштина?

9 Кај Индијците пронајден е цртежот 68. Што покажува тој цртеж? Дали тој е во врска со Питагоровата теорема?



Црт. 68

10 За колку проценти ќе се зголеми плоштината на квадратот со страна a=8cm, ако страната му ја зголемиш за:

а) 2cm, б) 4cm?

IV.16. **ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ**

Ќе ја докажеме следнава:

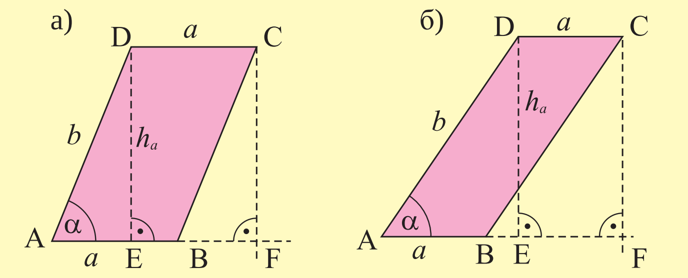
Теорема. **Плоштината на паралелограмот е еднаква на производот од должините на основата и соодветната висина, т.е.**

$$= \cdot \ .$$

Доказ. Нека е даден паралелограмот ABCD, што не е правоаголник. Должината на неговата основа и соодветната висина да ги означиме со a и $_a$. Треба да докажеме дека за плоштината на паралелограмот ABCD важи формулата

$$= \cdot \ . \qquad (1)$$

Низ темињата C и D да повлечеме нормали на правата AB. Притоа го добиваме правоаголникот EFCD, чија основа и висина се соодветно еднакви со основата и висината на дадениот паралелограм. Од цртежот 69 гледаме дека точката F секогаш лежи надвор од отсечката AB, а за точката E можни се два случаја: E∈AB (црт. 69а), или E∉AB (црт. 69б). Меѓутоа и во двата случаја важи:



Црт. 69

$_{A\ CD} = \ _{ABCD} + \ _{BC}$ и $_{A\ CD} = \ _{CD} + \ _{A\ D}$

односно $_{ABCD} + \ _{BC} = \ _{CD} + \ _{A\ D}$. (2)

Но, правоаголните триаголници BCF и ADE се складни. Докажете. Значи

$$_{BC} = \ _{A\ D} .$$

Затоа од равенството (2) следува дека

$$_{ABCD} = \ _{CD} .$$

Но, $P_{EFCD}=a \ _a$, а тоа значи дека

$$_{ABCD} = a \cdot \ _a .$$

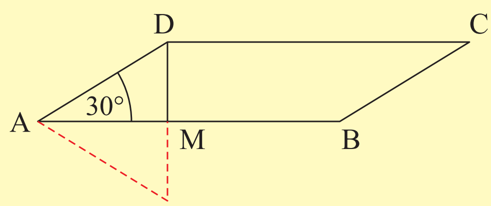
Со тоа теоремата е докажана.

Ако за основа на паралелограмот ABCD се избере другата негова страна b, тогаш висината кон неа е $_b$, па ќе биде

$$= \ .$$

Задача. Даден е паралелограм со страни a=15cm и b=8cm и остар агол α=30°. Да се одредат двете висини $_a$ и $_b$.

Решение. Нека ABCD е дадениот паралелограм, при што $\overline{AB}$=15cm и $\overline{AD}$=8cm. Нека DM е висина на страната AB. Бидејќи ∠BAD=30° добиваме дека триаголникот ADM е половина од рамностраниот триаголник со страна 8cm (црт. 70). Затоа $_a=\overline{DM}$ =4cm па плоштината на паралелограмот е P=15· 4=60 (cm^2).



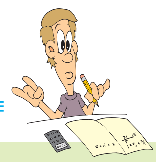
Црт. 70

Потоа од формулата P=b $_b$, добиваме:

$$_b=\frac{}{b}=\frac{60}{8}=7{,}5\,(\text{cm}).$$

Значи, $_a$=4cm и $_b$=7,5cm.

1 Пресметај ја плоштината на паралелограм, чија основа и висна се:
а) a=10,4cm, $_a$=6cm, б) a=2,5cm, $_a$= 1dm.



ЗАДАЧИ

2 Паралелограм со основа a=8cm има плоштина P=32cm^2. Одреди ја висината $_a$ на паралелограмот.

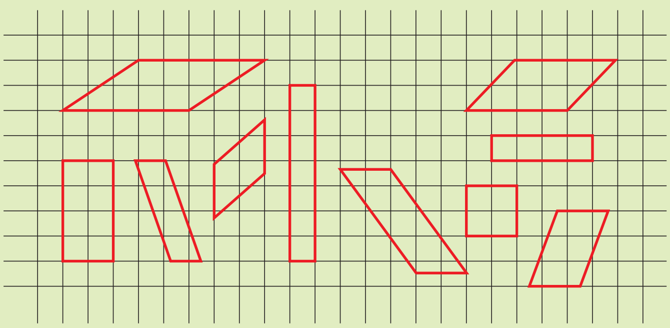
3 Едната страна на ромбоидот е долга 15cm, а соодветната висина е долга 8cm. Ако другата страна на ромбоидот изнесува 12cm колкава е висината што и одговара?

4 Познати се должините на страните на паралелограмот a=4cm и b=5cm и поголемата негова висина =3cm. Пресметај ја плоштината на паралелограмот.

5 Плоштината на паралелограмот е еднаква на 36cm^2, а неговите висини се долги 4cm и 6cm. Одреди го неговиот периметар.

6 Плоштината на ромбот ABCD е 36cm^2, а периметарот му е 36cm. Одреди ја висината на тој ромб.

7 Покажи кои паралелограми на цртежот 71 се еднакво плошни.

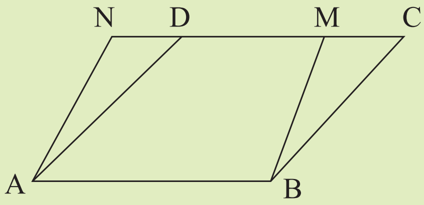


Црт. 71

8 Даден е квадрат ABCD. Конструирај паралелограм со основа AB и остар агол 60°, што е еднакво плоштен со дадениот квадрат.

9 Докажи дека паралелограмите ABCD и ABMN на цртежот 72 се еднакво плошни, каде што $\overline{MC} = \overline{ND}$.

10 Даден е паралелограм со страни a=6cm, b=4cm и остар агол 45°. Одреди ја плоштината на тој паралелограм.



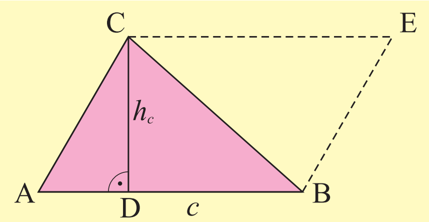
Црт. 72

IV.17. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

1. За плоштината на триаголник важи следнава:

Теорема 1. **Плоштината на секој триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на основата и соодветната висина, т.е.** $= \frac{a \;\, {}_{a}}{2}$.

Доказ. Нека е даден триаголникот ABC (црт. 73). Должините на основата AB и соодветната висина да ги означиме со c и ${}_{c}$.



Црт. 73

Ако низ темињата B и C повлечеме прави паралелни со спротивните страни AC и AB на триаголникот ќе го добиеме паралелограмот ABEC, кој има иста основа и иста висина како и триаголникот ABC. Бидејќи паралелограмот ABEC се состои од два складни триаголника ABC и BEC, затоа плоштината на секој од нив е еднаква на половината од плоштината на паралелограмот ABEC.

Но, $P_{ABEC} = c \cdot \;{}_{c}$ па според тоа, плоштината на дадениот триаголник ABC, ќе биде

$$= \frac{c \;\, {}_{c}}{2}.$$

Аналогно важат и формулите $= \frac{a \;\, {}_{a}}{2}$ и $= \frac{b \;\, {}_{b}}{2}$. (1)

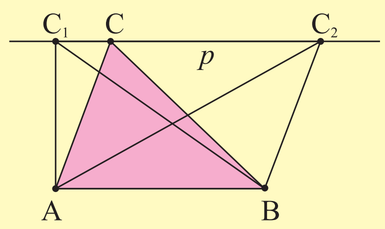
Со тоа теоремата е докажана. Од неа следува следнава:

Последица 1. **Триаголници, кои имаат една иста основа, а врвовите им лежат на права паралелна со основата, се еднакво плошни** (црт. 74).

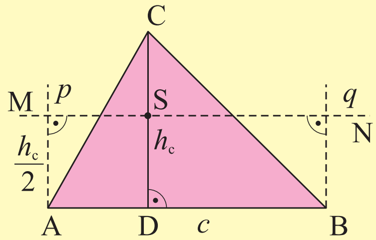
Формулата за плоштина на триаголникот може да се запише и вака: $= c \cdot \frac{\;{}_{c}}{2}$, а тоа покажува дека ќе важи и следнава:

Последица **. Триаголникот е еднакво плошен со правоаголник со истата основа и со висина еднаква на половина од соодветната висина на триаголникот** (црт. 75).

Докажете.



Црт. 74



Црт. 75

Формулата за плоштина на триаголникот може да се запише уште и вака:

$= \frac{c}{2} \cdot {}_c$. Што покажува тој запис?

1 Пресметај ја плоштината на триаголникот, ако основата (a) и соодветната висина $({}_a)$ изнесуваат:

а) a=18cm, ${}_a$=12cm, б) a=2,4dm, ${}_a$=3dm, в) a=8,6m, ${}_a$=5m.

Да разгледаме рамностран триаголник со страна a. Знаеме дека секоја од неговите висини е долга $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Затоа плоштината на триаголникот е $= \frac{1}{2}a \quad = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а со тоа ја добиваме:

Последица 3. **Плоштината на рамностран триаголник со страна е еднаква на**

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \qquad (2)$$

2. Старогрчкиот математичар Херон ја добил следнава формула, која по него се вика **Херонова формула**, за пресметување на плоштината на триаголник според трите негови страни a, b и c:

$$= \sqrt{\ (\ -a)(\ -b)(\ -c)}\ , \qquad (3)$$

каде што е полупериметарот $= \frac{a+b+c}{2}$ на триаголникот.

Пример 1. Триаголникот ABC има страни: a=16cm, b=11cm и c=9cm. Да се пресмета неговата плоштина.

Решение. Дадениот триаголник има полупериметар

$$= \frac{a+b+c}{2} = \frac{16+11+9}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ (cm)}.$$

Користејќи ја Хероновата формула лесно ја добиваме плоштината на дадениот триаголник ABC:

$$=\sqrt{\ (\ -a)(\ -b)(\ -c)}=\sqrt{18(18-16)(18-11)(18-9)}=$$

$$=\sqrt{18\cdot 2\cdot 7\cdot 9}=\sqrt{36\cdot 7\cdot 9}=6\cdot 3\sqrt{7}=18\sqrt{7}\approx 47{,}7$$

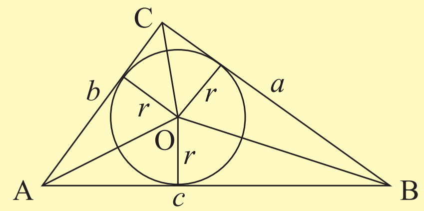
Значи, бараната плоштина на триаголникот ABC е P$\approx$47,7cm^2.

3. Ќе дадеме уште една формула за пресметување плоштина на триаголник. Ќе покажеме дека важи следнава

Теорема 2. **Плоштината на триаголник е еднаква на производот од полупериметарот и радиусот на вписаната кружница, т.е.**

$$= \ \cdot r. \qquad (4)$$

Доказ. Нека O е центарот на вписаната кружница во триаголникот ABC (црт. 76).



Црт. 76

Тогаш имаме:

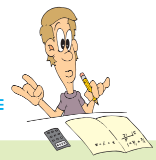
$$_{\Delta ABC} = \ _{\Delta AB} + \ _{\Delta BC} + \ _{\Delta CA} =$$

$$=\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{a+b+c}{2}\cdot r = \ \cdot r,$$ штд.

Пример 2. Да се пресмета плоштината на триаголник ABC ако неговиот периметар е L=20cm а радиусот на вписаната кружница е r=2cm.

Решение. Според формулата (4) добиваме $= \ \cdot r = \frac{\ \cdot r}{2} = \frac{20\cdot 2}{2} = 20\text{ cm}^2.$

2 Плоштината на триаголникот е еднаква на 56cm^2. Одреди ја висината на триаголникот, што е повлечена кон страната b=14cm.



ЗАДАЧИ

3 Како ќе се промени плоштината на триаголникот, ако:
а) основата ја зголемиме 3 пати, а висината остане непроменета,
б) основата остане иста, а висината ја зголемиме 2 пати,
в) основата се намали 6 пати, а висината се зголеми 2 пати?

4 Докажи дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на неговите катети.

5 Плоштината на еден правоаголен триаголник изнесува 40,32cm^2, а едната негова катета е 5,6cm. Одреди ја другата катета.

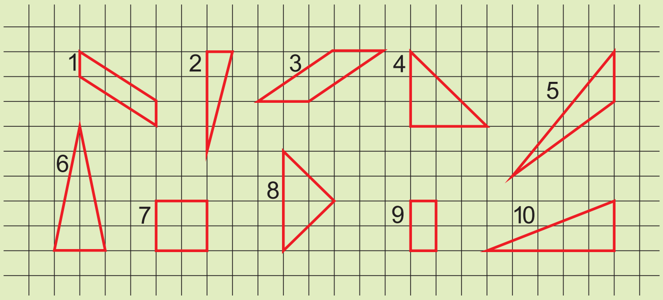
6 Основата на еден триаголник е 9cm, а соодветната висина 6cm. Тој е претворен во друг триаголник со основа 12cm. Одреди ја соодветната висина на вториот триаголник.

7 Даден разностран триаголник претвори го во:
а) рамнокрак, б) правоаголен триаголник, што има со него иста основа.

8 Конструирај правоаголник-еквивалентен со даден триаголник ABC, што има со него заедничка основа AB.

9 Нацртај произволен триаголник ABC, а потоа претвори го во ромб со основа AB.

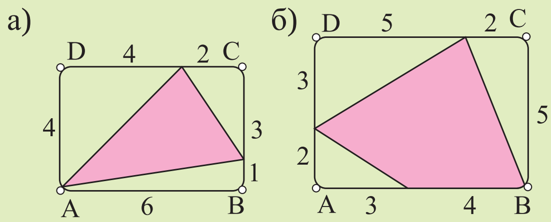
10 Покажи кои фигури на цртежот 77 се еднакво плошни.



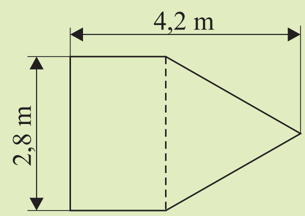
Црт. 77

11 Пресметај ја плоштината на обоените фигури на цртежот 78а, б, каде што четириаголникот ABCD е правоаголник.

12 Над една страна на еден правоаголник конструиран е рамностран триаголник како на цртежот 79. Одреди ги периметарот и плоштината на целата фигура според податоците на цртежот.



Црт. 78



Црт. 79

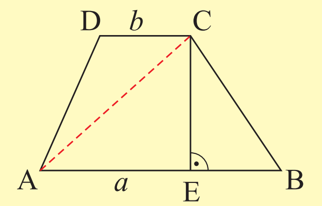
13 Пресметај ја плоштината на триаголник ABC, ако се дадени неговите страни:
а) a = 8cm, b =15cm, c =17cm; б) a =7cm, b = 8 cm, c = 9cm.

IV. 18. **ПЛОШТИНА** НА **ТРАПЕЗ**

За плоштината на трапез важи следнава

Теорема. **Плоштината на трапезот е еднаква на производот од полузбирот на неговите две основи и висината, т.е.**

$$=\frac{a+b}{2}\cdot \quad .$$



Црт. 80

Доказ. Нека ABCD е трапез, $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ негови основи, а $\overline{C\;\;}=$ негова висина (црт. 80). Дијагоналата AC го дели трапезот на два триаголника ABC и CDA. Ако за основа на ΔABC ја земеме страната AB, а за основа на ΔCDA ја земеме страната CD, тогаш нивните соодветни висини ќе бидат еднакви со висната на трапезот, па добиваме:

$_{\Delta ABC}=\frac{a}{2}$, $_{\Delta CDA}=\frac{b}{2}$. А оттука $_{ABCD}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{(a+b)}{2}$, т.е. $_{ABCD}=\frac{(a+b)}{2}\cdot$.

Со тоа теоремата е докажана.

Ако земеме предвид дека: полузбирот од должините на основите на трапезот е еднаков на должината на неговата средна линија , тогаш горната формула го добива видот = , каде што $=\frac{a+b}{2}$. Според тоа, важи

Последица. **Плоштината на трапезот е еднаква на производот од должините на неговата средна линија и висината, т.е.**

P = .

1 Пресметај ја плоштината на трапез, ако основите a и b и висината се:
а) a=14 cm, b=8 cm, =9 cm; б) a=2,5 dm, b=9 cm и = 1,5 dm.

2 Основите на еден трапез се долги 8,5cm и 5,8cm, а неговата плоштина е 42,9cm^2. Одреди ја висината на трапезот.

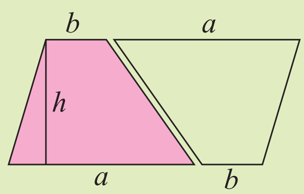
ЗАДАЧИ

3 Долната основа на трапезот е еднаква на 13cm, висната му е 5cm, а плоштината е еднаква на 50cm^2. Одреди ја горната основа на тој трапез.

4 Една нива, која имала форма на трапез со основи 142m и 86m и висина 42m, била посеана со памук. Од 1 декар било набрано просечно 95kg памук. Колку било набрано од целата нива?

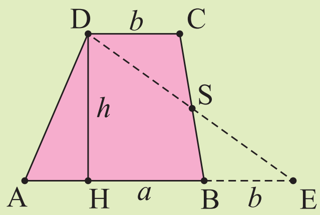
5 Плоштината на еден правоаголен трапез изнесува 87cm^2. Одреди ја должината на нормалниот крак, ако основите на трапезот се долги 18cm и 12cm.

6 Нацртај два складни трапеза со основи a и b и висина . Изрежи ги и придружи ги еден до друг како на цртежот 81. Која фигура се образува? Како се пресметува плоштината на двата здружени трапези, а како само на едниот трапез?



Црт. 81

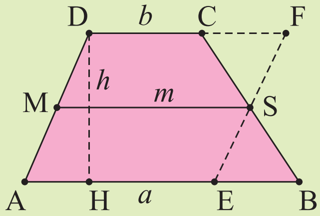
7 Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез, ако се познати неговите основи a =11cm, b =5cm и остриот агол при основата α=45°.



Црт. 82

8 Докажи дека трапезот е еднакво голем со триаголник, чија основа е еднаква на збирот од основите (a+b) на трапезот и со соодветна висина иста со висината на трапезот (црт. 82).

9 Докажи дека, даден трапез е еднакво плошен на паралелограм со иста висина и основа еднаква на средната линија на трапезот (црт. 83).



Црт. 83

10 Даден трапез ABCD претвори го во: а) паралелограм со иста висина, б) правоаголник со иста висина.

11 Како може да се раздели даден трапез ABCD на два дела, така што од нив да може да се состави: а) триаголник со иста висина како и на трапезот, б) паралелограм со иста висина.

IV. 19. **ПЛОШТИНА НА ДЕЛТОИД**

За плоштината на делтоидот важи следнава

***Теорема* 1. Плоштината на делтоидот е еднаква на полупроизводот од должините на неговите дијагонали, т.е.**

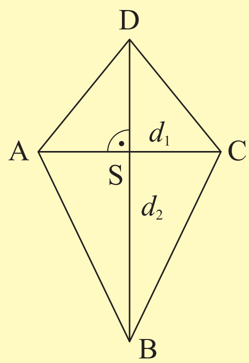
$$=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2.$$

Доказ. Нека ABCD е делтоид, d_1 и d_2 се дијагонали, а S пресек на дијагоналите (црт. 84).

Знаеме дека дијагоналите на делтоидот се заемно нормални.

Дијагоналата AC го дели делтоидот на два триаголника ABC и ACD. Ако за основа на тие триаголници се земе дијагоналата $\overline{AC}=d_1$, тогаш:

$$_{\Delta ABC}=\frac{d_1\cdot \overline{B\ \ }}{2} \quad \text{и} \quad _{\Delta ACD}=\frac{d_1\cdot \overline{\ \ D}}{2},$$



Црт. 84

па за плоштината на делтоидот добиваме:

$$= {}_{\Delta ABC} + {}_{\Delta ACD} = \frac{d_1\cdot \overline{B\ \ }}{2}+\frac{d_1\cdot \overline{\ \ D}}{2}=\frac{d_1}{2}(\overline{B\ \ }+\overline{\ \ D}),$$

односно $=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$. Со тоа теоремата е докажана.

На сличен начин се докажува и следнава поопшта:

Теорема **. Плоштината на секој четириаголник со нормални дијагонали е еднаква на полупроизводот од неговите дијагонали.**

На кои од познатите четириаголници може да се примени оваа теорема?

Пример. Да се пресмета плоштината на делтоид, чии дијагонали се долги d_1=5,6cm и d_2=9,5cm.

Решение. $=\frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = \frac{5{,}6 \cdot 9{,}5}{2} = \frac{53{,}20}{2} = 26{,}6 \ (\mathrm{cm}^2)$.

1 Одреди ја плоштината на ромб со дијагонали d_1=12cm и d_2=9cm.

ЗАДАЧИ

2 Одреди ја плоштината на делтоид, ако се познати неговите дијагонали d_1 =6,3cm и d_2=4,8cm.

3 Плоштината на делтоидот изнесува 90cm^2. Ако едната негова дијагонала е 7,5cm, најди ја другата дијагонала.

4 Колкава плоштина има квадрат, чија дијагонала е 7,9cm?

5 Најди ја плоштината на рамнокрак трапез со нормални дијагонали, ако дијагоналата му е долга 7,6cm.

6 Нацртај произволен делтоид и исечи го по неговите дијагонали. Од добиените делови состави правоаголник? Кои уште други фигури може да се состават од тие делови?

7 Најди ја висината на ромб, чии дијагонали се долги d_1 =l8cm и d_2=13cm.

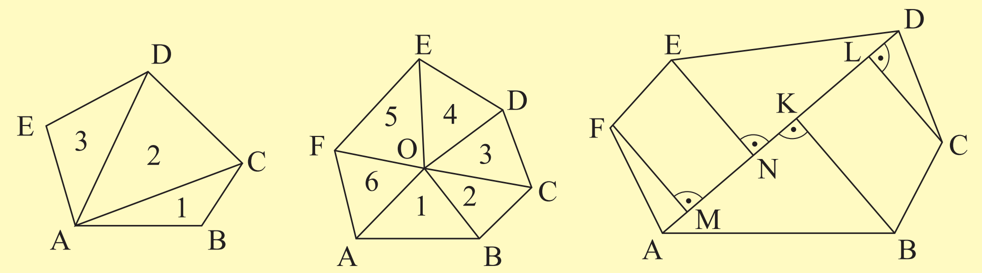
8 Страната на ромбот е долга 15,5cm, а едната дијагонала d_1=25,4cm. Пресметај ја другата дијагонала и плоштината на ромбот.

9 Страните на еден делтоид се долги: 28cm и 46cm. Пресметај ја плоштината на делтоидот, ако неговата дијагонала, што не е симетрална на делтоидот, изнесува 35cm.

IV. 20. ПЛОШТИНА НА ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

1. До тука се запознавме со пресметувањето на плоштината само на некои многуаголници: правоаголник, квадрат, паралелограм, триаголник, трапез и делтоид. За да ја одредиме плоштината на произволен многуаголник, истиот треба да се раздели на такви фигури, чија плоштина знаеме да ја одредиме. Потоа збирот од плоштините на сите тие фигури ќе ни ја даде бараната плоштина на дадениот многуаголник.

Разделувањето на даден многуаголник на прости фигури може да се изврши на различни начини (црт. 85).



Црт. 85

2. За правилните многуаголници важи следнава:

Теорема. **Плоштината на секој правилен многуаголник е еднаква на полупроизводот од неговиот периметар и радиус на впишаната кружница во него, т.е.**

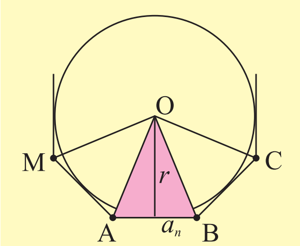
$$= \frac{\cdot r}{2}, \qquad (1)$$

каде што е периметарот на правилниот многуаголник, r-радиус на впишаната кружница во него.

Доказ. Ако центарот на правилниот n-аголник го сврземе со секое негово теме, тој ќе се раздели на n складни рамнокраки триаголници. Плоштината на секој од тие триаголници, на пример на ΔAOB (црт. 86), ќе биде еднаква на $\frac{1}{2}\cdot a_n r$, каде што a_n е страна на правилниот n-аголник, а r-радиус на впишаната кружница.

Според тоа, за плоштината на правилниот n-аголник добиваме:

$$= \frac{na_n \cdot r}{2}.$$



Црт. 86

Но бидејќи производот na_n претставува периметар L на правилниот многуаголник, затоа формулата за плоштина ќе гласи

$$= \frac{\cdot r}{2}.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Ќе разгледаме посебно три случаја: n=3, 4, 6.

Ако n=3, т.е. ако е даден рамностран триаголник ABC, тогаш знаеме дека

$r = \frac{}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $= \frac{}{2} = \frac{3a}{2}$, па имаме $= \frac{\cdot r}{2} = \; r = \frac{3a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. (2)

Ако n=4, т.е. ако е даден квадрат со страна a, тогаш

$r = \frac{a}{2}$ и $= \frac{}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$, па имаме $= 2a\cdot\frac{a}{2} = a^2$ (3)

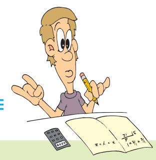
Ако n=6, т.е. ако е даден правилен шестаголник со страна a, тогаш радиусот на впишаната кружница е еднаков со висината на рамностран триаголник со страна a односно, $r = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Освен тоа $= \frac{6a}{2} = 3a$, па $P = 3a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Истата формула се добива ако плоштината на рамностран триаголник со страна a се помножи со 6.

3. Забележуваме дека во теоремата, во доказот на формулата (1) суштинска улога имаше фактот дска во правилниот многуаголник може да се впише кружница, чиј радиус е r. Затоа формулата (1) важи во општ случај за многуаголник опишан околу кружница со радиус r.

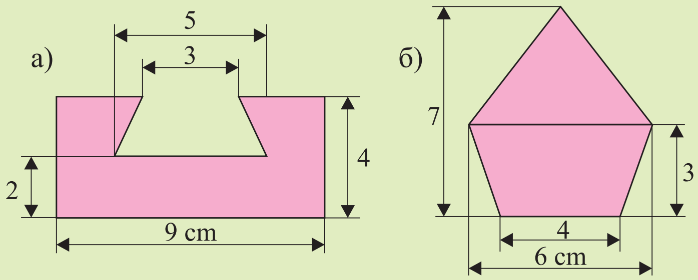
Така ако n=3, од (1) веднаш се добива формулата P=sr за произволен триаголник, бидејќи во секој триаголник може да се впише кружница. Ако n=4, и во некои четириаголници може да се впише кружница (квадрат, ромб, делтоид), тогаш исто така може да се примени формулата (1).



ЗАДАЧИ

1. Едно градилиште има форма на трапезоид, чија една дијагонала е долга 280m, додека другите две темиња се оддалечени од неа на 124m и 86m. Пресметај ја плоштината на градилиштето.

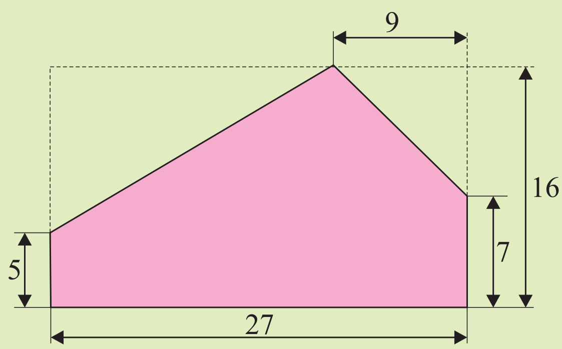
2. Пресметај ја плоштината на фигурите на цртежот 87.



Црт. 87

3. Од правоаголно парче ламарина изрежан е детал со форма и димензии како цртежот 88. Пресметај ја плоштината на деталот. Димензиите на цртежот се изразени во сантиметри.

4. Радиусот на впишаната кружница во правилен шестаголник е r=4cm. Одреди го неговиот периметар и плоштина.



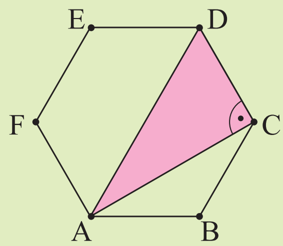
Црт. 88

5 Одреди го радиусот на опишаната кружница, радиусот на впишаната кружница и плоштината на правилен шестаголник, кога е дадена неговата страна a=2cm.

6 Ходникот на едно училиште, што има форма на правоаголник со страни 12m и 3,25m е поплочен со плочки што имаат форма на правилен шестаголник со страна a=8cm. Колку плочки се употребени за поплочувањето на тој ходник?

7 Во иста кружница се впишани правилен шестаголник и рамностран триаголник. Покажи дека плоштината на шестаголникот е два пати поглема од плоштината на триаголникот.

8 На цртежот 89 е нацртан правилен шестаголник со страна 2,5cm. Од темето A повлечени се дијагоналите AC и AD. Пресметај ја плоштината на триаголникот ACD.



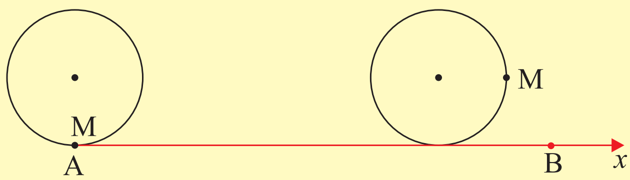
Црт. 89

9 Нека a, b и c се страните на даден триаголник. Да се најде радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

10 Даден е делтоид со плоштина P=12cm^2 и периметар 26cm. Да се пресмета радиусот на впишаната кружница во делтоидот. Дали делтоидот е еднозначно определен со задавањето на неговата плоштина и периметар?

IV. 21. ДОЛЖИНА НА КРУЖНИЦА

1. Познат ви е поимот должина на отсечка. Знаеме отсечката е дел од права. Меѓутоа, кружницата е крива линија, а со поимот должина на крива линија првпат се среќаваме. Дефиницијa за должина на крива линија сега не сме во состојба да дадеме. Но, за да добиеме нагледна претстава за поимот должина на кружница, ќе земеме еден обрач или модел на кружница од жица и истиот да го тркаламе (без лизгање) долж една полуправа Ax (црт. 90)



Црт. 90

Тркалањето на обрачот да го сопреме во моментот кога точката M од обрачот, која се совпаѓала со почетокот A на полуправата Ax, прв пат дојде (ќе лежи) пак на полуправата во некоја точка B. На таков начин на полуправата Ax ќе добиеме една отсечка AB, која има иста должина, како и отсечката што би се добила кога моделот на кружницата го пресечеме во една точка, а потоа го исправиме во права линија.

Должината на така добиената отсечка AB се вика **должина на кружницата**, чиј модел го тркалавме по полуправата Ax (црт. 90).

2. Очигледно е дека секоја кружница има точно определена должина, која несомнено зависи од нејзиниот радиус.

Должината на кружницата ќе ја означуваме со буквата L.

Проблемот, како да се измери или пресмета должината на кружница со даден радиус, долго ги мачел математичарите. Решавајќи го тој проблем, тие прво откриле дека:

Односот (размерот) од должината на кружницата и нејзиниот дијаметар $2r$ **е ист број за секоја кружница**.

Останало уште да се најде тој број. Тој многу важен број прифатено е да се означува со грчката буква π (пи), прва буква од грчкиот збор „периферија“. Значи можеме да запишеме:

$$\frac{}{2r} = \pi .$$

Оттука ја добиваме формулата за должина на кружницата:

$$= 2\pi r .$$

Ако кружницата ја разгледуваме како гранична линија (контура) на соодветниот круг, тогаш нејзината должина L ќе претставува воедно и **периметар на кругот**.

3. Се поставува прашањето: дали бројот π е рационален број? Одговорот е не. Математичарите, кои го испитувале и пресметувале бројот π, докажале дека бројот π е ирационален број.

Големиот грчки математичар и физичар Архимед (287-212 год пред н.е.) ја нашол приближната вредност на бројот π со точност од три децимали. Математичарот Ludolf van Ceulen околу 1600 год. бројот π го пресметал на 35 децимали, по чие име, бројот π често се вика **Лудолфов број**. Меѓутоа, денес со електронски машини за сметање, бројот π е пресметан на огромен број децимали. Бројот π напишан со првите петнаесет точни децимали гласи:

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ \ldots$$

Обично се користат две децимални места π≈3,14 или $\pi \approx \frac{22}{7}$, но при поточни пресметувањеа, бројот π се зема со пет децимали (π≈3,14159).

Пример 1. Да се одреди должината на кружница со радиус 12,5cm.

Решение. L = $2\pi r \approx 2\cdot 3{,}14\cdot 12{,}5 = 3{,}14\cdot 25 = 78{,}5$ (cm). Значи, кружницата има должина L≈78,5cm.

Пример 2. Тркалата на една кола имаат дијаметар 56cm. Колкав пат ќе измине колата, ако секое тркало се заврти 500 пати?

Решение. Ако секое тркало направи едно завртување, тогаш колата ќе измине пат што е еднаков на периметарот на тркалото. Во овој случај, бидејќи мерниот број на дијаметарот (56) е делив со 7, згодно е за бројот π да јаземеме вредноста 22/7 наместо π≈3,14. Така добиваме $L = \pi d = \frac{22}{7}\cdot 56 = 22\cdot 8 = 176$ (cm).

Значи, при едно завртување на тркалата колата изминува 176cm = 1,76m пат. Ако пак секое тркало се заврти 500 пати, колата ќе измине пат, што е приближно еднаков на 1,76· 500=880m.

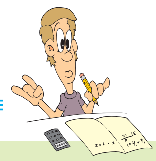
Ако ни е позната должината на кружницата, а треба да се одреди нејзиниот радиус, тогаш од формулата L=2π*r* добиваме

$$r = \frac{}{2\pi}.$$

При пресметување на радиусот на кружницата, корисно е да се знае и користи уште и реципрочната вредност на бројот π, што приближно изнесува: $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$.

Пример 3. Ако една челична лента долга 1m ја свиткаме во кружница, колкав ќе биде дијаметарот на таа кружница?

Решение. Тука должината на кружницата е дадена L = 1m = 100cm, а треба да се одреди нејзиниот дијаметар. Него го наоѓаме: $d = \frac{}{\pi} = \cdot\frac{1}{\pi} \approx 100 \cdot 0{,}318 = 31{,}8$(cm).



ЗАДАЧИ

1 Пресметај ја должината на кружница, чиј радиус е:
а) *r*=4,5cm, б) *r*=1dm, в) *r*=3,2dm.

2 Пресметај ја должината на кружница, чиј дијаметар е:
а) *d*=7cm, б) *d*=12,4cm, в) *d*=0,8m.

3 Кружницата *k* има должина L=9,42dm. Одреди го нејзиниот радиус и дијаметар.

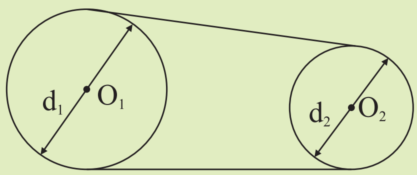
4 Колкав е радиусот на Земјата, кога знаеме дека должината на земјиниот меридијан изнесува приближно 40000 km?

5 Колкав пат ќе измине Земјата во своето вртење околу Сонцето за: а) 1 час, б) 1 минута, в) 1 секунда, ако нејзината патека ја сметаме за кружница, чиј радиус е 150000000 km, а Земјата се завртува еднаш околу Сонцето за 365 дена и 6 часа?

6 Минутната стрелка на еден часовник е долга 1,4cm. Колкав пат ќе измине врвот на таа стрелка за: а) 1 час, б) 1 ден?

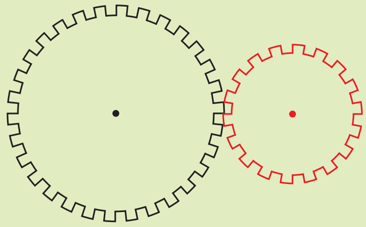
7 Радиусот на една кружница е 8cm. Колкав е радиусот на друга кружница, која има двапати поголема должина од првата?

8 Две тркала со дијаметри d_1=60cm и d_2=45cm се обвиени со непрекинат ремен (црт. 91). Поголемото тркало се врти од мотор и прави 180 завртувања во 1 минута, а помалото тркало го врти ременот. Колку завртувања во минута прави помалото тркало?



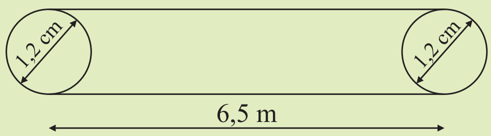
Црт. 91

9 Еден запченик со 30 запци зафаќа во друг запченик со 18 запци. Ако првиот запченик прави 45 завртувања во минута, колку завртувања во минута ќе прави вториот запченик (црт. 92)?



Црт. 92

10 Две еднакви тркала со дијаметар 1,2m се обвиени со непрекинат ремен (црт. 93). Одреди ја должината на ременот, ако растојанието меѓу центрите на тркалата е еднакво на 6,5m.



Црт. 93

11 Дадена е кружница со радиус *r*.
а) Колкава е должината на полукружницата од неа?
б) Колкава е должината на четвртина од кружницата, т.е. должината на кружен лак чија аголна големина е 90°?
в) Колкава е должината на шестина од кружницата, т.е. на кружен лак со аголна големина е 60°?

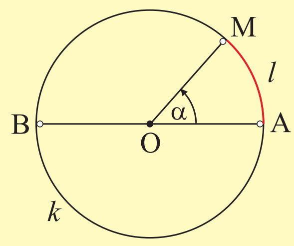
IV.22. ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК

Знаеме, кружниот лак е дел од кружница. Значи, и тој има некоја одредена должина, која може да ја мериме со истата должинска единица, со која ја мериме и должината на кружницата.

Според тоа, кружните лаци се карактеризираат освен со својата аголна големина, која ја мериме со аголни единици (степени), уште и со својата должина, која ја мериме со должински единици (сантиметри).

Должината на кружен лак ќе ја означуваме со буквата .

Нека е дадена кружница k(O,r) и една нејзина произволна точка A (црт. 94). Да замислиме сега дека друга избрана точка M се движи по кружницата k. Притоа да ги набљудуваме: големината на централниот агол AOM и должината на лакот $\overset{\frown}{AM}$.



Црт. 94

Очигледно е дека на секој агол (0° < α < 360°) му одговара одредена должина на лакот $\overset{\frown}{AM}$, т.е. α→ .

Така за α=360° (точката M се поклопува со точката A) имаме = L = 2π*r*.
За α=180° (точката M се поклопува со B, која е дијаметрално спротивна на A) имаме

$$= \frac{}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r.$$

За α=90° имаме $= \frac{}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$, итн.

Значи, величините α и се право пропорционални величини, т.е. на 2, 3, 4,... пати поголема (или помала) вредност на α, одговара и 2,3,4,... пати поголема (или помала) вредност на .

Според тоа ако, ∠AOM = 180° → $=\pi r$, а ако ∠AOM=1° → $= \frac{\pi r}{180}$.

Значи, на централниот агол ∠AOM=α° му одговара лак $\overset{\frown}{AM}$, чија должина е еднаква на

$$= \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha .$$

Бидејќи е $\overset{\frown}{AM}$ =∠AOM=α, затоа од горново може да заклучиме дека, формулата за должината на кружен лак од кружница со радиус r, чија аголна големина е α степени, гласи:

$$= \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

Од неа следува дека 180 $= \pi r \alpha$, од каде ги добиваме формулите:

$$\alpha = \frac{180}{\pi r} \quad \text{и} \quad r = \frac{180}{\pi \alpha}.$$

кои ни служат: првата за пресметување на аголната големина (односно централниот агол α), кога ни се познати должината и радиусот r на соодветниот кружен лак; а втората за пресметување на радиусот r, кога ни се познати должината на лакот и неговата аголна големина α (односно соодветниот централен агол).

Пример 1. Да се пресмета должината на кружен лак од кружница со радиус 12cm, што му одговара на централен агол α=18°.

Решение. Со замена на r =12cm и α=18° во формулата за должина на кружен лак, добиваме

$$= \frac{\pi r \alpha}{180} \approx \frac{3{,}14 \cdot 12 \cdot 18}{180} = \frac{3{,}14 \cdot 12}{10} = 3{,}768 \approx 3{,}8 \text{ (cm)}$$

1 Пресметај ја должината на кружен лак во кружница со радиус 0,7m, чија аголна големина е:

а) 30°, б) 45°, в) 84°24’.

Пример 2. Да се пресмета радиусот на кружница во која на централен агол α=42°30' му одговара кружен лак =11cm.

Решение. Бидејќи 30’=0,5°, затоа централниот агол го изразуваме во едноимен број, во степени: α=42°30'=42,5°. Потоа:

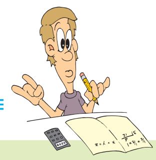
$$r = \frac{180}{\pi \alpha} = \frac{180 \cdot 11}{\frac{22}{7} \cdot 42{,}5} = \frac{180 \cdot 11 \cdot 7}{22 \cdot 42{,}5} = \frac{90 \cdot 7}{42{,}5} = 14{,}8 \text{ (cm)}.$$

Пример 3. Да се одреди централниот агол во кружница со радиус r =15cm, што му припаѓа на кружен лак со должина   = 10cm.

Решение. Со замена на r = l5cm и   = 10cm во формулата

$$r = \frac{180}{\pi r} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{180}{r} \approx 0{,}318 \cdot \frac{180 \cdot 10}{15} = 0{,}318 \cdot 120 = 38{,}6,$$

т.е. α≈38,16° или α≈38°9'36''.



ЗАДАЧИ

2 Колкава должина има кружен лак, што му припаѓа на цнтрален агол од 135° во кружница, чија должина е L=6,8cm?

3 Пресметај ја должината на лаците во две концентрични кружници со радиуси r_1=7cm и r_2=5cm, кои му припаѓаат на ист централен агол α=122°30'.

4 Одреди го централниот агол, што му припаѓа на кружен лак со должина =4,71 dm, ако радиусот на кружницата е 16dm.

5 Одреди колкава аголна големина има кружен лак, чија должина е еднаква на радиусот на кружницата.

6 На централен агол од 40° му припаѓа кружен лак со должина од 6dm. Одреди ја должината на кружницата без користење на формулата.

7 Периферен агол од 36° зафаќа кружен лак   =2,5cm. Одреди ја должината на кружницата.

8 Од кружен лак со радиус 6cm, чија аголна големина е 150°, свиткана е кружница. Колкав е нејзиниот радиус?

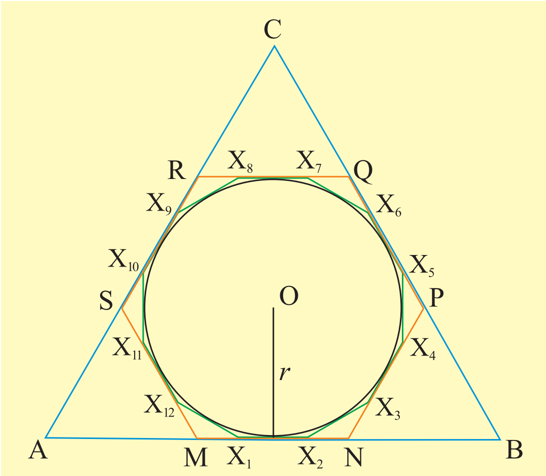
9 Кружница со радиус 4cm разгрната е во кружен лак со радиус 10cm. Одреди ја аголната големина на тој кружен лак.

10 Пресметај ја должината на лакот од земјиниот меридијан, што му одговара на: а) 1°, б) 1’, в) 1”, ако должината на земјиниот меридијан изнесува 40003,423 km. (Должината на лакот од земјиниот меридијан што му одговара на 1’, се вика **морска милја**).

IV.23. **ПЛОШТИНА НА КРУГ**

Нека е даден круг со радиус r. Околу него да опишеме рамностран триаголник ABC, правилен шестаголник MNPQRS, правилен 12-аголник $X_1X_2X_3...X_{12}$ (црт. 95) и во општ случај правилен n-аголник.

Со L_n да го означиме периметарот на опишаниот правилен n-аголник, а со P_n плоштината на правилниот n-аголник. Знаеме дека важи формулата



Црт. 95

$$= \frac{{}_n r}{2}. \qquad (1)$$

Засекое n=3,4,5,... од (1) добиваме:

$$\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \ldots = \frac{n}{n} = \frac{r}{2}. \qquad (2)$$

Кога бројот n се зголемува, на пример n =1000, тогаш правилниот n-аголник се повеќе „се стреми кон кругот“. Притоа периметарот L_n се стреми (се доближува) до периметарот на кругот $2\pi r$, а исто така плоштината на правилниот n аголник P_n се стреми (се доближува) до плоштината на кругот, која всушност ја бараме. Имено, ако нацртаме правилен 1000-аголник со апотема r, него не ќе можеме да го разликуваме од кружницата со радиус r, бидејќи неговите страни ќе ни изгледаат како точки од кружницата.

Затоа врз основа на (2) и за односот (количникот) од плоштината на кругот P и периметарот на кругот L, ќе важи: $\frac{}{} = \frac{r}{2}$.

Затоа $= \cdot \frac{r}{2} = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$, т.е. $= \pi r^2$. (3)

Според тоа: **Плоштината на кругот е еднаква на производот од бројот π и квадратот на неговиот радиус**.

Пример 1. Да се одреди плоштината на круг, чиј радиус е 4cm.

Решение. P=πr^2=3,14· 4^2=3,14· 16=60,24 (cm^2), т.е. кругот има плоштина P≈60,24cm^2.

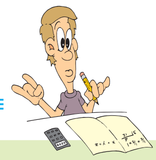
1 Пресметај ја плоштината на круг со радиус: а) 3,5cm, б) 6cm, в) 1dm, г) 3,2m.

Пример 2. Да се одреди радиусот на круг, чија плоштина е P=30,8cm^2.

Решение. Од P=πr^2 добиваме $r = \sqrt{\frac{}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot}$ каде $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$. Оттука добиваме:

$r = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot} \approx \sqrt{0{,}318 \cdot 30{,}8} = \sqrt{9{,}7944} \approx 3{,}1$. Значи, кругот има радиус r ≈3, lcm.

ЗАДАЧИ



2 Пресметај ја плоштината на круг со дијаметар: а) 6cm, б) 2,2dm, в) 25m, г) 0,75m.

3 Одреди ја плоштината на круг, чиј периметар е: а) L=5dm, б) L=15,7cm.

4 Колку пати ќе се зголеми плоштината на кругот, ако неговиот радиус се зголеми:
а) 3 пати, б) 5 пати?

5 Колку пати треба да се зголеми радиусот на даден круг, така што неговата плоштина да се зголеми: а) 4 пати, б) 9 пати.

6 Дадени се два круга со радиуси r_1=6cm и r_2=4cm. Одреди го радиусот на оној круг, чија плоштина е еднаква на: а) збирот, б) разликата од плоштината на дадените два круга.

7 Две кружници со радиуси r_1=5,4cm и r_2=3cm се допираат однатре. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината, што е зафатен од тие две кружници.

8 Две цевки со внатрешни дијаметри 6cm и 8cm треба да се заменат со нова цевка, која ќе има ист капацитет како двете заедно. Колкав ќе биде нејзиниот дијаметар?

9 Даден е круг со радиус *r*.

а) Колкава е плоштината на соодветниот полукруг?

б) Колкава е плоштината на четвртина круг, т.е. на делот што одговара на централен агол од 90°?

в) Колкава е плоштината на делот од кругот, што одговара на централен агол од 120°?

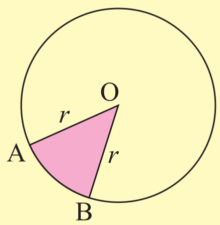
IV.24. ПЛОШТИНА НА КРУЖЕН ИСЕЧОК И КРУЖЕН ПРСТЕН

Поимите за кружен исечок и кружен прстен ги воведуваме со:

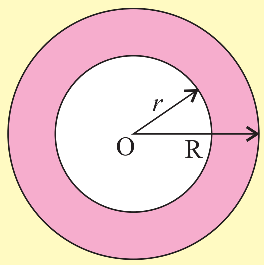
Дефиниција 1. **Кружен исечок или сектор се вика делот од кругот, ограничен со два негови радиуса и лакот што е зафатен со нив** (црт. 96).

Дефиниција 2. **Кружен прстен се вика делот од рамнината, што е ограничен со две концентрични кружници** (црт. 97).

1. Кружен исечок, чиј централен агол содржи 1° има плоштина еднаква на $\frac{1}{360}$ од плоштината на кругот (Зошто?). Според тоа, плоштината на тој кружен исечок ќе биде $\frac{\pi r^2}{360}$, а плоштината на кружен исечок, чиј централен агол содржи α степени, ќе биде



Црт. 96



Црт. 97

$$=\frac{\pi r^2}{360}\cdot\alpha, \quad \text{т.е.} \quad =\frac{\pi r^2\alpha}{360} \qquad (1)$$

Ако земеме предвид дека должината на лакот, што му одговара на кружниот исечок, е $=\frac{\pi r\alpha}{180}$, тогаш формулата за плоштина на кружен исечок, може да ја запишеме и вака:

$=\frac{\pi r^2\alpha}{360}=\frac{\pi r\alpha}{180}\cdot\frac{r}{2}$, каде што, ако изразот $\frac{\pi r\alpha}{180}$ го замениме со , ќе добиеме

$$=\ \cdot\frac{r}{2}, \quad \text{т.е.} \quad =\frac{r}{2}. \qquad (2)$$

Според тоа, важи следнава:

***Теорема*. Плоштината на кружниот исечок е еднаква на полупроизводот од должината на соодветниот кружен лак и радиусот.**

Како што гледаме има две формули за пресметување на плоштината на кружен исечок. Едната од нив ја применуваме кога се дадени радиусот и соодветниот централен агол, а другата кога се дадени радиусот и должината на соодветниот кружен лак.

Пример 1. Да се пресмета плоштината на кружен исечок, што му одговара на централен агол $\alpha=57°$ во круг со радиус 6cm.

Решение. Со замена на мерните броеви на r и α во формулата (1) за плоштина на кружен исечок, добиваме:

$$=\frac{\pi r^2\alpha}{360}=\frac{3{,}14\cdot 6^2\cdot 57}{360}=\frac{3{,}14\cdot 36\cdot 57}{360}=\frac{3{,}14\cdot 57}{10}=17{,}898.$$

Значи, бараната плоштина на кружниот исечок е $P\approx 17{,}90cm^2$.

2. Плоштината на кружниот прстен ќе ја добиеме кога од плоштината на големиот круг ја одземеме плоштината на малиот круг.

Ако радиусот на големиот круг го означиме со R, а радиусот на малиот круг - со r, тогаш плоштината на кружниот прстен, ќе биде:

$$=\pi R^2-\pi r^2, \quad \text{т.е.} \quad =\pi(R^2-r^2), \qquad (3)$$

односно $=\pi(R-r)(R+r)$.

Пример 2. Да се пресмета плоштината на кружен прстен, кога радиусите на концентричните кружници се: R=9cm и r=5,7cm.

Решение. $P=\pi(R+r)(R-r)\approx 3{,}14\cdot(9+5{,}7)\cdot(9-5{,}7)=3{,}14\cdot 14{,}7\cdot 3{,}3=152{,}3214cm^2$.

Значи: $P\approx 152{,}3cm^2$.

ЗАДАЧИ

1 Пресметај ја плоштината на кружен исечок, ако се дадени:
а) r=3cm, α=30°, б) r=4,5dm, α=45°30'.

2 Пресметај ја плоштината на кружен исечок, ако се дадени:
а) r=5cm, =6,8cm, б) r=8cm, =8cm.

3 Пресметај ја плоштината на кружен исечок во круг со периметар L=3,64dm, чиј централен агол има 75°.

4 Кружен исечок со радиус 7cm има плоштина 64,2cm^2. Одреди ја големината на централниот агол на тој исечок.

5 Колкав дел од плоштината на еден круг претставува кружен исечок, чиј централен агол е: а) 30°, б) 45°, в) 60°, г) 72°, д) 75°, ѓ) 120°, е) 135°, ж) 144°, з) 150°.

6 Плоштината на кружен исечок претставува: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{2}{3}$, в) $\frac{3}{4}$, г) $\frac{5}{9}$ од плоштината на кругот. Колкав е централниот агол, што му одговара на кружниот исечок?

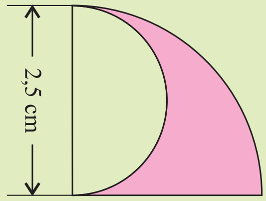
7 Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата на црт. 98.

8 Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата на цртежот 99, ако $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$=3cm.

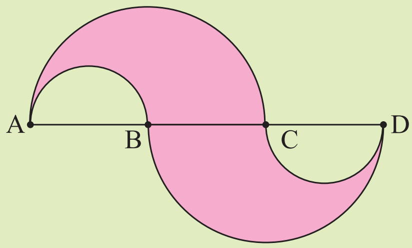
9 Пресметај ги периметарот и плоштината на обоениот дел од квадратот ABCD (црт. 100).

10 Пресметај ја плоштината на фигурата на цртежот 101.

11 Радиусите на две концентрични кружници се:
а) R = 4,5cm, r = 3cm, б) R = 6cm, r = 2,5cm.
Пресметај ја плоштината на кружниот прстен што тие го образуваат.

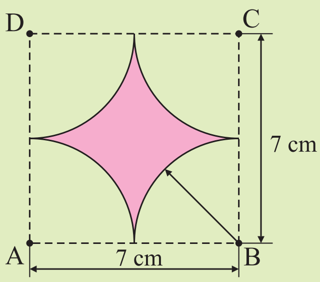


Црт. 98

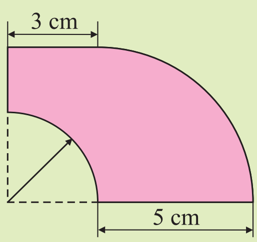


Црт. 99

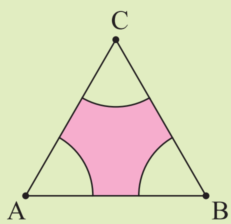
12 Од темињата на рамностран триаголник ABC со страна a=6cm опишани се кружни лаци со радиус 2cm како што е покажано на цртежот 102. Пресметај ја плоштината на обоениот дел од триаголникот.



Црт. 100



Црт. 101



Црт. 102

IV.25. ДИЈАГРАМИ

Минатата година се запознавме со поимот **дијаграм**. Дијаграми во практиката најчесто се користат во два вида: **столбести** и **секторни**. Нивната основна цел е понагледно да се претставаат податоците со кои располагаме. Самите податоци се од секојдневниот живот: претставување на постигнатиот успех во училиштето на крајот на учебната година, следење на порастот на индустриското производство во текот на неколку години, застапеност на некои земји во производство на некој конкретен производ, на пример, во производство на автомобили во 2008 година, и слично.

И за двата типа на дијаграми карактеристично е тоа што ни се дадени неколку (k) податоци (броеви): $n_1, n_2, \dots, n_к$. Нека n е нивниот збир, $n=n_1+n_2+\dots+n_к$. Бројот n_1 во однос на вкупниот број n претставува $\frac{n_1}{n}\cdot 100\%$, бројот n_2 во однос на n претставува $\frac{n_2}{n}\cdot 100\%$, итн. На тој начин ги добиваме процентите $p_1=\frac{n_1}{n}\cdot 100,\ \ p_2=\frac{n_2}{n}\cdot 100, \dots, p_k=\frac{n_k}{n}\cdot 100$. Честопати дадените податоци се задаваат со процентите $p_1, p_2, \dots, p_к$.

Ако сакаме овие податоци да ги претставиме со столбест дијаграм, цртаме $к$ правоаголници последователно со иста основа, а висината да биде пропорционална со процентите $p_1, p_2, \dots, p_к$ односно со броевите $n_1, n_2, \dots, n_к$. Ако пак сакаме тоа да го претставиме со секторен дијаграм, тогаш се служиме со т.н. **процентен агломер**. На него наместо поделци во степени, нанесени се поделци што покажуваат проценти, при што на полниот агол одговараат 100%. Во колку немаме процентен агломер, тогаш ги определуваме аглите $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_к$ според формулите:

$$\alpha_1=p_1\cdot\frac{360}{100},\ \ \alpha_2=p_2\cdot\frac{360}{100},\ \dots,\ \alpha_k=p_k\cdot\frac{360}{100},$$

а потоа еден круг го разделуваме на k кружни исечоци, што одговараат на централните агли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_к$. Забележуваме дека:

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_к=p_1\cdot\frac{360}{100}+p_2\cdot\frac{360}{100}+\dots+p_к\cdot\frac{360}{100}=(p_1+p_2+\dots+p_k)\cdot\frac{360}{100}=360\ ,$$

бидејќи $p_1+p_2+\dots+p_к=100$.

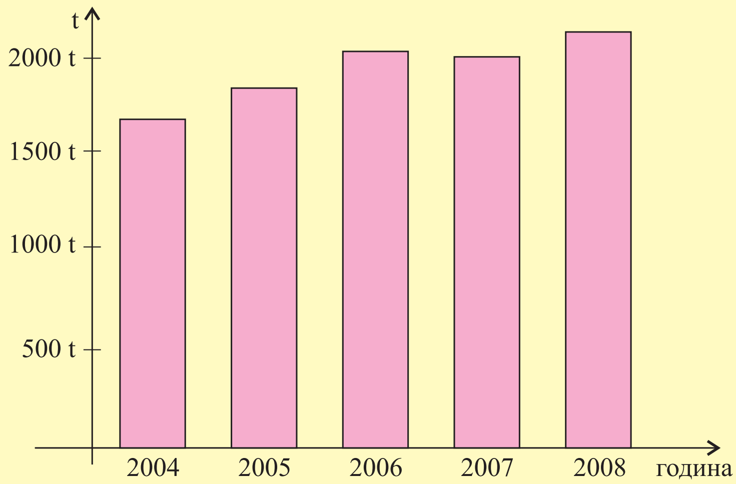
Изборот на дијаграм (столбест или секторен) најчесто зависи од природата на проблемот. Тоа лесно може да се воочи од следниве примери:

Пример 1. Производството на една фабрика во периодот 2004-2008 год. изразено во тони изнесува: 2004-1530t, 2005-1850t, 2006-1960t, 2007-1950t, 2008-2200t. Петгодишниот развој на фабриката најдобро може да се претстави со столбест дијаграм, при што петте столба може да имаат висини: 76,8mm; 92,5mm; 98mm; 97,5mm; 110mm, каде секој милиметар претставува 20t (црт. 103). Тука изборот на столбест дијаграм е попогоден.

Пример 2. Да претпоставиме дека од вкупното производство на автомобили во светот во 2008 година, ЕУ учествува со 31%, САД со 27%, а Јапонија со 22%. Ако овие податоци ги прикажеме на секторен дијаграм, тогаш во дијаграмот неопходно е да ги вклучиме и останатите 20% од други производители на автомобили. На тој начин за процентите $p_1=31$, $p_2=27$, $p_3=22$ и $p_4=20$ ги добиваме централните агли:

$\alpha_1=111{,}6°$, $\alpha_2=97{,}2°$, $\alpha_3=79{,}2°$, $\alpha_4=72°$.

Така го добиваме следниот секторен дијаграм (црт. 104).

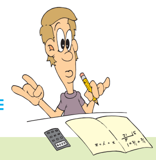


Црт. 103

Црт. 104

Соодветниот столбест дијаграм може да се направи само за ЕУ, САД и Јапонија, а може да се внесе столб и за останатите производители.

ЗАДАЧИ



1. Познато е дека 1/3 од земјината површина е под копно, а 2/3 под вода. Овој податок претстави го со столбест дијаграм. Делот што го претставува копното обој го со кафена боја, а делот под вода со сина боја.

2. Во 1990 година во Македонија се произведени: 69850t јаболка, 9115t круши, 17221t сливи, 8123t кајсии, 4333t праски и 5300t вишни. Овие податоци претстави ги со дијаграм. Каков дијаграм ќе избереш?

3. Во 1994 година во Македонија се произведени 37500t месо, 180000t млеко и 2600t волна. Претстави ги овие податоци со столбест дијаграм.

4. Во 1965 година во Македонија се произведени: 568×10^{6}kWh електрична енергија, во 1975 година се произведени $2{,}2\cdot 10^{9}$kWh електрична енергија, во 1985 година се произведени $3{,}5\cdot 10^{9}$kWh електрична енергија, а во 1990 година се произведени $5{,}7\cdot 10^{9}$kWh електрична енергија. Претстави ги овие податоци со дијаграм. Каков дијаграм ќе одбереш?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ-IV

1 Низ крајните точки на дијаметарот AM на кружницата k повлечени се две паралелни тетиви AC и BD. Докажи дека $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

2 Користејќи го својството на периферен агол, конструирај агол што е еднаков на половина од даден агол.

3 Докажи дека, на тетива што е еднаква на радиусот на кружницата ѝ одговара кружен лак од 60°, и обратно.

4 Докажи дека, секој тетивен паралелограм е правоаголник или квадрат.

5 Кај кој многуаголник бројот на страните е двапати:
а) поголем, б) помал од бројот на неговите дијагонали?

6 Покажи дека, збирот на внатрешниот и централниот агол кај секој правилен многуаголник е еднаков на 180°.

7 Околу кружница со радиус r=3cm опиши: а) квадрат, б) правилен осумаголник.

8 Конструирај правилен осумаголник со страна a=3cm.

9 Скала долга 6,5m е потпрена на ѕид. До која висина таа го допира ѕидот, ако долниот нејзин крај е на растојание 4m од ѕидот?

10 Како ќе се промени плоштината на паралелограмот, ако:
а) основата ја зголемиш 3 пати, а соодветната висина остане иста?
б) основата остане иста, а соодветната висина ја зголемиш 2 пати,
в) основната и соодветната висина ги намалиш 2 пати?

11 Пресметај го периметарот на еден правоаголен триаголник, ако се дадени неговата плоштина 54cm^2 и една негова катета 12cm.

12 Пресметај ја плоштината на ΔABC, кога се познати должините на трите негови страни: a=6cm, b=10cm и c=14cm.

13 Висината на трапезот е еднаква на 14cm, а плоштината изнесува 280cm^2. Одреди ја средната линија на трапезот.

14 Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи 5cm и 9cm и агол при основата 60°.

15 Во кружница со радиус r =3,5cm впишан е правилен шестаголник. Пресметај ја неговата плоштина.

16 Одреди ја должината на страната на правилен шестаголник, чија плоштина е еднаква на P=28,46cm^2.

17 Колкава е должината на работ на отворот на една кофа, чиј дијаметар е 2,3dm?

18 Дијаметарот на тркалата на една кола е еднаков на 5,2dm. Колкав пат ќе помине колата, ако секое тркало се заврти 5000 пати?

19 Како ќе се промени должината на кружницата, ако нејзиниот радиус:
а) се зголеми 3 пати, б) се намали 5 пати?

20 Одреди го радиусот на кружницата, во која на централен агол 33° му одговара кружен лак со должина =34,54dm.

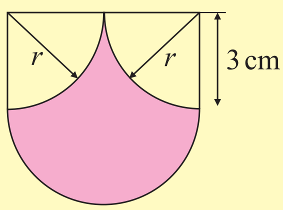
21 Кружница со радиус 8cm ја разгрнуваме во полукружница. Одреди го радиусот на добиената полукружница.

22 Круг со радиус 15,5cm и еден квадрат имаат приближно еднакви плоштини. Пресметај ја страната на тој квадрат.

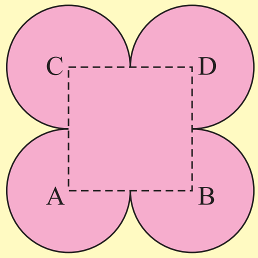
23 Како ќе се промени плоштината на кружниот исечок, ако неговиот централен агол го зголемиш: а) 2 пати,б) 3 пати?

24 Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата на цртежот 105.

25 Пресметај го периметарот и плоштината на фигурата на цртежот 106, ако квадратот ABCD е со страна 7cm.



Црт. 105



Црт. 106

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ-IV

1 Колкава е аголната големина на кружен лак што е над тетивата, која е еднаква со радиусот на кружницата.

2 Ако даден централен агол во кружницата го зголемиш 3 пати, како ќе се промени содветниот негов периферен агол?

3 Конструирај кружница со најмал радиус, што ќе минува низ две дадени точки A и B.

4 Растојанието меѓу точките A и B е 7cm. Низ точката A повлечи права p, која е на растојание 3cm од точката B.

5 Колку страни има многуаголникот, ако тој се разделува од дијагоналите, што се повлечени од едно теме, на: а) 3, б) 5, в)17, г) 40 триаголници?

6 Кај кој правилен многуаголник внатрешниот и надворешниот негов агол имаат еднаква големина?

7 Кои услови треба да бидат исполнети за еден многуаголник да биде правилен?

8 Колку оски на симетрија има секој правилен многуаголник?

9 Конструирај квадрат, ако е даден радиусот на впишаната кружница во него.

10 Конструирај правилен шестаголник со страна a =2,5cm.

11 Пресметај ја плоштината на правоаголен трапез со основи долги a=5cm и b=2cm и остар агол α=45°.

12 Пресметај ги периметарот и плоштината на круг со радиус: а) 4cm, б) 5cm, в) 1m.

ТЕМА V

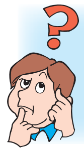
ФУНКЦИЈА. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ

V.1. ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД НА МНОЖЕСТВА

V.1.1. **Подреден пар**

За множествата {4, 5} и {5,4} знаеме дека важи равенството {4,5}={5,4}, бидејќи редоследот на елементите во множествата не е важен.

Меѓутоа, понекогаш е неопходно за елементите на множеството да се прецизира и нивниот редослед (прв, втор, трет елемент итн.). На пример, од елементите (цифрите) на множеството {4,5} можат да се запишат две различни дропки $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$, исто така, и два различни двоцифрени броја 45 и 54. Од тие причини, во математиката се воведува поимот **подреден пар**.



***Дефиниција* 1. За два објекта *a* и , од кои се зема за прв, за втор, велиме дека образуваат подреден пар, и симболички го запишуваме со (,).**

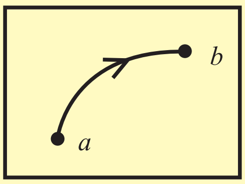
Два подредени пара ги сметаме за еднакви (да се совпаѓаат), ако и само ако елементите по ред им се еднакви, т.е.

$$(a,b)=(c,d) \iff a=c \text{ и } b=d.$$

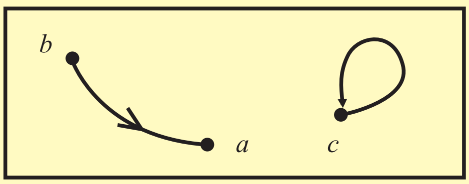
Елементите на подредениот пар можат да бидат и еднакви (a,a). Од усвоената дефиниција следува дека: Ако $a \neq b$, тогаш $(a, b) \neq (b, a)$.

Елементот a на подредениот пар (a,b) се вика **прва** негова координата, а b - **втора координата**.

Подредениот пар (a,b) често геометриски го претставуваме со две точки и една крива линија што ги сврзува тие точки и е насочена од првата кон втората координата на (a,b), како на црт. 1. Фигурата што е составена од точки меѓу кои некои (две и две) се сврзани со линии (црт. 1) ја викаме **граф**. На цртежот 2 претставен е графот на подредените парови (b,a) и (c,c).



Црт. 1



Црт. 2

V.1.2. **Декартов производ на две множества**

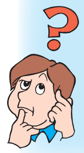
Нека се дадени множествата $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{a, b\}$.

Да ги формираме подредените парови (x,y), каде што $x \in A$ и $y \in B$. Тие се $(1,a)$, $(1,b)$, $(2,a)$, $(2,b)$, $(3,a)$, $(3,b)$ и формираат едно ново множество, кое симболички го запишуваме:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

и го викаме **Декартов производ на множеството А со множеството В**

Во општ случај оваа нова операција ја воведуваме со следнава:

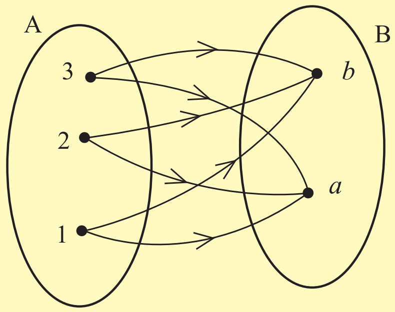


***Дефиниција* 2. Декартов производ на множеството А со множеството В, симболички А×В (читај А п В) се вика множество, кое се состои од сите подредени парови (*x*,*y*), каде што *x*∈А и ∈В, т.е.**

$$\mathbf{A\times B = \ (x, \ ) \ \ x\in A \text{ и } \ \in B \ .}$$

Декартовиот производ на множеството $A=\{1,2,3\}$ со множеството $B=\{a,b\}$ можеме да го претставиме на следниве три начини:

- со неговиот граф, како на цртеж 3,
- со табелата на цртеж 4, или
- со координатната шема, на која секој подреден пар од А×В е претставен со по една точка како на цртеж 5.



Црт. 3

B / A	a	b
1	$(1,a)$	$(1,b)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$
3	$(3,a)$	$(3,b)$

Црт. 4

Множествата А и В можат да бидат и еднакви. Ако В=А, тогаш наместо ×А често пишуваме ^{2}, а го викаме **Декартов квадрат** на множеството А.

***Дефиниција* 3. Декартов квадрат А^2 е множеството на семожните подредени парови што можат да се образуваат од елементите на множеството А т.е.**

$$\mathbf{A^2 = A\times A = \ (x, \ \ ) \ \ x\in A \text{ и } \ \in A \ .}$$

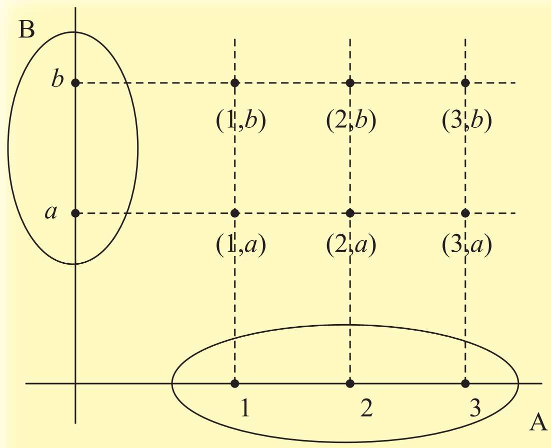
Подмножеството   на множеството A^2, симболички (^{2}), кое се состои само од елементите од видот (x,x), каде што $x \in A$, се вика **дијагонала** на множеството A^2. Значи:

$$(\ ^2)=\{(x,x) \ \ x\in \ \}.$$

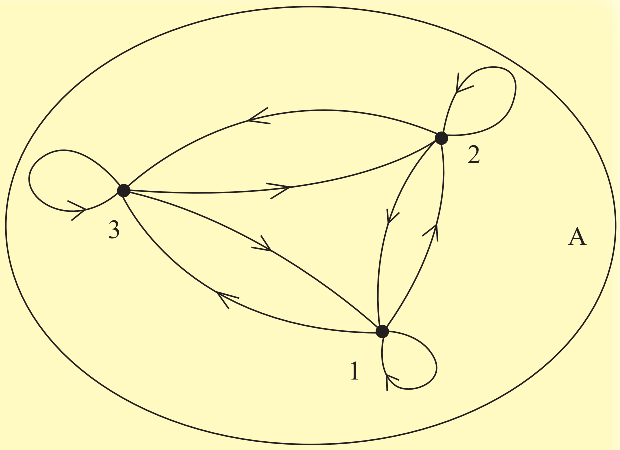
Пример. Нека $A=\{1,2,3\}$, тогаш

$A^2=\{1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$,   (^{2})=$\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.

На цртежот 6 претставен е графот на Декартовиот квадрат A^2.

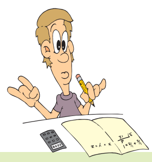


Црт. 5



Црт. 6

ЗАДАЧИ



1 Дадени се множествата: $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{1,2,b,c\}$. Одреди ги Декартовите производи $A\times B$ и $B\times A$. Дали важи комутативниот закон за Декартовиот производ?

2 Нека $M=\{2,4,6\}$, $=\{3,5\}$. Претстави ги со граф и координатна шема Декартовите производи $M\times$ и $\times M$.

3 Дадено е множеството $M=\{2,5,7,9\}$. Формирај го множеството M^2 и претстави го истото со граф и со табела.

4 Одреди од кои множества се добиени следниве Декартови производи:

а) $M=\{(3,4), (3,6), (6,4), (6,6), (9,4), (9,6)\}$,

б) $S=\{(c, a), (c, c), (c, 3), (2, a), (2, c), (2,3)\}$.

5 Запиши ги сите двоцифрени броеви, кај кои цифрата на десетките му припаѓа на множеството $\{3,5\}$, а цифрата на единиците - на множеството $\{0,2,4\}$.

V.2. ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Во втората тема се запознавме со претставување на реалните броеви на бројна оска. Притоа на секој реален број му одговара (му придружуваме) точно една точка на бројната оска Ox, и обратно: секоја точка на бројната оска е слика (е придружена) точно на еден реален број.

1 На бројната оска x одреди ги точките, што им се придружени на реалните броеви: -3; $1\frac{3}{4}$;2; 5 соодветно

Очигледно, бројната оска овозможува на точките од неа да им придружуваме броеви. Со придружениот број кон една точка, всушност, се определува положбата на таа точка на бројната оска во однос на почетокот O.

Да видиме сега дали постои можност и на точките од рамнината на некој начин да им придружуваме броеви, со кои положбата на една точка на рамнината да биде еднозначно определена. Таква можност постои. Тоа го постигнуваме со помош на таканаречениот правоаголен координатен систем во рамнината.

Дефиниција. **Правоаголен координатен систем во рамнина се вика унијата од две заемно нормални бројни оски со заеднички почеток, на кои е избрана една иста единечна отсечка.**

Заедничкиот почеток на бројните оски се вика **почеток** и на координатниот систем, или **координатен почеток** и се означува со O.

Двете бројни оски се викаат **координатни оски**. Едната од нив се вика **апсцисна оска** или ***x*-оска** и се означува со x, а другата - **ординатна оска** или **-оска** и се означува со Oy.

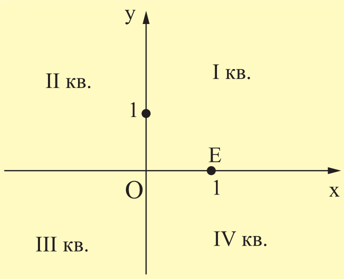
Правоаголниот координатен систем се означува со xOy (црт. 7), а се вика уште и **Декартов правоаголен координатен систем** по името на францускиот математичар Рене Декарт (1596-1650).

Координатните оски ја разделуваат рамнината на четири дела, наречени **квадранти** (четвртинки). На цртежот 7 покажано е кој од квадрантите се зема за прв, втор, трет и четврт.

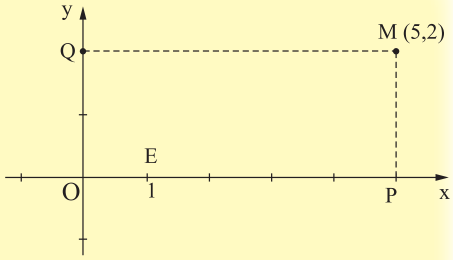
Рамнината во која е утврден некој координатен систем, се вика **координатна рамнина**.

На координатната рамнина да земеме една произволна точка M и истата ортогонално да ја проектираме на координатните оски Ox и Oy. Точката M на апсцисната оска нека се проектира во точката P, а на ординатната оска - во точката (црт. 8). На таков начин на координатните оски добиваме две точки P и . На ист начин и на секоја друга точка од координатната рамнина можеме да најдеме две соодветни точки на координатните оски.

Рене Декарт
(1596-1650)



Црт. 7

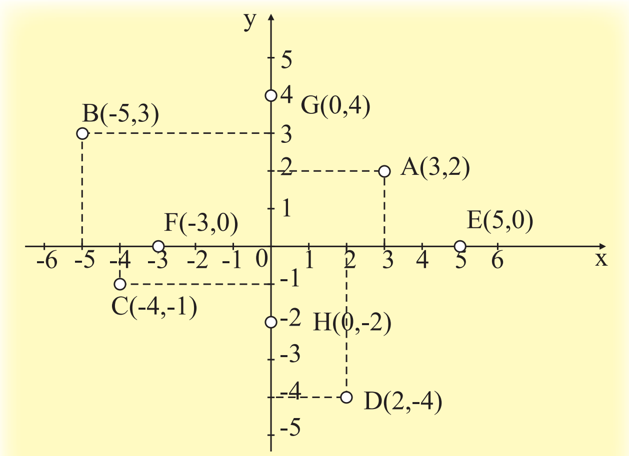


Црт. 8

Обратно, на секои две точки од координатните оски, на пример, на Р $\in$ Оx и $\in$ Оy, им соодветствува една и само една точка М во рамнината xOy. Тоа е пресечната точка на нормалите - повлечени низ земените две точки кон оските, на кои тие лежат.

На таков начин, определувањето на положбата на точката М од рамнината xOy се сведува на определување на положбата на нејзините проекции Р и   на координатните оски. Меѓутоа знаеме, дека положбата на една точка на оските се определува со нејзината координата. Нека x е координата на точка   на апсцисната оска, а y-координата на точката   на ординатната оска. Тогаш броевите x и y потполно ја определуваат положбата на точката М на рамнината и се викаат **координати** на точката М.

Првата координата x се вика **апсциса** на точката М, а втората координата y-**ордината** на точката М. Во случајов што го разгледуваме на цртежот 8, точката М има апсциса x=5 и ордината y=2, кое симболички го запишуваме со М(5,2).



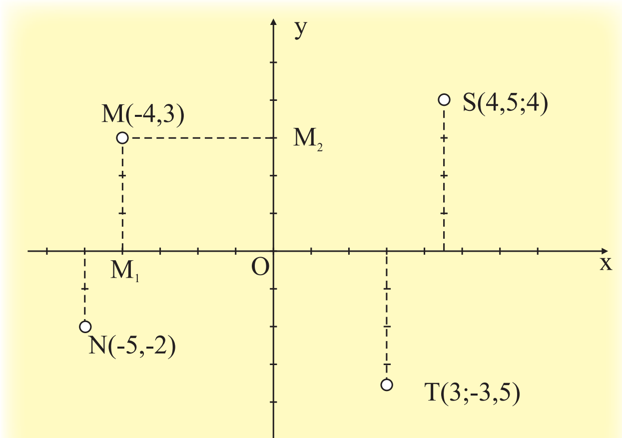
Црт. 9

На црт. 9 обележаните точки имаат координати: А(3;2), B(−5,3), C(−4,−1), (2,−4), (5,0), (−3,0), (0,4) и (0,−2).

Според тоа, точките од апсцисната оска имаат ордината еднаква на нула, а точките од ординатната оска имаат апсциса еднаква на нула. Координатниот почеток има координати О(0,0).Како што гледаме координатите на точките од координатната рамнина претставуваат подредени парови реални броеви.

2 Каде лежат точките на рамнината xOy, кои имаат: а) позитивни координати, б) негативни координати, в) позитивни апсциси и негативни ординати, г) негативни апсциси и позитивни ординати?

Да видиме сега како конструираме точка во рамнината, кога се дадени нејзините координати (x_0, y_0). На пример, да се конструираат точките во рамнината, чии координати се: М(−4,3),   (−5,−2), S(4,5; 4), Т(3;−3,5).

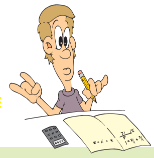


Црт. 10

За конструкција на точката М(−4,3) (црт. 10) прво, потребно е на Оx оската да ја одредиме точката M_1 што одговара на апсцисата x=−4, а на Оy-оската - точката M_2 што одговара на ординатата y=3. Потоа низ точките M_1 и M_2 повлекуваме нормали кон оските Оx и Оy. Пресекот на тие нормали е бараната точка М(−4,3) (црт. 10). Конструкцијата на другите точки: (−5;−2), S(4,5; 4) и Т(3; −3,5) е покажана на цртежот 10.

Од изложеното до тука следува дека: Со помош на правоаголниот координатен систем на секој подреден пар реални броеви му придружуваме (доделуваме) по една точка од рамнината xOy, и обратно: секоја точка од рамнината xOy е придружена на еден точно определен подреден пар реални броеви, кои се нејзини координати.

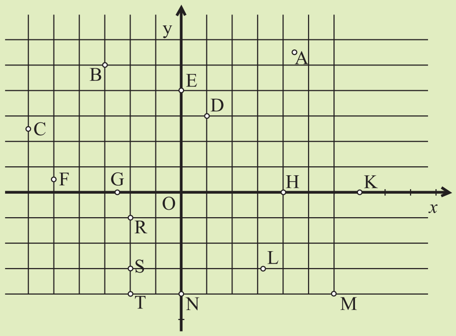
ЗАДАЧИ



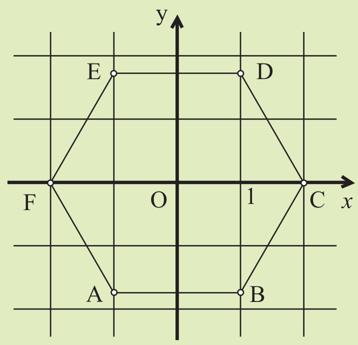
3 Како ја определуваме положбата на точките во рамнината?

4 Определи и запиши ги координатите на точките, што се обележани и означени на цртежот.

5 Определи ги координатите на темињата на правилниот шестаголник ВС на цртеж 12.



Црт. 11



Црт. 12

6 Во кој квадрант лежат точките:

а) $M_1(-5,3)$, $M_2(4,-4)$, $M_3(2,5)$, $M_4(-2,-7)$,

б) $K_1(-1,-4)$, $K_2(3,-1)$, $K_3(-8,4)$, $K_4(1,5)$?

7 Каде лежат точките: A(2,0), B(0,–3), C(0,0), (–4,0), E(0,1), потоа конструирај ги во рамнината xOy.

8 Пресекот на дијагоналите на квадратот ВС лежи во координатниот почеток. Темето A има координати (–3,–3). Определи ги координатите на останатите три темиња на квадратот.

9 Земи неколку точки, што имаат иста апсциса $x=3$, а различни ординати! Што забележуваш, каде лежат тие точки?

10 Конструирај неколку точки, што имаат иста ордината $y=-2$, а различни апсциси. Што забележуваш, каде лежат тие точки?

11 Од каков вид е триаголникот ВС, според неговите страни чии темиња имаат координати: а) A(2,0), B(6,3), C(6,–3), б) A(–2,0), B(4,0), C$(-2, 2\frac{1}{3})$? Пресметај ги должините на неговите страни.

12 Претстави го графички множеството: {(–2,0), (1,–3), (3,1), (0,–1), (2,4)}.

V.3. **РЕЛАЦИЈА. ПОИМ И ПРЕТСТАВУВАЊЕ**

Сега ќе се запознаеме со еден многу важен поим во математиката, со поимот **релација**. Тој збор во секојдневниот живот има широко значење. Но, во математиката зборот релација има доста прецизна смисла и значење. Да го разгледаме примерот:

На цртежот 13 претставени се множествата:

A={Влатко, Марија, Билјана, Борче} од 4 ученици и

B={Битола, Штип, Скопје, Дебар, Охрид} од 5 града.

Со стрелки е покажано: секој ученик од множеството A во кои градови од множеството B престојувал (ги познава). Гледаме, од Влатко поаѓаат две стрелки, од кои едната е насочена кон Битола, а другата кон Скопје. Тие означуваат дека на Влатко од наведените градови во B **му се познати** само Битола и Скопје. Велиме уште дека на Влатко му **соодветствува (му е придружен)** градот Битола, а исто така му соодветствува (или **е во релација со**) градот Скопје. Потоа гледаме, од Марија не поаѓа ниту една стрелка. Тоа значи, дека Марија не била ниту еднаш во ниеден од наведените градови во B, односно дека на Марија **не ѝ соодветствува** (или **не е во релација со**) ниту еден елемент од множеството B.

Од цртежот 13, исто така, гледаме дека од сите елементи во B само до градот Дебар не доаѓа ниту една стрелка. Тоа значи дека во тој град никој од учениците не престојувал ниту еднаш, односно дека тој елемент од B не соодветствува на ниеден елемент од A.

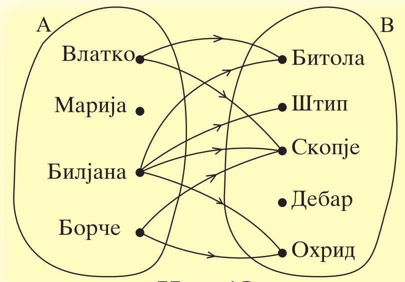
Во ваков случај велиме дека со помош на стрелки е зададена една **релација** (**соодветство** или **придружување**) од множеството A во множеството B. A за фигурата на црт. 13 што е составена од точки со кои се претставени елементите на множествата A и B, и стрелките што ги сврзуваат некои од нив, велиме дека е **граф** на таа релација.

Очигледно е дека секоја стрелка од графот на црт. 13 заменува всушност еден подреден пар објекти, од кои првиот е елемент на A и стои на почетокот на стрелката, а вториот е елемент на B и стои на крајот на стрелката. Според тоа: колку стрелки - толку и подредени парови: (Влатко, Битола), (Влатко, Скопје), (Билјана, Битола), (Билјана, Штип), (Билјана, Скопје), (Билјана, Охрид), (Борче, Скопје), (Борче, Охрид). Сите тие подредени парови образуваат едно точно определено множество Г, кое е подмножество од Декартовиот производ на множествата A и B, т.е. $\Gamma \subseteq A\times B$.

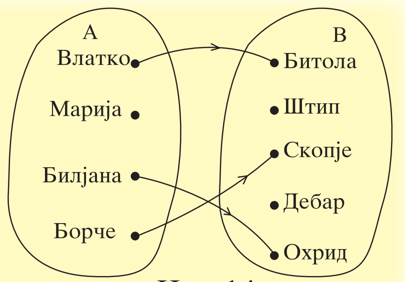
Множеството Г се вика **график** на оваа релација од A во B.

Од множеството A во множеството B може да се воспостават и други релации. Еве една друга таква релација од A во B:

На цртежот 14 со граф е зададена релација од A во B, при која: секој ученик од е **во релација со** (му е придружен) оној град од B во кој тој е роден.



Црт. 13



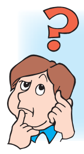
Црт. 14

При оваа релација дали може еден ученик од A да е во релација со два града од множеството B? Зошто?

Релацијата што е зададена на црт. 14 со граф, може да биде зададена и со следново подмножество од Декартовиот производ A×B; поточно со нејзиниот **график**: Г={(Влатко, Битола), (Билјана, Охрид), (Борче, Скопје)}.

Очигледно е дека, двете зададени релации од множеството A во множеството B се разликуваат една од друга според **правилото на придружување**. Кај првата релација (црт. 13) тоа правило гласи: „... **го познава градот** ...“ а кај втората релација (црт. 14) правилото на придружување гласи: „...**е роден во**... “.

Општо, поимот релација го воведуваме со следнава:



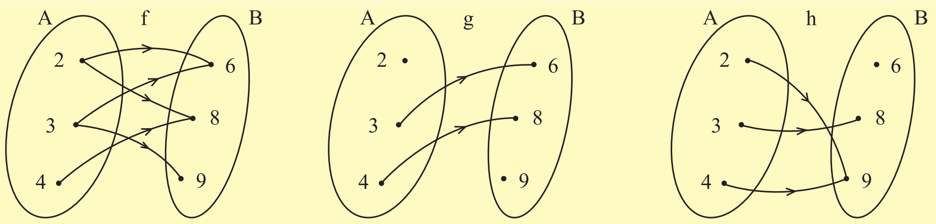
***Дефиниција*. Нека A и B се две непразни множества. Секое подмножество од Декартовиот производ A×B се вика релација од A во B,**

т.е. е релација од A во B, ако и само ако ⊆ ×B. Ако е $(x, y)\in$ и ⊆ ×B, тогаш велиме:

***x* е во релација** “ и пишуваме *x* *y*.

За разликување на релациите една со друга често ги означуваме и со буквите: , α, , итн. Со иста буква, обично, го означуваме и правилото на придружување на релацијата.

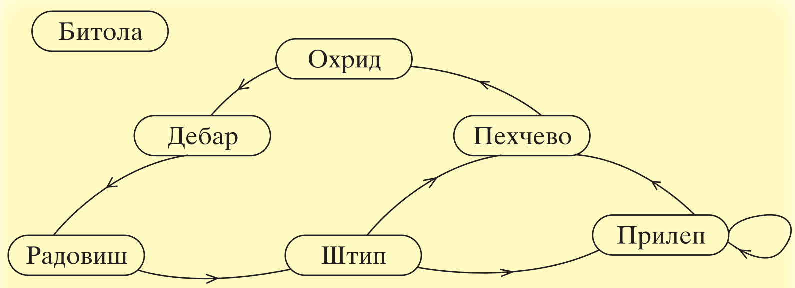
На цртеж 15 со помош на граф зададени се три релации , и од множеството A={2,3,4} на множеството B={6,8,9}. Правилото на придружување на релацијата е: „ **се содржи во** “. Обидете се да ги откриете правилата на придружување на релациите и .



Црт. 15

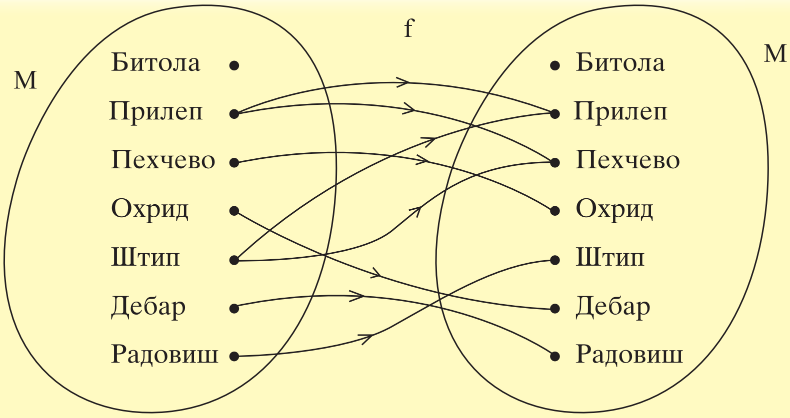
Релации можат да бидат воспоставени и меѓу елементите на едно исто множество. Значи множествата A и B не мора да бидат различни. На пример, да го разгледуваме множеството:

M={Битола, Прилеп, Штип, Охрид, Дебар, Радовиш, Пехчево}, кое е подмножество од сите градови во Република Македонија.



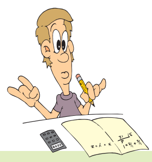
Црт. 16

Забележуваме дека, последната буква во името на градот Охрид е прва буква во името на градот Дебар. Имајќи го тоа предвид на цртеж 16 со граф зададена е релација меѓу елементите на множеството M. Таа релација може да се зададе и како на црт. 17.

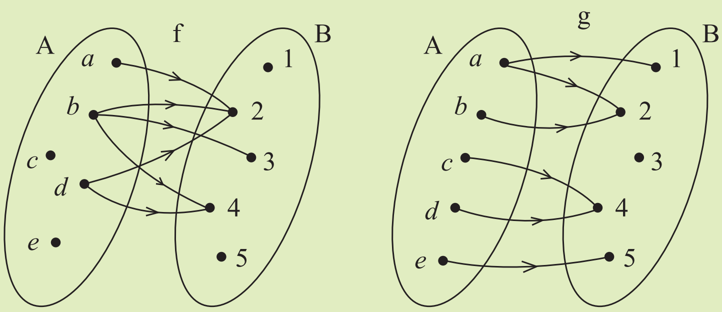


Црт. 17

ЗАДАЧИ



1. На цртежот 18 со граф се зададени две релации и од множеството А на множеството В. Кај релацијата :
   а) Елементот *a* со кои елементи е во релација?
   б) Елементот *b* е во релација со колку и кои елементи?
   в) Елементот 4∈B на колку и на кои елементи од е придружен?
   Кај релацијата
   г) Постои ли елемент во А кој не е во релација со ниту еден елемент од В?
   д) Постои ли елемент во А кој не е во релација со повеќе од еден елемент во множеството В?



Црт. 18

2. Меѓу елементите на множествата A={1,2,3} и B={*p*, *q*,*r*} задај неколку релации!

3. Дадени се множествата A={12,15,24,72,45} и B={2,1,3,4,5,6,7,8,9}. Со помош на граф и график претстави ги следниве релации:
   а) Секој двоцифрен број *x*∈ е во релација со збирот на неговите цифри *s*∈B,
   б) Секој двоцифрен број *x*∈ е во релација со цифрата на неговите единици *e*∈B,
   в) На секој двоцифрен број *x*∈A придружена му е цифрата на неговите десетки *d*∈B.

4 Релациите и од множеството А на множеството В, што се зададени со граф на црт. 18, запиши ги со график, т.е. како подмножества од Декартовиот производ А×В.

5 Меѓу елементите на множеството М={2,3,4,6,8,9} запиши ја со граф релацијата , при која на бројот x∈М му е придружен број y од истото множество, така што:
а) $y>x$, б) y x, в) y е делив со x.

V.4. **ФУНКЦИЈА. ПОИМ И ПРЕТСТАВУВАЊЕ**

Нека се дадени две непразни множества $A=\{a,b,c\}$ и В={1,2,3,4,5}. На цртежот 19 со графови се зададени три релации , и од множеството А во множеството В.

Кај релацијата забележуваме дека, **на секој елемент** од множеството А му е придружен **еден и само еден** елемент од множеството В. Таквите релации во матаматиката играат многу важна улога и се викаат **функции** (или **пресликувања**).

Релацијата (црт. 19) не е функција, бидејќи во множеството А постои b∈А на кој не му е придружен елемент од множеството В (од елементот b не поаѓа стрелка).

Релацијата (црт. 19), исто така, не е функција, бидејќи на елементот c му се придружени повеќе од еден елемент од множеството В (од елементот c поаѓаат две стрелки).

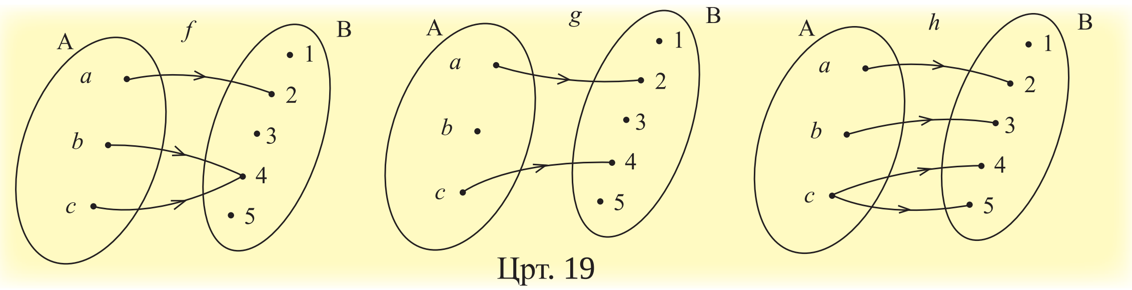
Според тоа, ја усвојуваме следнава:

Дефиниција. **Релацијата, при која според некое правило (закон) на секој елемент x∈A му е придружен еден и само еден елемент $y\in B$, се вика функција од множеството А во множеството В, и пишуваме: : А→В, односно А ⟶ В.**

Множеството А се вика **домен** или дефинициона област, а В **- кодомен** или **област на менување на функцијата** . При функцијата →В, ако на елементот x∈А му е придружен елементот y∈В, тогаш за x велиме дека е **оригинал**, а за y велиме дека е **слика** на x, или **вредност на функцијата** за елементот x. Тоа симболички го запишуваме: $y =$ (x).

На пример, кај функцијата : А→В на цртежот 19, имаме:

$(a) = 2, \quad (b) = 4, \quad (c) = 4.$



Црт. 19

Кај функцијата $:A\to B$, симболот x со кој го означуваме кој било елемент од А, се вика **независно променлива** (или **аргумент**), а y или (x) се вика **зависно променлива**, или **вредност на аргументот** x. Да наведеме неколку примери на функции:

Пример 1. Нека   е множество на учениците од едно одделение, а B={1,2,3,4,5} -множество од петте можни оценки по математика. На секој ученик $x \in$ A да му ја придружиме оценката $y \in B$, што тој ја има по математика. Ако неоценети ученици по математика во одделението нема, тогаш добиваме функција   од A во B.

Пример 2. Стоиме пред излогот на музички инструменти. Сите изложени инструменти во излогот образуваат множество M, а нивните цени - множество C. На секој инструмент $x \in$ M придружен му е елемент $y \in$ C, неговата цена.

Тука имаме функција   од множеството M во множеството C, која на инструменот $x \in$ M му ја придружува неговата цена (x).

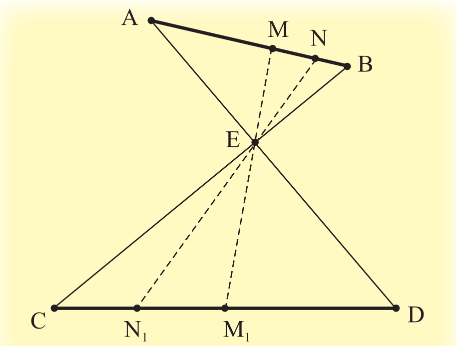
Во двата разгледани примера доменот и кодоменот на функцијата се конечни множества, но тие можат (двете или само едно од нив) да бидат и бесконечни множества.

Пример 3. Нека N е множество на сите природни броеви (бесконечно множество) и S={0,1}. На секој $x \in N$ да му придружиме или 0∈S, ако x е парен број; или 1∈S, ако x е непарен број. Притоа добиваме функција $:N \to$ S. За неа имаме:

 (1)=1,   (2)=0,   (3)=1,   (4)=0,   (5)=1, итн.

Функцијата   со домен A и кодомен B често ја викаме и **пресликување**   од множеството A во множеството B. Терминот „пресликување" посебно е погоден при разгледување на множества точки во геометријата.

Пример 4. Нека е R множество на сите реални броеви, а -множество на сите точки од бројната оска. Знаете како на секој елемент $x \in R$ на одреден начин му придружуваме еднозначно определена точка $T \in s$ од бројната оска s. Велиме, тука имаме пресликување   од множеството R во множеството   и пишуваме $:R \to s$, при што со T(x) ја означуваме онаа точка T од оската, која му е придружена на бројот $x \in R$.



Црт. 20

Пример 5. На цртежот 20 покажано е како може да се воспостави една релација   од множеството точки од отсечката AB на множеството точки од отсечката C , при која   → , B→C, M→ $_1$,   → $_1$, итн. Таа релација претставува определена функција (пресликување)   од множеството точки на отсечката AB на множеството точки на отсечката C , т.е. :AB→C . Притоа имаме: (A)= , (B)=C, (M)=M_1.

За две функции   :A→B и :C→   сметаме дека **се еднакви**, ако и само ако тие имаат еднакви домени (A=C), еднакви кодомени (B=) и (x)= (x) за секој $x \in$ A=C. Според тоа, за една функција :A→B ќе сметаме дека е зададена, ако се познати: доменот A, кодоменот B и правилото   на придружување.

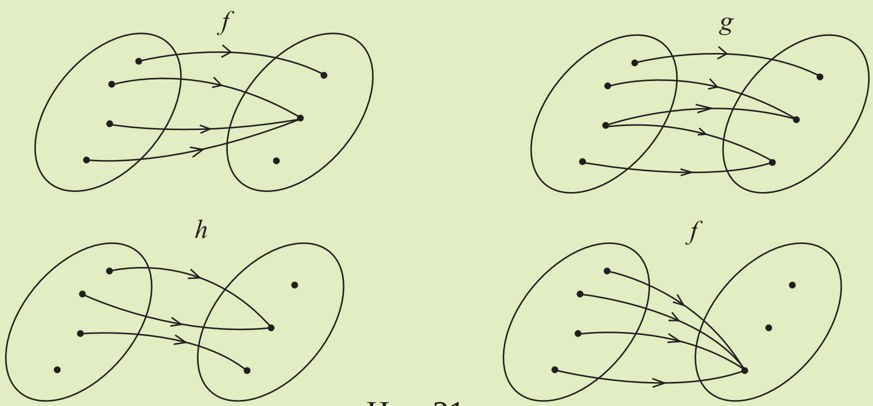
Множеството од сите елементи (x) за сите можни $x \in$, т.е. кое се состои од сликите на сите елементи на A кај функцијата :A→B, се вика **слика** на доменот A, или **множество на вредностите на функцијата**   и симболички се означува со (A). Значи ( )={ $(x)|x \in$ }. Очигледно ( ) ⊆ B. На пример, ако :A→B е дадена на црт. 19, тогаш ( ) = {2,4}.

ЗАДАЧИ

1 Кои услови треба да ги исполнува една релација меѓу елементите на множеството A и множеството B, за да претставува функција од множеството A во множеството B?

2 Провери дали релациите   и , што се претставени со графови на цртежот 18, се функции.

3 Кои од релациите, што се претставени со графови на цртежот 21, се функции?



Црт. 21

4 Образувај ги семожните релации меѓу елементите на множествата A={a,c} и B={1,2}. Кои од тие релации се функции?

5 Дадени се множествата A={–2,–1,0,1,2} и B={0,1,2}. Секој број x∈A е во релација со неговиот модул x ∈B. Нацртај го графот на таа релација и провери дали таа е функција.

6 Кои од следниве искази се точни:

а) Секоја релација од множеството A во множеството B е подмножество од Декартовиот производ ×B,

б) Секоја релација од A во B е функција,

в) Некои од релациите од A во B се функции?

7 Нека M е множество од сите страници на овој учебник, а M-множество на сите природни броеви. На секоја страница од учебникот ѝ е придружен број. Дали таа релација е функција?

8 Нека π е рамнина, а K-множество на сите кружници во рамнината π. Секоја кружница k∈K е во релација со нејзиниот центар O - елемент од π. Дали таа релација е функција? Што е домен, а што кодомен на таа функција?

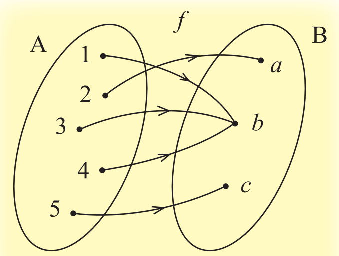
9 Нека M е множество на сите ученици во едно одделение, а S-множество на сите столици во училницата. На секој ученик x∈M му соодветствува столот y∈S на кој тој седи. Дали таа релација (соодветство) претставува функција?

V.5. ЗАДАВАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ

Правилото   може да биде дадено на различни начини и тоа: **шематски со граф**, **табеларно**, **графички со график** и **аналитички со формула**. Како практично го постигнуваме тоа ќе покажеме на примери.

V.5.1. **Шематско и табеларно задавање на функциите**

Пример 1. Нека се дадени множествата A={1, 2, 3, 4, 5} и B={a, b, c}. Кога множествата A и B се конечни, функцијата   од A во B може да биде зададена со помош на стрелки како на црт. 22. Притоа правилото   на придружување гласи: На секој елемент $x\in$ му соодветствува оној елемент $y\in$B кон кого е упатена стрелката што поаѓа од него. Значи: (l)=b, (2)=a, (3)=b, (4)=b и (5)=c. Бидејќи од секој елемент на множеството A поаѓа само по една стрелка, затоа велиме: со графот на црт. 22 е зададена функцијата   од A во B.



Црт. 22

Ваквиот начин на задавање на функцијата со граф се вика **шематско задавање**.

Функцијата :A→B може да биде зададена и со **табела**, која се состои од два реда или две колони. На пример вака:

$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & a & b & b & c \end{pmatrix}$ или

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	b	a	b	b	c

односно:

$f=\begin{bmatrix} 1\to b \\ 2\to a \\ 3\to b \\ 4\to b \\ 5\to c \end{bmatrix}$ или

x	$f(x)$
1	b
2	a
3	b
4	b
5	c

Во првиот ред, односно левата колона запишани се сите елементи на множеството , а во вториот ред, односно во десната колона наспроти нив се напишани соодветните на нив слики во множеството B.

Ваквиот начин на задавање на функциите се вика **табеларен начин**.

Табеларен начин на задавање на функциите широко се применува во практиката. Такви се табелите на квадратите, кубовите, процентите на броевите, итн. На пример, во медицината на многубројни примери и мерења утврдено е дека висината на детето од неговото раѓање до навршената седма година се менува (просечно) како што е покажано во следнава табела:

Година на старост	0	1	2	3	4	5	6	7
Висина во cm	50	70	80	90	98	106	113	120

Велиме, висината на детето **е функција** од годините на возраста.

V.5.2. **Графичко задавање на функциите**

Пример 2. Дадени се множествата $=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ и $B=\{0,1,2,3,4,5\}$. Функцијата нека е зададена со следната табела.

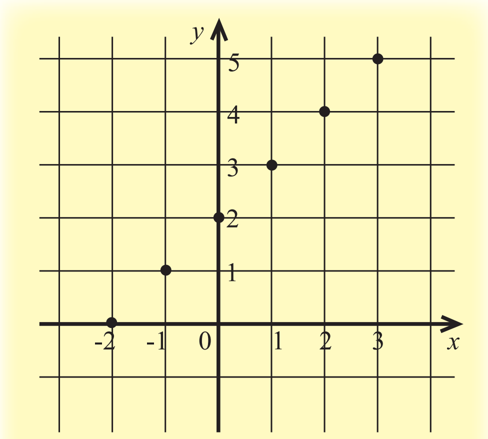
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

Очигледно е дека функцијата $:A\rightarrow B$ определува множество од подредени парови, кое, обично, го означуваме со Γ т.е.

Γ $=\{(-2,0), (-1,1), (0,2), (1,3), (2,4), (3,5)\}$.

Забележуваме, множеството Γ се состои од толку елементи (подредени парови), колку што елементи има даденото множество A и тоа: првиот елемент на секој од тие подредени парови е елемент од множеството , а вториот - е елемент од множеството B и претставува слика на првиот елемент за дадената функција , т.е. $0=(-2)$, $1=(-1)$, $2=(0)$, $3=(1)$, $4=(2)$, $5=(3)$.

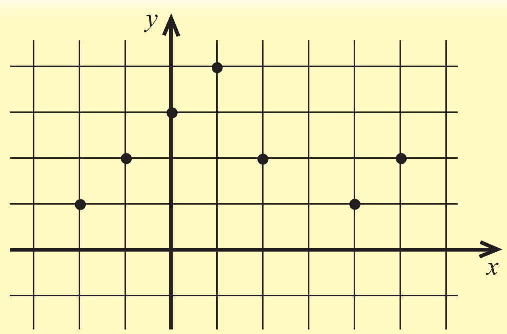
На секој подреден пар $(x,y)\in\Gamma$ можеме да гледаме и како на точка со апсциса x и ордината y, а на множеството подредени парови Γ - како на множество точки, кои лесно можат да се конструираат во координатната рамнина xOy (црт. 23).



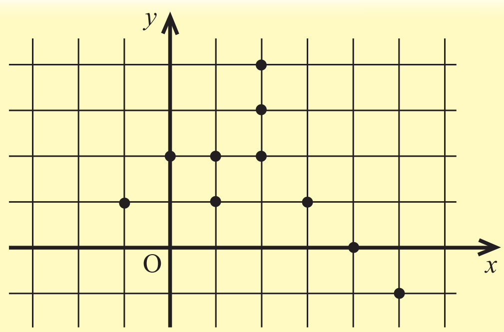
Црт. 23

Множеството на сите подредени парови (точки) $\Gamma_г$ конструирани во рамнината xOy, се вика **график на функцијата** . Функцијата $:A\rightarrow B$, што беше зададена табеларно, може да биде зададена и со нејзиниот график како на црт. 23. Ваквото задавање на функцијата $:A\rightarrow B$ со помош на нејзиниот график, се вика **графичко задавање**.

Ако во координатниот систем се зададени произволни точки тие можат да определат некоја функција, но не секогаш. На пример на црт. 24 е определена функција, но со графикот на црт. 25 не е зададена функција, бидејќи за некои вредности на x се придружени по неколку вредности на y, а тоа не определува пресликување.

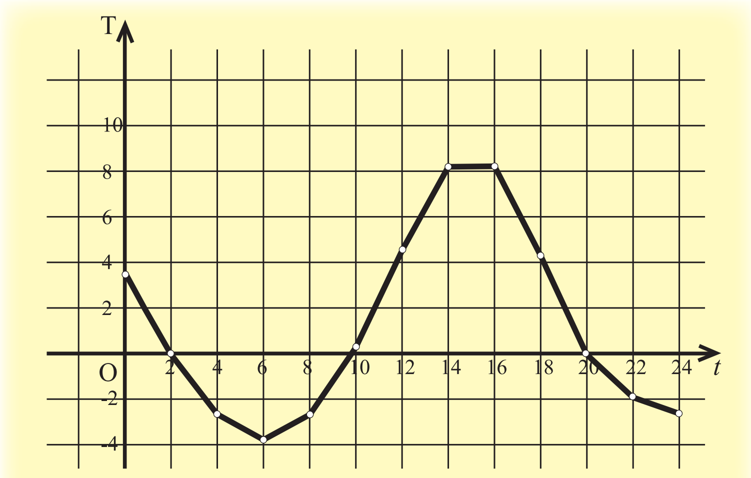


Црт. 24



Црт. 25

Графичкото задавање на функциите широко се користи во различните области на науката и практиката. При проучувањето на многу процеси во природата се служиме со специјални направи, какви што се на пример: термографот, барографот, електрокардиографот и др. Со нивна помош добиваме разни криви, што се графици на одредени функции. На цртежот 26 покажан е графикот на промената на температурата на воздухот во текот на еден ден, запишан од термограф. Од тој график може да се прочита каква била температурата на воздухот во секој момент од денот. Во медицината со помош на електрокардиографот се добиваат криви (електрокардиограм), од кои лекарот може да ја види работата на човечкото срце.



Црт. 26

V.5.3. **Аналитичко задавање на функциите**

Во дефиницијата на функцијата :A→B ништо не беше речено за природата на елементите на множествата A и B. Значи, тие можат да бидат објекти од најразлична природа. Ако кодоменот B е бројно множество, т.е. ако вредностите на функцијата се броеви, тогаш таа се вика **бројна функција**. Ако, пак, и доменот е бројно множество, тогаш функцијата се вика **бројна функција со броен аргумент**. Кај овие функции законот (правилото) на придружување најчесто е зададен (ако тоа е можно) во вид на некој аналитички израз или формула, во која е назначено кои операции треба да се извршат со аргументот x за да се добие соодветната вредност на функцијата .

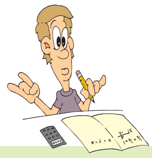
Пример 3. Нека е A={-2,-1, 0, 1, 2}. На секој елемент $x\in A$ да му придружиме број y, што ќе го пресметаме според формулата $y = x^2$-3. Оттука добиваме:

(-2)=1, (-1)= -2, (0)= -3, (1)= -2, (2)=1.

Задавање на функциите со помош на некоја формула y= (x се вика **аналитички начин на задавање**. Тој е погоден нарочно кога доменот и кодоменот на функцијата се бесконечни множества. При задавањето на функцијата со формула неопходно е потребно да е познат доменот на функцијата.

Ако доменот на функцијата , што е зададена со формулата $y=$ (x), е множеството R на сите реални броеви за кои изразот (x) има смисла; тој обично не се соопштува, а се подразбира. На пример, ако е речено дека функцијата е зададена со формулата $y=\dfrac{5}{x-2}$, а ништо не е кажано за доменот и кодоменот на функцијата, тогаш се подразбира дека доменот е најголемото подмножество од множеството на реалните броеви, во кое законот на придружување (изразот (x)) има смисла, а за кодомен секогаш се подразбира множеството на сите реални броеви. Во нашиот случај изразот $\dfrac{5}{x-2}$ има смисла за секој реален број $x \neq 2$.

ЗАДАЧИ



1 Големината на еден внатрешен агол α на правилниот многуаголник зависи од бројот на страните n на многуаголникот. За некои правилни многуаголници таа зависност е дадена со табелата.

n	3	4	5	6	8	9	10	12	20
α	60°	90°	108°	120°	135°	162°	144°	150°	162°

Колку изнесува големината на еден внатрешен агол кај правилниот: 5-аголник, 9-аголник? Кај кој правилен многуаголник внатрешниот агол изнесува 150 ? Дали зависноста на α од n е функција?

2 Зависноста на атмосферскиот притисок р од надморската висина Н зададена е со табелава:

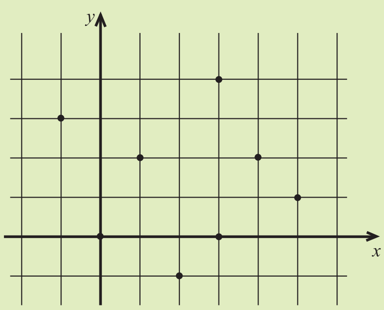
Н (во m.)	0	500	1000	2000	3000	4000	5000	10000	2000
p во mm Hg	760	716	647	596,1	525,7	462,2	404,8	198,1	40,9

Колкав е атмосферскиот притисок на висина: 500m, 3000m? На која висина притисокот изнесува: 674 mm H , 405 mm H ? Дали зависноста на притисокот р од Н претставува функција?

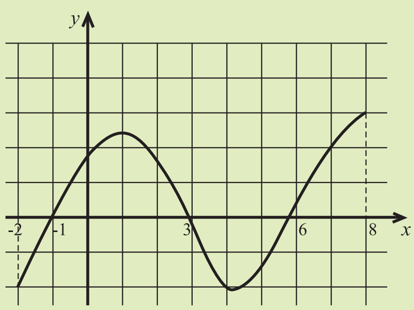
3 Функцијата е зададена графички на цртежот 27. Користејќи го графикот, пополни ја табелата:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y								

Што е домен, а што кодомен на таа функција?



Црт. 27

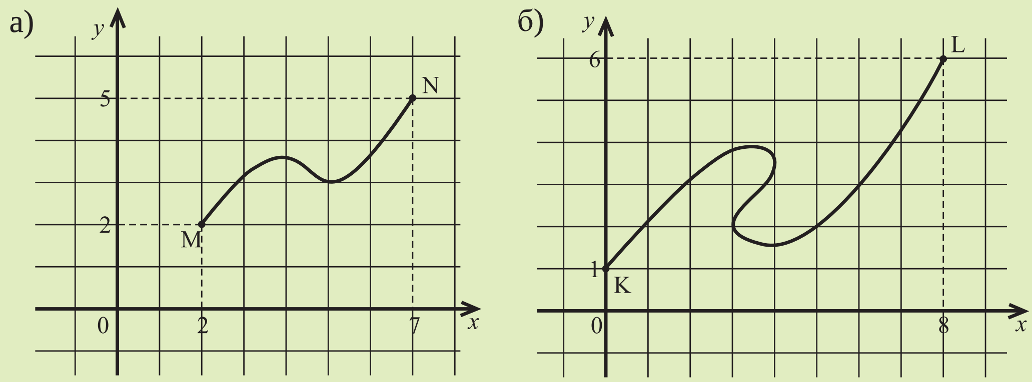


Црт. 28

4 На црт. 28 нацртан е графикот на функцијата :[−2,8] → R.
Одреди: (0), (2), (6). За кои вредности на x:
а) (x)=0, б) (x)>0, в) (x) 0?

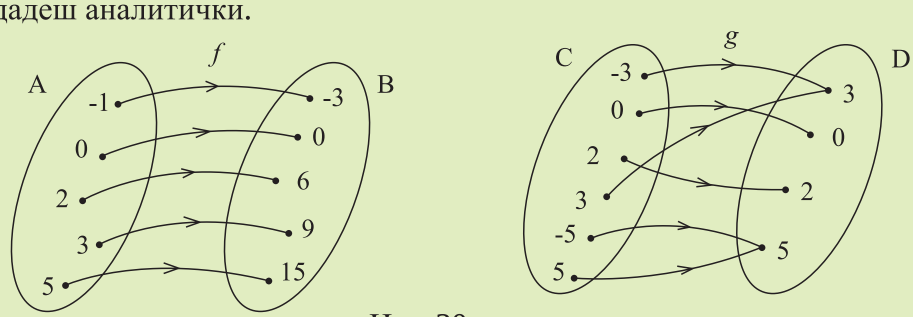
5 На цртежот 29 нацртани се графиците на две релации. Кривата (црт. 29а) е график на релацијата од множеството A=[2, 7] на B=[2, 5], а кривата K (црт. 29б) е график на релацијата од C=[0, 8] на =[1, 6]. Дали тие две релации се функции?

6 Функцијата е зададена со формулата $y=x-5$. Која вредност на функцијата соодветствува на $x=-2$. На која вредност на аргументот x му соодветствува вредност $y=7$?



Црт. 29

7 Функциите и зададени се со графови на цртежот 30. Обиди се тие две функции да ги зададеш аналитички.



Црт. 30

8 На цртежот 30 со помош на стрелки (со граф) зададена е функцијата : →B. Со промена на насоката на сите стрелки ќе се добие нова функција φ:B→ . Изрази ја функцијата φ аналитички.

V.6. **РАЗМЕР. ЧЛЕНОВИ И ВРЕДНОСТ**

Нека се дадени две истородни величини A и B, чии мерни броеви a и b се изразени со иста единица мерка. Кога ги споредуваме тие величини, често прашуваме:

- За колку единици мерки е поголема едната величина од другата?
- Колку пати едната величина е поголема од другата? или
- Каков дел едната величина претставува од другата величина?

За да одговориме на првото прашање, треба од мерниот број на поголемата величина да го одземеме мерниот број на помалата величина, и разликата *a–b* ќе ни покаже за колку единици мерки едната величина е поголема од другата.

За да одговориме, пак, на второто или третото прашање, треба мерниот број на едната величина да го поделиме со мерниот број на другата величина, т.е. треба да го образуваме количникот *a b*.

Ако е $a>b$, количникот $a{:}b$ ќе покаже **колку пати првата величина е поголема од втората**;

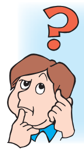
ако е a b, тогаш количникот $a{:}b$ ќе ни покаже **каков дел е првата величина од втората**.

Дефиниција 1. **Количникот** $a{:}b$ **или** $\frac{a}{b}$ **на мерните броеви на две истородни величини се вика размер или однос на тие величини и се чита: „*a* спрема “.**

Мерните броеви *a* и *b* се викаат **членови на размерот**, и тоа: *a* **прв**, а *b* **втор член на размерот**. А вредноста на пресметаниот количник се вика **вредност на размерот**.

Бидејќи количникот на два истоимени броја е неименуван (апстрактен) број, затоа и размерот на две истоимени величини е неименован број.

Размер може да се образува и од кои било два реални броја, на пример: 7:4; 3:5, итн. Според тоа, ја усвојуваме следнава:



Дефиниција 2. **Размер на два реални броја е количникот на тие броеви.**

Бидејќи размерот е количник, затоа сите својства на количникот ќе важат и за размерот. Ќе наведеме само едно својство:

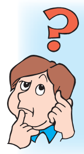
Вредноста на размерот не се менува, ако двата негови члена се помножат (или поделат) со еден ист реален број, различен од 0

Врз основа на ова својство размерите, чии членови се дропки, може да се заменат со размери на цели броеви. На пример:

$$\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=\left(\frac{5}{6}\cdot 6\right):\left(\frac{2}{3}\cdot 6\right)=5:4; \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=(ad):(bc)\cdot$$

1 Какви величини можеме да споредуваме? Наведи примери.

2 Колку членови има секој размер?



Дефиниција 3. **Размерите : и : , кои се разликуваат само по местата на своите членови, се викаат обратни еден на друг.**

На пример, 7:4 и 4:7 се заемно обратни размери. Обратните размери ги имаат следниве поважни својства:

1 . **Размерот на реципрочните вредности на членовите на даден размер е обратен на дадениот размер**.

Доказ. Нека е даден размерот a:b. Размерот на реципрочните вредности на членовите на дадениот размер е:

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}\cdot ab\right):\left(\frac{1}{b}\cdot ab\right)=b:a$$

Значи, a:b и $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ се заемно обратни.

2 . **Производот на два заемно обратни размери е еднаков на** 1.

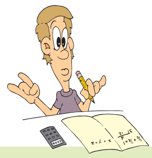
Доказ. $(a:b)\cdot(b:a)=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$. На пример, $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=1$.

3 Колку размери можат да се образуваат од два броја и како се викаат тие?

Со размери многу често се среќаваме во градежништвото при искажување на составот на бетонот, малтерот итн. Така на пример, при правење на малтер обично се мешаат 7 дела песок со 2 дела гасена вар, кое го искажуваме со размерот 7:2.

Размерот на географските карти, плановите и различните цртежи не се ништо друго, туку однос на должините од картата и тие во природата. Размерот 1:100 на некој план ни покажува дека секоја линија од планот е 100 пати помала од соодветната линија во природата.

ЗАДАЧИ



4 Каков размер постои помеѓу:
а) метарот и сантиметарот, б) сантиметарот и метарот,
в) дециметарот и метарот?

5 Запиши го размерот помеѓу:
а) часот и минутата, б) часот и денот, в) минутата и секундата.

6 Каков размер постои помеѓу:
а) 750 грама и 2 , б) 8 cm и 3 m,
в) 2 дена и 15 часа, г) $\frac{1}{2}$литар и 5 децилитри?

7 Замени ги следниве размери, чии членови ќе бидат цели броеви:
а) 0,8:0,3; б) 0,7:2; в) 5:0,2; г) $\frac{3}{5}:\frac{5}{8}$.

8 Пресметај ја вредноста на размерот:
а) 12:15, б) $2\frac{1}{2}$:4, в) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$.

9 100 од Целзиусовата термометарска скала одговараат на 80 од Реомировата скала. Одреди го размерот на Целзиусовите и Реомировите степени и обратно.

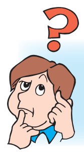
10 Во една акција за пошумување учениците од а одделение засадиле 800 садници, од кои 50 не се фатиле. Колкав е размерот и процентот на зафатените садници од вкупно засадените?

11 Кои од следниве размери имаат еднакви вредности (се еднакви):
а) 18:6, б) 9:3, в) 20:5, г) $10:2\frac{1}{2}$, д) 3:1?

V.7. ПРОПОРЦИЈА. ПОИМ И СВОЈСТВА

1 За два размера, кои имаат еднакви вредности, велиме дека **се еднакви**. Такви се, на пример, размерите 21:7=3 и 18:6=3.

Според тоа, важи равенството 21:7=18:6. Тоа равенство уште се вика и **пропорција**. За неа ја усвојуваме следнава:



***Дефиниција*. Пропорција е равенство на два еднакви размера.**

Пропорцијата 21:7= 18:6 ја читаме: „21 спрема 7 се однесува исто како 18 спрема 6“.

1 Провери дали следниве равенства се пропорции:

а) 12:3 = 40:10, б) $5:2 = 7\frac{1}{2}:3$, в) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4} = 6:3$.

Секоја пропорција има две страни: лева и десна, односно четири членови, коишто од лево на десно се викаат: прв, втор, трет и четврт член. Првиот и четвртиот член се викаат уште и **крајни** или **надворешни**, а вториот и третиот член заедно се викаат **средни** или **внатрешни членови** на пропорцијата. Така во пропорцијата : = : или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, надворешни членови се **а** и , а внатрешни и .

2 Пропорцијата ги има следниве поважни својства:

1 . **Кај секоја пропорција производот на крајните членови е еднаков на производот на средните членови**.

Тоа е **основно својство** на пропорциите.

Доказ. Нека е дадена пропорцијата $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ако ги помножиме двете нејзини страни со производот bd, ќе добиеме:

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd, \text{ односно } ad = bc.$$

Пример. Кај пропорцијата 21:7=6:2 гледаме дека 7·6=21·2. Ќе покажеме дека важи и обратното својство, имено:

2 . **Ако производот на два броја е еднаков на производот на други два броја, тогаш од тие четири броеви може секогаш да се состави пропорција**. Притоа претпоставуваме дека ниеден од тие четири броеви не е нула.

Доказ. Нека се дадени четири броеви a,b,c и d различни од нула, такви што да е $ad=bc$. Ако двете страни на равенството $ad=bc$ ги поделиме со производот bd (во кој едниот множител е земен од левата, а другиот од десната страна на даденото равенство), ќе ја добиеме пропорцијата $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, т.е. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, односно $ad=bc$.

Пример. Од броевите 2, 3, 6 и 9 може да се состави пропорција, бидејќи е 2·9=3·6. Тоа се пропорциите:

2:3 = 6:9; 3:9 = 2:6 и др.

3 . **Секоја пропорција со разместување на нејзините членови може да се претстави уште на 7 различни видови.**

Доказ. Од равенството $ad=bc$, можат да се состават следниве осум пропорции:

1) $a:b=c:d$, 2) $a:c=b:d$, 3) $d:b=c:a$, 4) $d:c=b:a$,
5) $b:a=d:c$, 6) $c:d=a:b$, 7) $b:d=a:c$, 8) $c:a=d:b$,
бидејќи за секоја од нив важи $ad=bc$.

2 Од броевите 3, 5, 6 и 10 за кои важи 3·10=5·6 состави ги сите осум можни точни пропорции.

4 . **Пропорцијата останува вистинита (точна), ако еден надворешен и еден внатрешен член, или сите нејзини членови се помножат (или поделат) со еден ист реален број различен од нула.**

Доказ. Од пропорцијата $a:b=c:d$, за кој било реален број $k\neq0$ може да се добијат следниве пропорции: $(ak):(bk)=c\ d$, $a:b=(ck):(dk)$, $(ak):b=(ck):d$, $a:(bk)=c\ (dk)$ и $(ak):(bk)=(ck):(dk)$. Сите овие пропорции се точни, бидејќи кај секоја од нив производот на надворешните членови е еднаков на производот од внатрешните членови.

Ова својство го користиме за упростување на пропорциите и тоа: кога некои од членовите на пропорцијата се дропки или децимални броеви, или кога еден внатрешен и еден надворешен член, или сите членови на пропорцијата имаат заеднички множител.

3 Дадена е пропорцијата $\frac{8}{15}:4=\frac{2}{3}:5$. Ослободи се од именителите на дропките во неа.

3 Често се случува еден од четирите членови на пропорцијата да е непознат, или да содржи променлива. Во тој случај пропорцијата со примена на основното својство, всушност, станува равенка со една непозната. Да се реши дадена пропорција, значи, да се реши равенката, што се добива со примена на основното својство на пропорциите.

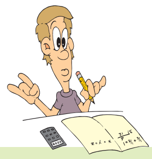
Пример 1. Да се одреди непознатиот член на пропорцијата $x:6=\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$.

Решение. Согласно основното својство од дадената пропорција ја добиваме равенката $\frac{4}{9}\cdot x=6\cdot\frac{2}{3}$ или $\frac{4}{9}\cdot x=4$, од каде $x=4:\frac{4}{9}=4\cdot\frac{9}{4}=9$.

Пример 2. Да се одреди променливата x во пропорцијата 12:(x+1)=3:4.

Решение. Дадената равенка прво ја трансформираме во равенката 3×(x+1)=12×4, а од неа добиваме x+1=16, од каде x=15.

ЗАДАЧИ



4 Може ли да се состави пропорција од размерите:
а) 15:3 и 25:5, б) 15:10 и 12:8, в) 5:30 и 12:38, г) $\frac{2}{5}:1\frac{3}{5}$ и $1:1\frac{1}{3}$?

5 Кој услов треба да исполнуваат четири броеви, за да може од нив да се состави пропорција?

6 Провери дали може да се состави пропорција од броевите: а) 5,10,15 и 30,
б) 8, 12, 16 и 24, в) 3, 5, 9 и 15, г) 2, 4, 7 и 14, д) 3, 5, 6 и 7.

7 Дадена е пропорцијата 75:15=0,5:0,1. Дали ќе се добие точна пропорција, ако двата члена од нејзиниот прв размер ги поделиш со 5, а двата члена од вториот размер ги помножиш со 10?

8 На што е еднаков еден од:
а) надворешните, б) внатрешните членови на пропорцијата?

9 Одреди го непознатиот член x во проиорцијата:
а) x:9=5:15, б) 6:x = 14:$\frac{2}{3}$, в) 0,3:0,4=x:2, г) 4:5=1,2:x.

10 За прскање на лозјата потребен е раствор на син камен и вода во размер 9:500. Колку син камен е растворен во 120 литри вода?

11 Во математичката секција при едно училиште учествуваат 8 момчиња, а размерот на бројот на девојчињата и бројот на момчињата бил 3:4. Колку девојчиња имало во секцијата?

12 Обиди се од броевите 2, 6 и 18 да составиш пропорција.

V.8. ПРОДОЛЖЕНА ПРОПОРЦИЈА

Равенството на три или повеќе еднакви размери се вика **продолжена пропорција**. Нека

$$\frac{a_1}{b_1}=k,\ \frac{a_2}{b_2}=k,\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n}=k, \qquad (1)$$

тогаш пишуваме:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k, \qquad (2)$$

или пократко: $a_1:a_2:a_3:\ldots:a_n = b_1:b_2:b_3:\ldots:b_n$. (3)

Равенствата (2) и (3) всушност се два различни записа на една иста продолжена пропорција, која ја читаме: „броевите $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ се пропорционални, соодветно на броевите $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n$“.

Продолжените пропорции го имаат следново важно својство:

***Теорема*: Збирот на сите први членови на размерите кај продолжената пропорција** (2) **спрема збирот на сите втори членови се однесува исто како кој било прв член спрема неговиот соодветен втор член.**

Доказ. Ако важат равенствата (1), тогаш ќе имаме:

$$a_1=kb_1,\quad a_2=kb_2,\quad a_3=kb_3,\ \ldots,\ a_n=kb_n\,.$$

Со собирање на соодветните страни на овие равенства, добиваме:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n = k(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)\,,$$

а оттука:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=k\ \left(=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Својството на продолжените пропорции наоѓа широка примена во решавањето на задачи од **видот за пропорционално делење** на величините.

Пример 1. Периметарот на триаголникот е =26 cm. Да се одредат должините на страните на триаголникот, ако тие се однесуваат како броевите 3:4:6.

Решение. Во задачата за должините на страните на триаголникот, знаеме дека $a+b+c=26$ и $a:b:c=3:4:6$.

Од продолжената пропорција имаме: $\frac{a}{3}=k$, $\frac{b}{4}=k$ и $\frac{c}{6}=k$, од каде $a=3k$, $b=4k$ и $c=6k$, па $a+b+c = 3k+4k+6k= 13k$. Но, бидејќи е $a+b+c = 26$, затоа ќе биде $13k=26$, $k=2$. Според тоа: $a = 3k = 6$, $b= 4k = 8$ и $c = 6a = 12$.

Значи, должините на страните на триаголникот изнесуваат: a=6cm, b=8cm и c=12cm.

Пример 2. Учениците од , и одделение засадиле 688 дрвца. По колку дрвца засадило секое одделение, ако бројот на засадените дрвца од и одделение се однесуваат како 5:6, а тие на засадените дрвца од и - како 4:7.

Решение. Да ги означиме броевите на засадените дрвца од , и одделение соодветно со x,y и z. Тогаш, согласно условот на задачата, ќе имаме: $x:y=5:6$, $y:z=4:7$ и $x+y+z=688$.

Тука, прво треба двата размера да ги трансформираме така што и во двата размера на y да му одговара еден ист број (сега на y во првиот размер му одговара бројот 6, а во вториот размер - бројот 4).

Тоа го постигнуваме кога ќе најдеме НЗС за броевите 6 и 4, т.е. бројот 12. Потоа членовите на првиот размер ги множиме со 2, а членовите на вториот размер - со 3, па добиваме $x:y=10:12$ и y $z=12:21$. Оттука следува продолжената пропорција $x:y:z=10:12:21$, т.е. $x:10=y:12=z:21$.

А согласно својството на продолжената пропорција, ќе имаме:

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{12}=\frac{z}{21}=\frac{x+y+z}{10+12+21}=\frac{688}{43}=16,$$

односно $x=10\cdot16 = 160$, $y=12\cdot16=192$ и $z = 21\cdot16=336$.

Проверка: $x+y+z=160+192+336=688$.

1 Формирај продолжена пропорција што следува од пропорциите:

а) $a:b=8:5$, $b:c=5:3$ и $c:d=3:2$, б) $x:y = 2:5$, $y:z= 5:6$ и $z:$ = 3:5.

ЗАДАЧИ

2 Колкави се внатрешните агли на триаголникот, ако тие се однесуваат како:

а) 2:3:4, б) 3:4:5.

3 Подели го бројот 370 на три делови, што се пропорционални на броевите 3, 2 и 5.

4 Одреди ги аглите на четириаголник, ако тие се однесуваат како 2:5:4:7.

5 На пет продавници требало да им се достават 4080 литри млеко. По колку литри млеко ќе добие секоја продавница, ако првата има 600 потрошувачи, втората 800, третата 400, а четвртата и петтата секоја по 120 потрошувачи на млеко?

6 Раздели го бројот 1080 на три делови, кои се однесуваат како:

а) 2:4:6, б) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$.

V.9.ПРИБИРАЊЕ И СРЕДУВАЊЕ НА ПОДАТОЦИ

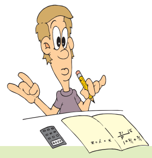
Со цел да разгледуваме некој проблем во врска со работа со податоци основно е најпрво да го разгледаме проблемот што всушност точно сакаме да испитуваме, а потоа да пристапиме кон собирањето на податоци, а на крај нивна анализа. Значи еден од основните предуслови за усешна работа со податоци е да знаеме точно кои се целите на нашето испитување. Потоа, при собирањето на податоците многу важно е да извршиме правилна селекција на податоците. Селеклтирањето всушност подразбира одлучување кој податок е битен и ако е битен да го впишиме во табелета, а ако не е битен тогаш го занемаруваме. Ако притоа испуштиме битни податоци, тоа може да не ја даде вистинската слика за она што го испитуваме. Значи постои можност ние самите да влијаеме на исходот, а со тоа да ја нарушиме објективноста на испитувањето.

Доколку треба да собериме мал број на податоци, тогаш најдобро е да ги земеме предвид сите релевантни податоци, без исклучок. На пример, ако треба да најдеме просечен успех по сите предмети истовремено на учениците од а, тогаш формираме листа од сите можни оценки (за секој ученик по секој предмет). Потоа, сите овие оценки во листата на податоци влегуваат рамноправно.

Значи, ако успееме да ги собериме сите податоци тоа е најдобрата можност. Често пати не сме во состојба да ги собериме сите податоци, или за тоа ни е потребно многу повеќе време отколку што ни е дадено на располагање. На пример, ако сакаме да ја одредиме просечната висина на луѓето што живеат во Република Македонија, не сме во состојба да ги испитаме сите луѓе, па потрбно е врз основа на помала група на испитаници да донесиме некаков заклучок. Тоа е дел од математичката дисциплина наречена **статистика**, и тоа не е цел на оваа наставна единка. Она што сега треба да се знае е да се направи **селектирање** при собирањето на податоците.

Собраните податоци неопходно е да ги групираме по различни основи. На пример, ако сакаме да ги испитаме причините за сообраќајните незгоди во текот на една година, тогаш испитувањата ги впишуваме во повеќе графи, како на пример: дали возачот бил под дејство на алкохол, дали причината е поради неисправност на возилото или поради невнимателност, дали незгодата се случила дење или ноќе, дали се случила за време на дожд, снег или магла, возраст на возачот и слично.

ЗАДАЧИ



1. Кои се основните предуслови за правилно прибирање и селектирање на податоци?
2. Направи листа од податоци на 100 фрлања на зар. Податоците чувај ги за подоцна да ги анализираш.
3. Во текот на една седмица, запишувај за секој ден пооделно колкава сума си потрошил за своите лични потреби (ужинка, тетратки, моливи, блок и слично). Дали ќе ја запишиш сумата на пари потрошени за заедничка потрошувачка?

V.10. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ПОДАТОЦИ

По прибирањето на податоци, се јавува потреба за нивно нагледно претставување. Нив ги има неколку основни видови. Со некои од нив се запозна мината година, а исто така и во рамките на претходната тема. Тоа беа столбестиот дијаграм и секторскиот дијаграм. Покрај овие два вида постојат и други видови на дијаграми, како што се линискиот, табеларниот, сликовитиот и други. Овде ќе посветиме повеќе внимание на овие последниве претставувања.

Со табеларниот начин исто така се сретнавме во претходните лекции со задавање на функциите. Ќе наведиме пример. Учениците Александар, Борко, Виктор, Горан и Дарко тренираат кошарка. Височините на овие ученици се следните: Александар - 140 cm, Борко -135 cm, Виктор -138 cm, Горан -143 cm и Дарко - 150 cm. Овие висини на учениците претстви ги во три табели. Во првата подреди ги учениците по азбучен ред на нивните имиња, во втората табела подреди ги учениците според нивната висина почнувајќи од највисокиот, а во третата табела исто според висината, но почнувајќи од најнискиот.

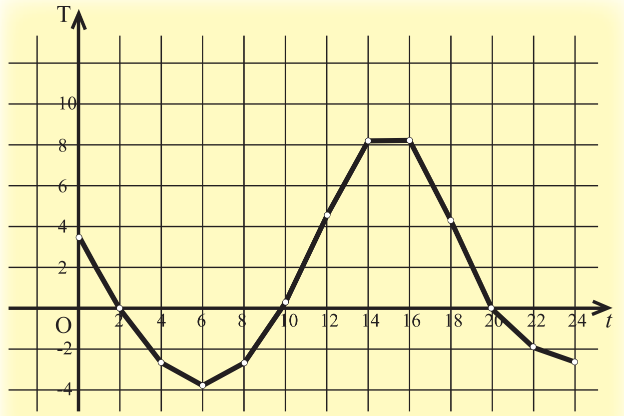
За понагледно претставување на податоците користиме и сликовити дијаграми, каде што повеќе доаѓа до израз нагледноста, но и креативноста на составувачот на дијаграмот. На пример, покрај имињата на младите кошаркари од претходниот пример можеме да ставиме и фотографии на секој од учениците. На секторскиот дијаграм на црт. 104 наместо имињата САД, ЕУ, Јапонија, можеме да ставиме знамињата на САД, ЕУ, Јапонија или некои други нивни симбиоли и слично.

Пример 1. На географските и сообраќајни карти често пати од страна се даваат табели во кои се дадени најкратките растојанија од еден до друг град. Ако имаме на пример 10 градови, тогаш треба да се зададени 45 растојанија. За да биде тоа понагледно и претставено на мал простор се применуваат табели во форма на триаголник. На следната табела се дадени растојанијата меѓу кои било два града меѓу

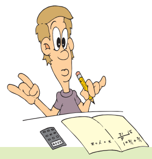
Б					
О	66				
С	170	170			
Т	149	133	42		
Ш	150	223	87	129	
	Б	О	С	Т	Ш

градовите Скопје (С), Битола (Б), Тетово (Т), Штип (Ш) и Охрид (О). Разгледај ја табелата и одговори колкави се најкратките растојанија помеѓу Тетово и Штип, помеѓу Скопје и Битола, и помеѓу Битола и Тетово.

Пример 2. На цртеж 26 даден е графикот на промената на температурата во текот на едно денонoќие. Да претпоставиме дека температурата не е мерена толку често за да се добие глатка (мазна) крива, туку е мерена на пример на секои 2 часа. Во тој случај можеме да постапиме на следниот начин. Ги нанесуваме вредностите на температурите на полноќ, во 2 часот, во 4 часот, во 6 часот итн. А потоа овие точки од координатната рамнина да ги поврзиме со отсечки (црт. 31). На тој начин ќе добиеме **линиски дијаграм**. Од овој линиски дијаграм ја немаме точната температура во секое време, но од него приближно ја имаме температурата во секое време од денот. Всушност точната тепература никако не можеме да ја знаеме доколку сме ја отчитувале температурата на секои два часа.



Црт. 31



ЗАДАЧИ

1 Во еден туристички град во текот на летните месеци (јуни, јули и август) се регистрирани следните ноќевања: во 2000 год - 746000, во 2001 год.- 690000, во 2002 год. - 715000, во 2003 год. – 739000, во 2004 год. – 751000, во 2005 год. – 760000, во 2006 год. 747000, во 2007 год. – 761000, во 2008 год. 757000. Овие податоци внеси ги во табела.

2 Користејќи ги податоците од учебникот по географија, претстви ги со дијаграм или табеларно следните податоци: а) односот на копно-вода на земјината топка, б) споредба на континентите спрема нивната површина, в) споредба на континентите спрема нивниот број на жители.

3 Задади 12 просечни температури за месеците во 2008 година кои приближно соодветствуваат на температурите во твоето место на живеење. Потоа, користејќи ги тие податоци состави линиски дијаграм за температурите во 2008 година во твоето место на живеење.

4 Формирај пропорција од броевите:

а) $4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$,   б) $8 \cdot 8 = 4 \cdot 16$.

V.11. АРИТМЕТИЧКА И ГЕОМЕТРИСКА СРЕДИНА

1 Во одделение научивме да одредуваме повеќе видови средини. Притоа се запознавме и со аритметичката средина на одреден број податоци, или на низа од n броеви. Да се потсетиме:

Аритметичка средина А на низата од n броеви (податоци):

$a_1, a_2, a_3,...,a_n$ **го викаме количникот од нивниот збир и бројот n на податоците,** т.е.

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}.$$

Во специјален случај, ако низата содржи само два члена, тогаш може да кажеме:

Дефиниција 1. **Аритметичка средина на два броја x и го викаме полузбирот од нив, т.е.** $A = \dfrac{x+y}{2}$.

1 Одреди ја аритметичката средина на броевите:

а) 6 и 9, б) 4,5 и 7,5, в) 0,8 и 2,4.

2 Сега ќе се запознаеме со уште еден вид средина на два броја, тоа е **геометриската средина на два броја**.

Знаеме, во секоја пропорција имаме четири членови: два крајни (надворешни) и два средни (внатрешни). Кај некои пропорции може да се случи двата средни или двата крајни члена на пропорцијата да се еднакви.

Пропорцијата $a:b=b:c$, во која двата средни члена се еднакви, се вика **непрекината пропорција**. Таква е, на пример, пропорцијата 4:6=6:9.

Средниот член на непрекината пропорција $a:b=b:c$ се вика **средна геометриска пропорционална** или **геометриска средина** за крајните членови a и c.

Со примена на основното својство на пропорциите, геометриската средина може да се изрази вака $b^2=ac$, односно $b = \sqrt{ac}$.

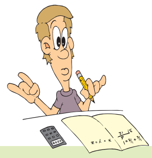
Според тоа, може да ја усвоиме следнава:

Дефиниција 2. **Геометриска средина на два позитивни броја x и y се вика квадратниот корен од нивниот производ, т.е.** $= \sqrt{xy}$.

На пример, геометриска средина за броевите 2 и 18 е бројот

$$= \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$$

ЗАДАЧИ



2 Одреди ја аритметичката средина на броевите:

а) 1 и 9, б) 7 и 5, в) 17,4 и 32,6, г) $1\frac{3}{4}$ и $5\frac{1}{4}$.

3 Одреди ја геометриската средина на броевите:

а) 1 и 16, б) 2 и 8, в) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$, г) $\frac{5}{64}$ и $\frac{4}{5}$, д) 0,2 и 1,8.

4 Средните месечни температури на еден град изнесувале: во јануари −4,5 С, февруари −2 С, март 6,8 С, април 9,2 С, мај 12 С, јуни 17,3 С, јули 23,5 С, август 20 С, септември 14,5 С, октомври 12,3 С, ноември 5,7 С и декември -0,8 С. Пресметај ја средната годишна температура за тој град.

V.12. **РАНГ. МОДА. МЕДИЈАНА**

Анализата на добиените податоци од извршената анкета, експеримент и тестирање се состои, главно, во нивното заемно споредување и на крај во изведување на одредени заклучоци за разгледуваниот проблем или појава. Споредувањето, пак, на одделните податоци во добиената листа на податоци, го вршиме преку пресметување и одредување на **рангот** на листата, средините **мода** и **медијана**, како и пресметување на **проценти** на нивните соодноси.

Сите тие поими ни се познати од одделение. Да се потсетиме на нив, затоа што нив ќе ги користиме и сега и понатаму.

1 Под поимот **ранг** на листата на податоци ја подразбираме **разликата** од податокот со најголема вредност и податокот со најмала вредност. Ако податоците во листата се подредени по големина да растат, тогаш, всушност, **рангот на листата на податоци е еднаков на разликата од крајниот (најголемиот) и првиот (најмалиот)** a_1 **, податок во листата на податоци**, т.е. $r=a_n-a_1$.

На пример, за низата броеви (податоци):

$$2,2,3,\ 4\frac{1}{2},5,6,6,7,7,7,8 \qquad (1)$$

рангот е еднаков на r=8–2=6, а за низата податоци:

$$0,3;\ 0,8;\ 1,5;\ 3,2;\ 4;\ 5,3;\ 5,3;\ 7,7 \qquad (2)$$

рангот е еднаков на r = 7,7–0,3=7,4.

2 Покрај аритметичката и геометриската средина, при анализата на прибраните податоци, користиме уште две средини, а тоа се: **мода** (Мо) и **медијана** (е).

Мода е доминантниот член, кој преовладува во листата на податоци.

На пример, во низата податоци (1) броевите 2 и 6 се повторуваат по двапати, а бројот 7 трипати. Велиме дека, доминантен член во низата броеви (1) е бројот 7.

Значи, мода за низата (1) е бројот 7, т.е. Mo=7.

За низата податоци (2), пак, мода е Mo=5,3.

Очигледно е дека, за листи на податоци во кои сите членови се различни, не определуваме мода.

Медијана на низата податоци се вика нејзиниот среден член по големина.

Ако бројот на членовите во низата податоци во растечки облик е непарен број (n=2k+1), тогаш во средина се наоѓа членот $a_{к+1}$, па според тоа, медијана за таа низа е членот $a_{к+1}$, т.е. Me=$a_{к+1}$. Ако, пак, бројот на членовите во низата на податоци е парен број (n=2k), тогаш во средината на низата се наоѓаат два члена $a_к$ и $a_{к+1}$. Во тој случај, медијана на низата со парен број членови, се вика аритметичката средина на тие два средни члена, т.е.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(a_к + a_{к+1}).$$

На пример, низата (1) има 11 членови. Нејзина медијана е шестиот член, т.е. Me=a_6 =6. А низата (2) има 8 членови, нејзина медијана ќе биде

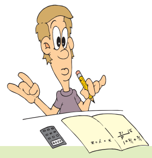
$$\text{e} = \frac{1}{2}(3{,}2+4) = \frac{1}{2}7{,}2 = 3{,}6.$$

Ако ни е дадена една листа на податоци, се поставува прашање која од средините (аритметичка средина, мода и медијана) треба да се примени. Одговорот на ова прашање зависи од проблемот што се разгледува. Доколку сакаме во бараната средина сите податоци да влезат рамноправно, тогаш применуваме аритметичка средина. Такви се случаите кога пресметуваме среден успех во едно одделение (бидејќи сите ученици се рамноправни), просечна плата во Р.Македонија (бидејќи сите граѓани во државата се рамноправни) итн. Средините како што се мода и медијана се пресметуваат многу побргу ако податоците се подредени по големина. Доколку не сме заинтересирани во просекот да влезат екстремните податоци (најголемите и најмалите), најчесто како вонсериски случаи, тогаш можеме да пресметаме медијана. Во случај кога рангот на податоците е мал, тогаш аритметичката средина ќе биде блиска до медијаната. Модата ни покажува кој податок најчесто се сретнува во една листа на податоци. На пример, ако знаеме дека модата на оценките по математика во едно одделение е 4, тоа покажува учениците се најчсто се оценети со оценка 4. Дали може модата на тие оценки да биде 3,5? Дали може аритметичката средина или медијаната да биде 3,5? Зошто?

3 При анализата на податоци понекогаш станува потребно нивното споредување да го изразиме и во проценти.

На пример, ако треба да одредиме колкав процент претставува рангот на низата (1) r=6 од големината на крајниот член a_{11} =8. Тоа го наоѓаме кога дропката $\frac{p}{a_{11}} = \frac{6}{8}$ ја изразиме во проценти. Значи, бараниот процент изнесува $p = (\frac{6}{8}\cdot 100)\% = 75\%$.

ЗАДАЧИ



1 Одреди ги рангот, модата и медијаната на листата на податоци:
а) 4,6,6,7,8,8,8,12,   б) 3, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$,8,9,9,11.

2 Во текот на една седмица температурата на воздухот во 12 часот во градот Штип изнесувала, како што е наведено во табелата:

ден	понедел.	вторник	среда	четврт.	петок	сабота	недела
°C	5°	9°	8°	12°	14°	9°	17°

Одреди ги рангот, модата и медијаната за температурата.

3 На еден пациент секој ден наутро му е мерен крвниот притисок и пулсот. Податоците се внесени во табелата:

Систоличен (горен) притисок	140	135	148	150	162	150	155
Дијастолич. (долен) притисок	80	84	88	88	90	82	86
П у л с	62	68	72	72	80	78	74

а) Одреди ги рангот, модата и медијаната одделно за секоја низа од податоци во табелата,
б) Пресметај го просечниот горен притисок, просечниот долен притисок и просечниот пулс,
в) Пресметај колкав процент претставува долниот притисок од горниот за секое мерење одделно.

4 Како гласи формулата за периметар на:
а) рамностраниот триаголник,   б) квадратот,   в) кругот?

V.13. **ПРАВА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ**

V. 13.1. **Поим за права пропорционалност**

1 Да ги разгледаме следниве два примера:

Пример 1. Едно тело се движи рамномерно праволиниски и изминува секоја секунда по 8 m. Да го изразиме изминатиот пат во функција од времето .

Решение. Да ја пополниме табелата:

t - време во сек.	1	2	3	4	5	...	t
S - пат во m.	8	$8 \cdot 2$	$8 \cdot 3$	$8 \cdot 4$	$8 \cdot 5$	...	$8\,t$

Гледаме, ако телото се движи со брзина 8m s, тогаш тоа изминува пат =8 , каде ≥0. Очигледно е дека на секоја вредност на променливата соодветствува точно, само една вредност на променливата .

Значи со формулата =8· , ≥0 е зададена функција.

Пример 2. Една жена однела на пазар *n* јајца за продавање. Колкава е вредноста на јајцата во денари, ако едно јајце чини 5 денари?

Решение. Ако едно јајце чини 5 денари, тогаш *n* јајца ќе чинат =5*n* денари. На секоја вредност на променливата *n* одговара точно една вредност . Значи, со формулата =5*n*, каде *n* е природен број е зададена функција.

Во двата разгледани примери имаме функции зададени со формули од видот $y=k\cdot x$, каде x и y се променливи, а k број различен од нула.

***Дефиниција*. Функцијата, која може да се зададе со формулата од видот = x, каде е број различен од нула, се вика права пропорционалност**.

Бројот k се вика **коефициент на пропорционалноста**, а за променливата y велиме **е пропорционална** на променливата x.

Домен на функцијата права пропорционалност е множеството на сите реални броеви, или некое подмножество од него. Во првиот пример домен на функцијата =8 е $=R^{+}$ односно >0, а во вториот пример, домен на функцијата =5*n* е $n\in N$.

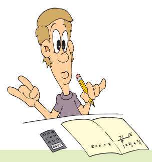
2 Од формулата $y=kx$ при $x\neq 0$ следува дека е $\frac{y}{x}=k$. Точно е и обратното:

ако $\frac{y}{x}=k$, тогаш $y=kx$.

Оттука заклучуваме дека, за да утврдиме дали една функција $:x\rightarrow y$ е права пропорционалност доволно е да провериме дали размерот $\frac{y}{x}$ на сите парови соодветни вредности на променливите x и y е еднаков на ист број k, или не.

Ако вредноста на секој од размерите $\frac{y}{x}$ е ист број k, ($k\neq 0$) и ако за $x=0$ е и $y=0$, тогаш функцијата $:x\rightarrow y$ е права пропорционалност.

ЗАДАЧИ



1 Провери дали функцијата $:x\rightarrow y$, што е зададена со табелата

x	- 3	- 2	- 1,5	2,5	4	5	6	8
y	- 12	- 8	- 6	10	16	20	24	32

е права пропорционалност и ако е, одреди го нејзиниот коефициент на пропорционалност.

2 Функцијата $:x \rightarrow y$ е права пропорционалност со коефициент на пропорционалност 0,5. Запиши ја функцијата аналитички и пополни ја табелата.

x	- 4	- 2,4	- 1	1	3,6	8	10
y							

3 Изрази го периметарот на квадратот во зависност од должината на неговата страна a, и испитај дали таа зависност е права пропорционалност.

4 Должината на кружницата зависи од радиусот r. Дали таа зависност е права пропорционалност и ако е, колкав е коефициентот на пропорционалност?

5 Плоштината P на кругот зависи од радиусот r. Дали таа зависност е права пропорционалност?

6 Велосипедист се движи со брзина 12 m . Запиши ја формулата на зависноста на изминатиот пат во m од времето во часови. Каков вид ќе добие таа формула, ако патот е изразен во метри, а времето во секунди?

7 Дали дијагоналата d и страната a на квадратот се право пропорционални и ако се, на што е еднаков коефициентот k?

8 Дали висината и страната a на рамностран триаголник се право пропорционални величини и ако се, со каков коефициент k?

V.13.2. **Својства на правата пропорционалност**

Правата пропорционалност нека е зададена со формулата $y=5x$.

Да земеме две произволни вредности на променливата x, на пример: $x=x_1=4$ и $x=x_2=7$. Соодветните вредности на нив, на променливата y, ќе бидат: $y=y_1=20$ и $y=y_2=35$.

Да ги споредиме размерите $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{y_1}{y_2}$. Тогаш ќе добиеме:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{4}{7} \quad \text{и} \quad \frac{y_1}{y_2}=\frac{20}{35}=\frac{20:5}{35:5}=\frac{4}{7}.$$

Како што гледаме, тие размери се еднакви.

Да земеме други две вредности на x, на пример $x_3=8$ и $x_4=12$. Тогаш соодветните вредности на y ќе бидат: $y_3=40$ и $y_4=60$. Гледаме и во тој случај размерите

$\frac{x_3}{x_4}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ и $\frac{y_3}{y_4}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$ пак се еднакви. Според тоа:

Ако функцијата $:x \rightarrow y$ е права пропорционалност и (x_1,y_1), (x_2,y_2) се два пара соодветни вредности на променливите x и y, при што $x_2 \neq 0$ и $_2 \neq 0$, тогаш важи пропорцијата

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}.$$

Доказ. Нека е $y = kx$, $k \neq 0$. Тогаш за $x = x_1$, е $y_1 = kx_1$, а за $x = x_2$ е $y_2 = kx_2$. Според тоа, ќе биде:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{kx_1}{kx_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Ова својство, ако x и y се позитивни броеви, може да се искаже и вака.

Ако променливата x се зголеми неколку пати, тогаш соодветните вредности и на другата променлива се зголемуваат исто толку пати, или аналогно: **ако x се намали неколку пати, тогаш и соодветните вредности на y ќе се намалат исто толку пати**.

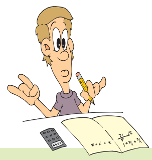
Ова својство на правата пропорционалност често ќе го користиме во решавањето на задачи, како што е следнава:

Задача. Од 0,5 волна може да се сплетат 4 парови чорапи. Колку волна е потребно да се сплетат 10 парови чорапи?

Решение. Нека за плетењето на 10 парови чорапи се потребни x волна. Бидејќи бројот на сплетените парови чорапи е право пропорционален на количеството волна, затоа согласно својството на правата пропорционалност ќе важи пропорцијата $x : \frac{1}{2} = 10:4$.

Оттука, $4x = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$, $x = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ (волна).

ЗАДАЧИ



1 За 4 часа локомотивата потрошила 30 тони јаглен. Колку тони јаглен локомотивата потрошила за 7 часа?

2 12 m телефонска жица има маса 1 . Колку е масата на истата жица, која е долга 2,5 m?

3 Тело, кое на Земјата е тешко 100 , на Јупитер (најголемата планета на нашиот Сончев систем) ќе тежи 256 . Колку ќе тежи на Јупитер еден човек, кој на Земјата е тежок 750 ?

4 Од 80 морска вода добиено е 2 сол. Колку килограми сол ќе се добие од 380 морска вода?

5 Една летва долга 2 m фрла сенка 0,8 m. Колку е висока една куќа, која во истиот момент фрла сенка долга 5,6 m?

6 Звукот изминува 334 m во секунда. За колку секунди звукот ќе го измине растојанието 1670 m?

7 Еден тракторист за 6 часа изорал 5 а. Колку хектари трактористот ќе изора за 8 часа?

V.13.3. **График на правата пропорционалност**

Да го нацртаме графикот на правата пропорционалност, поточно графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}\cdot x$.

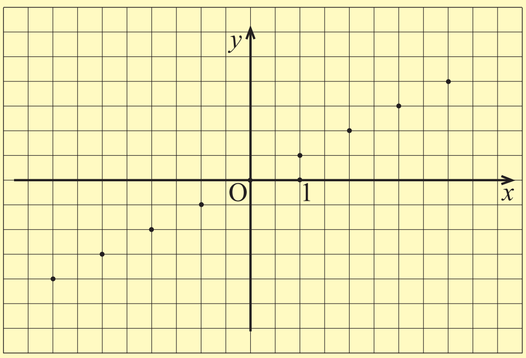
Дефиниционата област на оваа функција, ако не е сврзана со некој конкретен проблем, е множеството на сите реални броеви. Да составиме табела на некои соодветни вредности на x и y.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\frac{1}{2}x$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2

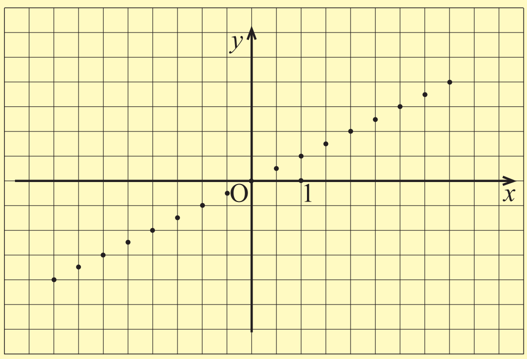
Потоа да ги конструираме точките, што одговараат на паровите соодветни вредности на x и y од табелата (црт. 32). Забележуваме дека, конструираните точки лежат на некоја права. Да земеме уште неколку други точки од графикот на истата функција:

x	$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
$y=\frac{1}{2}x$	$-1\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$

Ќе забележиме дека и тие лежат на истата права (црт. 33).



Црт. 32



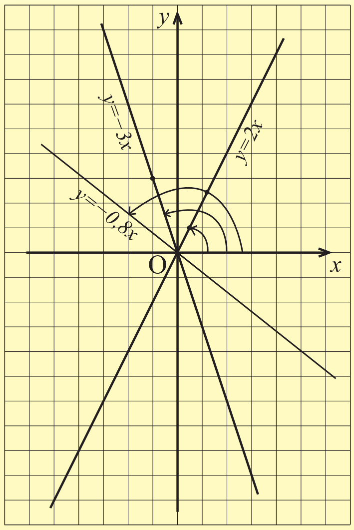
Црт. 33

Според тоа, **графикот на функцијата** $y=\ x$, **каде** $\neq 0$, **е права што минува низ координатниот почеток**.

За конструкција на права доволно е да знаеме, само две нејзини точки. Затоа графикот на правата пропорционалност може да се конструира според кои било две негови точки.

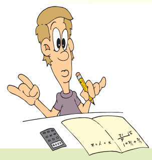
На цртежот 34 нацртани се графиците на функциите: $y=2x$, $y=-3x$ и $y=-0{,}8x$. Забележуваме, од вредноста на коефициентот k зависи големината на аголот што правата го зафаќа со позитивната насока на Ox-оската.

Може да се докаже дека, секоја права што минува низ координатниот почеток и не се совпаѓа со координатните оски е график на некоја права пропорционалност.



Црт. 34

1 Конструирај го графикот на правата пропорционалност: а) $y=-2x$, б) $y=3x$.



ЗАДАЧИ

2 Конструирај го графикот на функцијата $y=\frac{1}{3}x$. Со помош на графикот, одреди:
а) колкава вредност добива y за $x=6$,
б) за која вредност на x вредноста на y е еднаква на -2?

3 Конструирај го графикот на функцијата $y=0{,}3x$. Со помош на графикот одреди го множеството вредности на x, за кои функцијата добива:
а) позитивни вредности, б) негативни вредности.

4 Конструирај го графикот на функцијата зададена со формулата $y=\frac{1}{4}\cdot x$.
Со помош на графикот одреди:
а) (2), (4), (6),
б) на кое множество се пресликува сегментот [2,4] од Ox-оската на Oy-оската?,
в) за која вредност на x е $(x) = 2$?

5 Покажи кои од точките: A(4,–2), B($\frac{1}{3}$,1), C(1,1), (0,0), E($1,-\frac{1}{2}$) му припаѓаат на графикот на функцијата зададена со формулата: а) $y=-\frac{1}{2}x$, б) $y=3x$.

6 Основата на правоаголникот е 4,5 cm, а висината е x cm. Изрази ја зависноста на плоштината y на правоаголникот во cm^2 од висината x. Конструирај го графикот на таа зависност на y од x.
а) Колкава плоштина има правоаголникот, чија висина е еднаква на 13,5cm?
б) При која висина плоштината на правоаголникот е еднаква на 9cm?

7 Плоштина на еден правоаголник со страни долги x cm и y cm е еднаква на $15cm^2$.
Во врска со него:
а) пополни ја табелата,
б) што станува со страната y, ако страната x се намали 2 пати?

x	7,5		2		1
y		3		10	

V.14. **ОБРАТНА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ**

V. 14.1. **Поим за обратна пропорционалност**

1 Едно тело нека се движи рамномерно праволиниски од A до B. Јасно е дека, времето за кое телото ќе го помине растојанието од A до B, зависи од брзината со која се движи тоа.

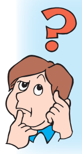
Нека, на пример, растојанието од A до B е еднакво на 60m, - брзината на движење (во m), а -времето поминато во движење (во s), тогаш времето го пресметуваме со формулата = $\frac{60}{\ }$. Од формулата наоѓаме: ако е =5, тогаш = 12; ако е =10, тогаш =6, а ако е =20, тогаш =3.

Да разгледаме друг пример: Еден работник ја завршува сам една работа за 120 часа. За колку часа ќе ја завршат истата работа (под исти услови): 2 работника, 3 работници, 4 работници?

Очигледно е дека: 2 работника работата ќе ја завршат за $\frac{120}{2}$ часа; 3 работници работата ќе ја завршат за $\frac{120}{3}$ часа, а 4 работници работата ќе ја завршат за $\frac{120}{4}$ часа.

Гледаме, времето што е потребно да се заврши таа работа зависи од бројот на работниците n, т.е. ќебиде $=\frac{120}{n}$. Со формулата $=\frac{120}{n}$ ќе велиме е зададена една функција.

Во двата разгледани примера имавме функции зададени со формули од видот $y=\frac{k}{x}$, каде $x\neq 0$ и y се променливи, а k е број различен од нула.



Дефиниција. **Функцијата, која може да се зададе со формула од видот $y=\frac{k}{x}$, каде k е константа различна од нула, се вика обратна пропорционалност.**

Бројот k се вика **коефициент на обратната пропорционалност**, а за променливата y велиме дека е **обратно пропорционална** на x.

Бидејќи изразот $\frac{k}{x}$ има смисла за секоја вредност на променливата x, освен за нула, затоа домен на функцијата ќе биде множеството на сите реални броеви различни од нула, или некое негово подмножество. Во првиот пример домен на функцијата $t=\frac{60}{v}$ е >0, а во вториот пример домен на функцијата $=\frac{120}{n}$ е множеството на природните броеви.

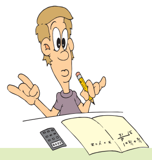
2. Од формулата $y=\frac{k}{x}$ следува дека е $xy = k$. Точно е и обратното: ако е $xy=k$, тогаш е и $y = \frac{k}{x}$. Затоа, за да утврдиме дали функцијата $:x\rightarrow y$ е обратната пропорционалност, доволно е да провериме дали производот xy на сите парови соодветни вредности на променливите x и y е еднаков на ист број k, или не. Ако нивниот производ е секогаш ист број $k \neq 0$, тогаш функцијата е обратна пропорционалност. На пример, функцијата $:a \to b$ зададена со табелата

a	5	10	15	20	30	60	120
b	24	12	8	6	4	2	1

е обратна пропорционалност, бидејќи за секој пар (a,b), $a \cdot b = k = 120$.

a	5	10	15	20	30	60	120
b	24	12	8	6	4	2	1
ab	120	120	120	120	120	120	120

ЗАДАЧИ



1 Функцијата $:x \to y$ е зададена со табелата. Испитај дали дадената функција $:x \to y$ е обратна пропорцiолалност.

а)

x	1	2	4	5	10
y	20	10	5	4	2

б)

x	-1	-2	-3	-5	-6
y	-15	-7,5	-5	-3	-2,5

2 Функцијата е зададена со формулата $y = \frac{4}{x}$. Пополни ја табелата:

x	-1		4		8	12	16
y		-2		0,8			

3 Познато е дека функцијата $:x \to y$ е обратна пропорционалност. Изрази ја функцијата аналитички, кога прво, ќе го одредиш коефициентот k од табелата, а потоа пополни ја табелата.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	3		6	8	12	24
y		-12			6				

4 Во каква зависност се бројот n на завртувањата на едно тркало на одредено растојание и дијаметарот на тркалото?

5 Во каква зависност се:

а) Бројот на работниците и времето за кое тие завршуваат определена работа?

б) Вредноста на дропката и нејзиниот именител, кога броителот останува непроменет?

в) Цената на стоката и количеството стока, кое може да се купи со определена сума пари?

6 Нека x е бројот на прочитаните страници на една книга, а y бројот на останатите непрочитани страници од книгата. Дали зависноста на променливата y од x е обратна пропорционалност?

7 Величините x и y се во обратна пропорционалност со коефициент на пропорционалност k=6. Состави табела на овие величини, ако е $x \in \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$.

V. 14.2. **Својства на обратната пропорционалност**

Видовме, со формулата $\ = \frac{60}{\ }$ беше зададена функцијата обратна пропорционалност на зависноста на изминатото време на движење од брзината на движење при изминување на патот од A до B. Нека $_1$=5 и $_2$=6 се две произволни вредности на променливата , а $_1 = \frac{60}{_1} = 12$ и $_2 = \frac{60}{_2} = 10$ се соодветните вредности на променливата .
Тогаш ќе биде:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{6}, \text{ а } \frac{t_1}{t_2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

Забележуваме дека, размерот $_1 : _2$ е еднаков на реципрочната вредност на размерот $_1 : _2$, т.е. важи:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}.$$

До истиот заклучок ќе дојдеме и ако земеме друг пар вредности на променливата . Оттука заклучуваме:

Ако функцијата $:x \to y$ е **обратна пропорционалност и** (x_1, y_1), (x_2, y_2) **се два пара соодветни вредности на променливите** x **и** y**, тогаш важи пропорцијата** $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

Доказ. Од формулата $y = \frac{k}{x}$ имаме $y_1 = \frac{k}{x_1}$, $y_2 = \frac{k}{x_2}$, при што $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$. Оттука

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_1} = \frac{k}{x_2} \cdot \frac{x_1}{k} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Ова својство, ако x и y се позитивни броеви, може да се искаже и вака:

Ако променливата x се зголеми неколку пати, тогаш соодветната вредност на другата променлива y се намалува исто толку пати или аналогно, **ако x се намали неколку пати, тогаш соодветната вредност на y ќе се зголеми исто толку пати**.

Ова својство на обратната пропорционалност го користиме при решавањето на задачи од видот на следнава:

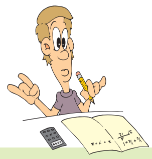
Задача. Една група работници со 6 часовно работно време ја завршува одредена работа за 20 дена. За колку дена ќе ја завршат истата работа истите работници, ако работат по 8 часа на ден?

Решение. Нека при 8 часовно работно време, работата биде завршена за x дена. Бидејќи потребното време во денови за завршување на одредена работа е обратно пропорционално на бројот на работните часови во денот, затоа ќе важи пропорцијата x:20=6:8.

Оттука $8x=20\cdot 6$, односно x =120:8=15 (дена). Значи, работата ќе биде завршена за 15 дена.

Оваа задача обиди се да ја решиш и на следниот начин, на пример, кога прво ќе пресметаш за колку работни часа се завршува работата, независно од должината на работниот ден.

ЗАДАЧИ



1. Еден воз го изминува некој пат за 10 часа возејќи со брзина од 35 m на час. За колку време ќе го помине истиот пат друг воз, ако се движи со брзина од 50 m на час?
2. Со некое количество зоб може да се прехранат 9 коњи за 28 дена. Со истото количество зоб колку дена можат да се прехранат 12 коњи?
3. Еден базен можат да го наполнат 4 еднакви цевки за 45 минути. За колку време ќе го наполнат само 3 цевки од нив?
4. Некое количество ореви кога се подели на 6 лица секој ќе добие по 15 ореви. На колку лица може да се раздели истото количество ореви, така што секое лице да добие по 5 ореви?
5. Едно запчасто тркало со 36 запци прави 80 завртувања во една минута. Колку завртувања во една минута ќе направи другото тркало со 24 запци, кое е сврзано со првото?
6. Еден текст 3 дактилографки го отчукуваат за 10 часа. За колку време ќе го отчукаат истиот текст 5 дактилографки?

V.14.3. **График на обратната пропорционалност**

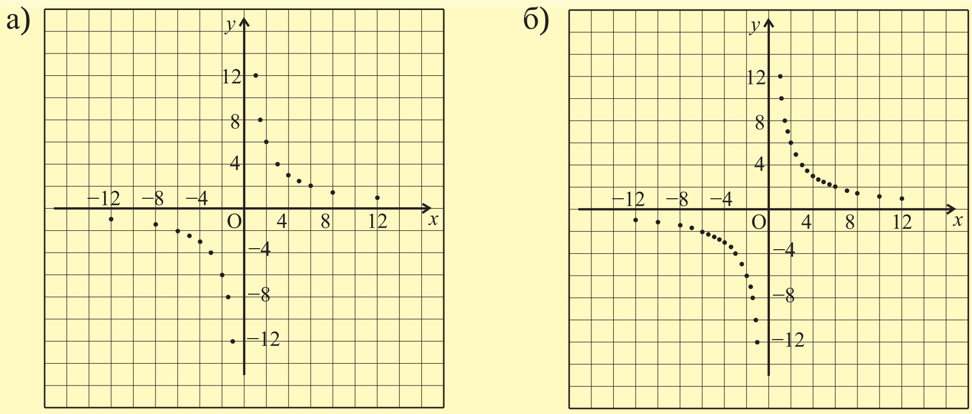
Да се претстави графички функцијата на обратната пропорционалност зададена со формулата $y=\dfrac{12}{x}$. Доменот на оваа функција, ако не е сврзана со некој конкретен проблем, е множеството на сите реални броеви, различни од нула.

Најпрво ќе составиме табела на некои соодветни вредности на x и y.

x	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
$y=\frac{12}{x}$	12	8	6	4	3	2,4	2	1,5	1

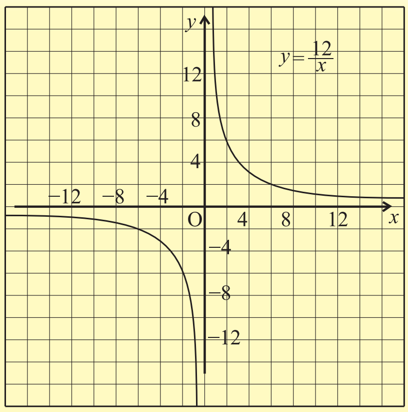
x	-1	-1,5	-2	-3	-4	-5	-6	-8	-12
$y=\frac{12}{x}$	-12	-8	-6	-4	-3	-2,4	-2	-1,5	-1

Знаеме, координатите на паровите (x,y) од табелата одредуваат едно множество точки во координатната рамнина xOy (црт. 35). Ако земеме се поблиски вредности на променливата x, ќе добиеме нови точки погусто расположени една до друга на графикот на функцијата (црт. 35б). Да видиме што претставува графикот на разгледуваната функција на обратната пропорционалност (црт. 36).



Црт. 35

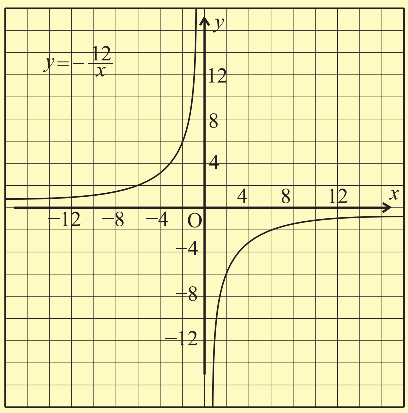
Гледаме, тој се состои од две гранки што се наоѓаат во првиот и третиот квадрант. И двете гранки не ги сечат координатните оски, бидејќи на секоја позитивна вредност на x одговара исто позитивна вредност на y, за x=0 функцијата е недефинирана, а за секоја спротивна негативна вредност на x одговара и спротивна (негативна) вредност на y. Значи, ниту за една вредност на x функцијата не добива вредност 0. Гранката на графикот, што се наоѓа во третиот квадрант е централно симетрична со гранката во првиот квадрант. Ако функцијата е зададена со формулата од видот $y=\frac{k}{x}$, каде k 0, тогаш на позитивните вредности на x одговараат негативни вредности на y, и обратно: на негативните вредности на x одговараат позитивни вредности на y. Графикот на функцијата $y=-\frac{12}{x}$ претставен на црт. 37.



Црт. 36

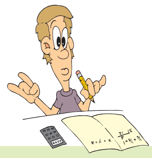
Тој исто се состои од две гранки, симетрични во однос на координатниот почеток, од кои едната се наоѓа во вториот, а другата во четвртиот квадрант.

Во општ случај, графикот на функцијата $y=\frac{k}{x}$, каде $k \neq 0$, е крива која се состои од две гранки симетрични во однос на координатниот почеток, а кривата од таков вид се вика **хипербола**.



Црт. 37

ЗАДАЧИ



1. Конструирај го графикот на функцијата $y=\frac{8}{x}$. Со помош на графикот одреди:
а) (1), (2), (4),
б) За која вредност на x функцијата добива вредност –6?

2. Конструирај го графикот на функцијата $y=-\frac{6}{x}$. За кои вредности на x функцијата добива:
а) позитивни, б) негативни вредности?

3. Во кои квадранти се наоѓа графикот на функцијата:
а) $y=\frac{5}{x}$, б) $y=-\frac{7}{x}$, в) $y=-\frac{4}{x}$?

4. Нацртај го графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$ и од него одреди: (l), (–2), (0,25).

V.15. **ПРОСТО ТРОЈНО ПРАВИЛО**

Својството на правата пропорционалност и својството на обратната пропорционалност, како што тогаш наведовме, наоѓаат голема примена и во решавањето на задачи од практичниот живот во кои учествуваат пропорционални величини. Тоа се задачи во кои кога се дадени: вредноста на некоја величина А и соодветната вредност на друга величина В, со која величината е право или обратно пропорционална, а се бара да се одреди онаа вредност x на величините А, што соодветствува на познатата вредност на другата величина од која зависи величината А.

Задачите од овој вид се викаат задачи од **просто тројно правило**. Називот „тројно правило“ потекнува оттаму што во задачите врз основа на три познати бројни вредности на две пропорционални величини се одредува четвртата бројна вредност на една од тие величини. Правилото се вика уште и просто, затоа што постои и сложено тројно правило.

Задачите со пропорционални величини може да се решаваат на различни начини. Ние тука ќе се задржиме само на начинот со користење на својството на правата и обратната пропорционалност.

Пример 1. Еден земјоделец од 4 а лозје набрал 68 тони грозје. Земјоделецот имал вкупно 15 а лозје на род. Колку тони грозје набрал земјоделецот?

Решение. Во задачата учествуваат две величини: плоштината на лозјето и набраното количество грозје од него. Бидејќи количеството грозје е право пропорционално на плоштината на насадот, затоа размерот на плоштите на насадите ќе биде еднаков на размерот на соодветните набрани количества грозје од нив.

Ако бараното количество грозје го означиме со x, можеме да ја составиме пропорцијата 4:15=68:x, од каде што наоѓаме:

$$x=\frac{68\cdot 15}{4}=255\,(\text{тони}).$$ Тоа прегледно го запишуваме вака:

Од	↑ 4 а	↑ 68	грозје
Од	15 а	x	грозје

$$x:68=15:4;\quad x=\frac{68\cdot 15}{4}=255\ (\text{тони})$$

Значи, од 15   а земјоделецот ќе набере 255 тони грозје.

Едната стрелка секогаш поаѓа од x и е насочена нагоре, а другата стрелка ја насочуваме, исто така, нагоре, ако двете величини се право пропорционални; или надолу, ако двете величини се обратно пропорционални. Поставувањето на стрелките не е задолжително, но тие во голема мера го олеснуваат составувањето на пропорцијата.

Пример 2. Од некое количество преѓа може да се исткае 92 m платно широко 140 cm. Колку метри платно ќе се исткае од истото количество преѓа, ако платното биде широко 80 cm?

Решение. Тука двете величини: должината и ширината на платното што може да се исткае од истото количество преѓа, се обратно пропорционални една од друга. Затоа, размерот на кои било две вредности од едната величина ќе биде еднаков на обратниот размер од соодветните вредности на другата величина, т.е.

x:92=140:80, од каде $x=\frac{92\cdot 140}{80}=161$ (m).

Условот и решението на задачата прегледно го пишуваме вака:

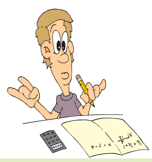
↑ 92 m долго платно	ако е	↓ 140 cm широко
x m долго платно	ако е	80 cm широко

$$x:92=140:80;\qquad x=\frac{92\cdot 140}{80}=161\ (\text{m})$$

Значи, од истото количество преѓа ќе се исткае 161m платно широко 80cm.

1 Од 50   свежи сливи се добиваат 21   суви сливи. Колку килограми суви сливи ќе се добијат од 142   свежи сливи?

ЗАДАЧИ



2 Еден извор за 15 минути дава 120 литри вода. Колку литри вода ќе даде тој извор за 3,5 часа?

3 Една кола на 100   m троши 8 литри бензин. Колку литри бензин таа ќе потроши на пат долг 325   m?

4 За гасење на 9   негасена вар потребно е 24 литри вода. Колку литри вода е потребно за гасењето на 1200   негасена вар?

5 Една фирма од 136 овци добила 414   волна. Друга фирма имала 272 овци. Колку волна ќе добие?

6 Една цевка која дава 45 литри вода во минута го наполнува базенот за 6 часа. За колку време ќе го наполни истиот базен друга цевка која дава 60 литри вода во минута?

7 Со еден комбајн се ожнева некоја парцела за 30 дена, ако се работи по 8 часа на ден. За колку дена ќе се ожнее истата парцела, ако се работи по 10 часа на ден?

8 Од 100 литри овчо млеко се добиваат 18 кашкавал. Колку килограми кашкавал ќе се добијат од 635 литри млеко?

9 Една книга има 135 страници и на секоја страна по 40 реда. При повторно печатење на таа книга на секоја страница ќе има по 36 реда. Колку страници сега ќе има таа книга?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ - V

1 Одреди ги координатите на точка, што е симетрична на точката А(a,b) во однос на:
а) апсцисната оска, б) ординатната оска, в) координатниот почеток.

2 Дадени се множествата А={1,3,4} и В={2,4,5}. Претстави ги со координатна шема Декартовите производи: а) А×В, б) В×А, в) ^{2}, г) B^2.

3 Каква фигура претставува множеството на сите точки во координатната рамнина, на кои:
а) апсцисата им е еднаква на 3, б) ординатата им е еднаква на –2,
в) апсцисата и ординатата им се еднакви, г) апсцисата и ординатата им се спротивни броеви?

4 Шрафирај го делот од рамнината на кој лежат точките (x,y) чии координати ги задоволуваат неравенствата $-2 \le x \le 3$ и $1 \le y \le 5$.

5 Одреди ја вредноста на променливата x во подредените парови, така што:
а) $(x-1{,}7) = (2x + 3{,}7)$, б) $(5{,}5-x) = (5, x-2)$.

6 Дадено е множеството А={9,10,11,12,13,14,15,16,17}. На секој број $x \in A$ придружи му го бројот y што е остаток од делењето на тој број со бројот 5. Така зададената функција означи ја со r. Одреди $r(9)$, $r(10)$, $r(11)$. Функцијата r претстави ја со табела.

7 Конструирај триаголник ВС со темиња: А(2,3), В(5,1), С(8,6), потоа конструирај го триаголникот $A_1B_1C_1$, што е симетричен на дадениот во однос на Оy-оската. Определи ги координатите на темињата на триаголникот $A_1B_1C_1$.

8 Одреди ги координатите на точката A_1, што е симетрична на точката А(5,2) во однос на симетралата на и квадрант.

9 На секој број x од интервалот [–5,7] му го придружуваме неговиот спротивен број $-x$. Дали таа релација е фукција? Одреди го множеството на вредностите на таа функција.

10 Одреди го непознатиот член x на размерот: а) $x:5 = 4$, б) $x:\frac{2}{3}=1$, в) $6:x=2$, г) $4{,}5:x=\frac{2}{3}$.

11 Трансформирај го размерот, така што првиот член да му биде 1:
а) 3:18, б) 2:15, в) 8:1000, г) 4:50, д) 25:600.

12 Растојанието меѓу две точки А и В на географската карта изнесува 8 cm. Колкаво е нивното растојание во природата ако картата е изработена во размер 1:25000?

13 Постои ли триаголник, кај кој должините на страните му се однесуваат како: а) 3:4:6, б) 2:4:8?

14 16 работници ја завршуваат една работа за 18 денови. Уште колку работници треба да се земат, за истата работа да биде завршена за 12 денови?

15 Запиши израз за природните броеви, кај кои при делење со 5 се добива остаток:
а) 1, б) 2, в) 3, г) 4.

16 Смешани се 13 ориз со цена a денари за килограм и 31 со цена b денари. Колку чини 1 ориз од смешата?

17 Кои својства ги изразуваат следниве равенства:

а) $a–b=(a+k)–(b+k)$, б) $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$, $k \neq 0$, в) $\frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k}$, $k \neq 0$?

18 Еден број е двапати поголем од друг број, а нивниот збир изнесува 36. Кои се тие броеви?

19 Состави листа на податоци за која рангот е 2, а аритметичката средина е еднаква на медијаната.

20 Дали постои листа на податоци за која рангот е 3, а аритметичката средина се разликува од медијаната за 4?

21 Размерот од радиусот на Месечината и радиусот на Земјата е еднаков на 5:18. Одреди го радиусот на Месечината, ако знаеме дека радиусот на Земјата е 6370 m.

22 Еден часовник на 24 часа задоцнува 2 минути и 24 секунди. Колку ќе задоцни тој за 2 дена и 6 часа?

23 Од 0,42 а посеани со памук добиено е 147 чист памук. Колку, пак, ќе се набере од 1 а?

24 Две запчести тркала, чии запци завлегуваат еден во друг, едното тркало прави 5 завртувања, а другото 3 завртувања за исто време. Ако поголемото тркало има 75 запци, колку запци ќе има помалото?

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА - V

1 Каде лежат точките на рамнината xOy, на кои:
а) апсцисите им се нули, б) ординатите им се нули?

2 Конструирај ги точките во рамнината xOy, чии координати се:
A(–2;5), B(3,–1), C(–1,–1), (–7,–1), E(0,2), H(4,5;–3).

3 Конструирај ја точката M(3,7). Определи ги координатите на точките што се симетрични на неа во однос на: а) апсцисната оска, б) ординатната оска, в) координатниот почеток.

4 Повлечи права што минува низ точките A(–3,–4) и B(1,4). Одреди ги координатите на пресечните точки со координатните оски.

5 Дадена е низата од податоци: 2; 3,5; 7; 8; 7; 4; 3,5; 7; 5. Најди ги аритметичката средина, рангот, медијаната и модата.

6 Каков размер постои помеѓу:
а) килограмот и грамот, б) тонот и хектограмот, в) литарот и хектолитарот?

7 Запиши го обратниот размер на размерот: а) 3:4, б) $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$.

8 Во едно одделение имало 30 ученици, од кои 5 биле одлични. Одреди колкав дел претставуваат одличните ученици од целото одделение и изрази го тој дел во проценти.

9 Состави пропорција од множителите на следниве производи:
а) $5 \cdot 9 = 3 \times 15$, б) $12 \cdot 5 = 15 \times 4$, в) $2\frac{1}{2} \cdot 8 = 3\frac{1}{3} \cdot 6$.

10 Функцијата : $x \rightarrow y$ е права пропорционалност со коефициентот k=3. Запиши ја функцијата аналитички со формула.

11 Коефициентот на обратната пропорционалност е k=6. Пополни ги празните места во табелата:

x	-4	-3	-1	1	2	4		
y							12	18

12 Растојанието меѓу местата A и B во природата е 54 m. Колкаво е нивното растојание на географска карта во размер 1:500000?

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

ВЕКТОРИ. ТРАНСЛАЦИЈА ТЕМА I

.1. стр. 7

2. Точно е. 3. Две различни насоки. 4. Шест различни насоки. 5. а), б) Само една полуправа. 8. а), б) Полуправа. 9. а) Права и две полуправи, б) отсечка, само една точка, или празно множество.

.2. стр. 9

2. Да. 3. а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, б) $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{BA}$. 4. а) Не е точно, б), в) точно е. 5. Точно е. 6. а), б) Точно е. 8. $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{BA}$. 9. а), б) Нултиот вектор.

.3. стр. 11

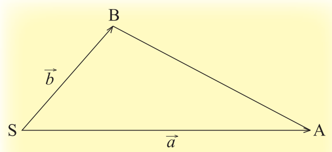
1. а), б) Точно е. 2. а), б) Да, в) не, г), д) да, ѓ) не. 3. а), б) Точно е. 4. а), в), д) Да, б), г) не. 6. Постои само една точка M. 8. Точни се само в) и г). 9. **Доказ.** Од $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO}$ следува дека OB и $\overline{AO} = \overline{OB}$. А од B и ↑↑ B следува дека A, O и B се колинеарни и O лежи меѓу A и B. Значи OAB. Од тоа и од $\overline{AO} = \overline{OB}$ следува дека O е средина на отсечката AB. 11. Тие образуваат квадрат. $\overrightarrow{SK} = \vec{0}$.

.4. стр. 15

4. а) $\overrightarrow{AF}$, б) $\overrightarrow{AB}$, в) $\overrightarrow{BC}$, г) $\overrightarrow{AE}$, д) $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$. 5. а) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$, б) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$, в) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. 7. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \vec{c} + \vec{d}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. 9. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$ = $\vec{a} + (-\vec{b})$.

.5. стр. 17

5. $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = -(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{DB} = -(\vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{DA} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. 6. а) $\overrightarrow{AB}$ +($\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$)– $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, б) ($\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$)–($\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$)= $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$, в) ($\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}$)+($\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$)–($\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$) = $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AE}$ = ($\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$)+($\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$)+ $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}$ =3 $\overrightarrow{DB}$ .7. а) $\vec{0}$, б) $\vec{a}$, в)– $\vec{a}$, г) $\vec{a}$, д) – $\vec{b}$. 8. Разгледај го цртежот 1. Од $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BA}$ =– $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{AB}$ следува дека $\vec{a} - \vec{b}$ =– $\overrightarrow{AB}$ =–($\vec{b} - \vec{a}$). 9. **Доказ.** а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$, б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$ =($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$)+($\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}$)= $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.



Црт. 1

.6. стр. 19

3. За: а) k>0, б) k 0, в)k=1,г)k=–1. 4. а) k =l, б) k >1, в) k 1. 6. а) $\vec{a} + 2\vec{b}$, б) $3\vec{a} + 8\vec{c}$, в) $3\vec{a} - 7\vec{b}$. 7. $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}$, $\vec{c} = -2\vec{a}$, $\vec{d} = \frac{5}{2}\vec{a}$. 8. За $k_1 = \frac{7}{2}, k_2 = -\frac{3}{2}, k_3 = -\frac{7}{3}$. 9. **Упатство.** Векторот $\overrightarrow{OM}$ продолжи го уште за една негова должина, ќе добиеш вектор $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM}$ кој што е еднаков на збирот $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. 10. **Упатство.** Повикај се на својството $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. Тогаш ќе добиеш $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$ = $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \frac{2}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

.7. стр. 21

3. а),б) Не, в) да. 4. а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$, в) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}$.

.8. стр. 22

3. $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1}$. 5. При $\tau_{-\vec{a}}$. 6. а) $\overrightarrow{AC}$, б) $\overrightarrow{AE}$. 7. Секоја права p со $\tau_{\vec{a}}$ каде што $\vec{a}$ има исти правец со p се пресликува сама на себе. 8. а) Постои, тоа е $\tau_{\overrightarrow{AB}}$, б) не постои. 9. а), б) Таа се пресликува самата на себе. 10. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

.9. стр. 25

2. Се пресликува во складна на себе фигура од ист вид. 3. Во пресекот на правите a_1 и b_1. 4. Постои само една транслација. 5. Тоа се правите што се паралелни со правецот на векторот на транслацијата. 6. Бесконечно многу. За произволен вектор $\overrightarrow{PQ}$, каде P$\in p$ и $\in p$. 9. $M_2 \equiv M$. 10. Постои. Тоа е $\tau_{-\vec{a}}$.

.10. стр. 27

1. **Упатство**. Точката C_1 е пресечна точка на правите q и $p_1 = \tau_{\vec{a}}(p)$. 2. **Упатство**. Разгледај го векторот $\overrightarrow{AB}$ и упатството на претходната задача 1. 3. **Упатство**. Разгледај го векторот $\overrightarrow{AB}$ и проследи го решението на решената задача во .10.

Задачи за повторување и утврдување - - стр. 28

2.а) $q\uparrow\uparrow r$, б) $q\uparrow\downarrow r$, в) $q\uparrow\uparrow r$. 3. Направи цртеж. 4. а),в) точно е, б) не е точно. 5. а),б) Точно е. 6. Точное. 7. в) $\vec{h} = -\vec{a}$, $\vec{c} = -\vec{o}$, $\vec{b} = -\vec{s}$, $\vec{e} = -\vec{d}$, $\vec{u} = -\vec{q}$, г) $\vec{a} = \vec{p}$, $\vec{c} = \vec{o}$, $\vec{e} = \vec{s}$, $\vec{k} = \vec{m}$. 8. **Доказ**. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. 10. За: а) k=2, б) k=1. 11. Може. 12. За: а) k>2, б) k 2. 13. **Упатство**. Земи предвид дека од $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ следува дека точката B е средина на отсечката C. 14. а) Не постои, б) постои. 15. Постои само една транслација за вектор $\overrightarrow{AC}$. 16. **Упатство**. Задачата не е можна секогаш. 17. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се: а) истонасочени, б) спротивнонасочени. 18. **Упатство**. а)Векторите $\vec{a}$ и $\vec{c}$ треба да се спротивни вектори, т.е. $\vec{c} = -\vec{a}$, б) векторот $\vec{c}$ треба да е спротивен вектор на збирот $\vec{a} + \vec{b}$. 19. **Доказ**. Направи цртеж. За векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, важи: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$. Оттука добиваме: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0} + \frac{1}{2}\cdot\vec{0} = \vec{0}$.

Задачи за самоконтрола стр. 29

2. Два вектора со ист правец може да се истонасочени или спротивно насочени. 3. Може, ако тие лежат на две паралелни прави. 4. Само еден вектор. 5. На два начина. 6. На истоимени фигури. 7. Во центарот на траслатираната кружница $k_1($ $_1$,$r)$. 8. Да, точно е. 9. $\vec{x} = -\vec{a}$. 10. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. 11. $\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$.

СТЕПЕНИ. КВАДРАТЕН КОРЕН ТЕМА II

.1.1. стр. 32

1. а) 16, б)-125. 2. а) 16 и 32, б) 625 и 625, в) -243 и 243, г) -1 и 1. 3. 4·7 и 7^4, б) 3b и b^3, в) $a^5 + c^3$. 4. а) 31, б) -24. 5. а), б), в) Не. 6. Точно е пополнета. 7. -1, $\frac{1}{32}$,- $\frac{1}{32}$,0,1,243. 8. Сите равенства се точни.

.1.2. стр. 34

1. $3\cdot10^5$ m . 2. $3{,}84\cdot10^8$m=$3{,}84\cdot10^{10}$cm. 3. $3.1536\cdot10^7$. 4. $1{,}35\cdot10^{10}$ год. 5. Еднакви се. 6. 10^6.

.1.3. стр. 35

1. а),б),в) Равенствата се точни. 2. а),б) Тие се еднакви. 3. а) 1, б) 1, в) 10. 4. 3^4.

.2.1. стр. 37

1. а) a^{10}, б) x^6, в) y^{n+1}, г) c^{n+1}. 2. а) a^3, б) 4^4, в) x^2. 3. а) 2^8, б) $(-5)^5$, в) a^6, г x^{n+6}. 4. а) 3^{11}, б) 4^6, в) a^{15}. 5. а) $a^4\cdot a^5$, б) $a^5\cdot a^4$, в) $a\cdot a^8$, г) $a^7\cdot a^2$, д) $a^6\cdot a^3$. 6. а) x=8, б) x=4, в) x=9. 7. а) 2^7, б) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, в) $(-5)^2$, г) x^{15}. 8. а) $a^{25}:a^{10}$, б) $a^{20}:a^5$, в) $a^{22}:a^7$. 9. а) a^7, б) a, в) a^5. 10. а) a^7, б) a^{m+n-4} . 11. а) $-\frac{5}{108}$, б) $-\frac{23}{8}$, -1, $\frac{3}{8}$. 12. а) $8a^3$, б) $81a^4b^4$, в) $\frac{x^3}{125}$.

.2.2. стр. 39

1. а) $125a^3$, б) $81a^4$, в) x^3, г) $625x^4y^4$. 2. а) 900, б) 1, в) 32. 3. а) $\frac{a^3}{8}$, б) $\frac{16}{a^4}$, в) $\frac{1}{x^n}$. 4. 1296, б) 1000, в) 243. 5. а) a^6, б) a^{20}, в) y^8. 6. а) $125a^3b^3$, б) $16x^4y^4$, в) $-a^5x^5y^5$. 7. а) 12^4, б) $(3a)^3$, в) $(2ab)^5$, г) $(-10a^2b^2)^3$. 8. а) 0,0001, б) –1000000, в) 0,03125. 9. а) $\frac{64}{125}$, б) $\frac{x^4}{81}$, в) 0,12005. 10. а) $\left(\frac{a}{2}\right)^4$, б) $\left(\frac{2x}{5}\right)^5$, в) $\left(\frac{0{,}1a}{2}\right)^3$. 11. а) x^6, б) x^7, в) x^{20}, г) x^{14}, д) x^2. 12. а) 9^{30}, б) 27^{20}, в) 81^{15}, г) 243^{12}.

.3.1. стр. 40

1. а) 6·6, б) (-7)·(-7), в)$(-1\frac{1}{2})\cdot(-1\frac{1}{2})$, г) $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$, д) (-0,8)·(-0,8). 2. а) 7^2, б) $(-3)^2$, в) $\left(\frac{3}{8}\right)^2$, г) 1^2, д) 0^2. 4. Не. 5. а) 81, 81,1,1,100,4. 6. а) 128, б) $\frac{5}{36}$. 7. а) Да, б) да. 8. а) 1 и -1, б) 2 и -2, в) 5 и -5, г) 3 и -3, д) 7 и -7.

.4. стр. 43

1. а) 1,41, б) 1,73, в) 2,23, г) 2,44, д) 2,82, ѓ) 3,16. 2. а) 8,83, б) 2,91, в) 2,78. 4. а) 5,47, б) 10,344, в) 2,74, г) 3,53. 5. а) парен, б) парен, в) непарен. 6. а) парен, б) непарен.

.5. стр. 45

1. а) 2,828cm, б) 3,46cm, в) 4,47cm. 2. а) 1,414, в) 1,732, в) 2,236. 4. а) 3,31 и -3,31, б) 4 и -4. 5. а) 2,828 и -2,828, б) 3 и -3, в) 3,74 и -3,74. 6. **Упатство**. Доказот е аналоген на доказот дека $\sqrt{2}$ не е рационален број. Притоа користи дека, ако a е природен број, тогаш a^2 е делив со 5 ако и само ако a се дели со 5. 7. Сите се рационални броеви.

.6. стр. 52

1. а,б,в и г. 2. а) 1,41 $\sqrt{2}$, б) 1,5> $\sqrt{2}$. 3. $\frac{7}{6}$=1,1666... $\frac{7}{5}$=1,4 $\sqrt{3}$=1,732050... 4. а)-3,814243... -3,814235..., б) $-\sqrt{15}$ -3,814243... 5. 0,33333...; 0,0333..., б) 0,03003000300003... 6. Ирационален.

.7. стр. 53

2. . 3. а) Да, б) да. 4. а) , б) .

Задачи за повторување и утврдување - - стр. 54

1. а) 216, б) -216, в) 1, г) -1, д) $\frac{81}{625}$, ѓ) $\frac{81}{625}$, е) -81, ж) -49. 2. а) n парен број, б) n непарен број. 3. а) да, б) да. 4. Сите равенства се точни. 5. а) 256, б) 3^{n+4}, в) a^{n+3}. 6. а) n=8, б) n=4, в) n=4. 7. а) $(a^2)^{10}$, б) $(a^5)^4$, в) $(a^{10})^2$. 8. а) n=2, б) n=3, в) n=8. 9. а) (1,6),(2,3),(3,2) и (6,1), б) (1,5),(2,4),(3,3),(4,2) и (5,1). 10. а) 7 и 8, б) 10 и 11, в) 12 и 13. 11. а) $n\in\{1,2,3,4\}$, б) n=2, в) $n\in\{1,2,3,4\}$. 12. а) 10,944, б) -7,401. 13. а) Парен, б) непарен. 14. а) 24, б) 12.

Задачи за самоконтрола - - стр. 54

1. а) 1, б) 256. 2. а) 9, б) 9, в) 0,25. 3. а) $9a^4b^4$, б) $-7{,}59375a^{25}b^{20}$, в) $16a^4$. 4. а) 8, б) 7, в) 9. 5. 512. 6. 1000000. 7. а) $-\frac{5}{12}$, б) 0,5. 8. а) 15, б) 1. 9. 10^9. 10. 10^6. 11. 5,9. 12. 81.

ПОЛИНОМИ ТЕМА III

.1.1. стр. 58

1. а) 0, б) 25,04, в) 0,681818... 3. a и b. 4. а) Тие се еднакви, б) 25–5 15–(–5). 5. а) 2,183, б) 0, в) 0,4. 6. а) 2·2–2, б) 2:2+2, в) 2·2+2, г) 2·2·2.

.1.2. стр. 60

1. а) 36,15,0,–9, -12. 2. 5, нема смисла, –5, нема смисла. Изразот е дефиниран за x различно од 1 и 1. 4. а) –3, б) 4, в) 0. 6. а) За x=6, б) за x=–2, в) за x=0, г) за x=6. 7. а) $\{x\ x\in R, x\neq 3\}$, б) $\{a\ a\in R, a\neq 4\}$, в) R, г) R, д) R. 8. а) (0,0), б) (1,2), в) (0,1).

.2. стр. 62

1. а) $-12x^3$ (–12 е броен множител), б) $14a^2bc$ (14 е броен множител), в) $0,4a^3bx$ (0,4 е броен множител). 4. а) 6 е коефициент, а a^4b^2 е главна вредност, б) –5 е коефициент, а x^3y е главна вредност, в) –1 е коефициент, а a^2b^3 е главна вредност, г) 1 е коефициент, а x^4 е главна вредност. 5. а) $3x^2{\cdot}2x^2y^2$, б) $3x^2\cdot\frac{1}{3}y^3$, в) $3x^2\cdot\frac{4}{3}x^3$. 6. а) и д), потоа в), г) и е). 7. а) и в); б) и д); г) и е).

.3. стр. 64

1. а) $3x^3+x^2+6x+7$,б) $5ab^2+b^3+3a^2b\ 6a^2+4a$. 4. а) a^5-$4a^4$-$2a^3$+$3a^2$+$2ab$-6, б) $3x^4$-$15x^3$+$5,2x^2$-l, в) $9xy+x$ 5. 5. а) $1000a+100b+10c+d$, б) $100x+10y+z$, в) $10a+b$, г) $10b+a$. 6. а) R, б) $x,y\in R$, в) $x,y\in R$. 7. а) 325, б) 476. 8. A(-3)=21, A(-2)=10, A(0)=0, A(1)=1, B(-3)=-21, B(-2)=-10, B(0)=0, B(1)=-1, C(-3)=-21,C(-2)=-10,C(0)=0, C(1)=-1.

.4. стр. 65

1. а) n-ти степен по x, трет степен по y, (n+3)-ти степен по x и y, б) втор степен по a, n-ти степен по b, (n+2)-ри степен по a и b, в) нулти степен, г) прв степен по a, прв степен по b, прв степен по c и трет степен по a, b и c. 2. а) 6-ти степен, б) петти степен, в) прв степен по x, четврти степен по y и петти степен по x и y, г) нулти степен, д) втор степен по x, трет степен по y, петти степен по x и y, ѓ) трет степен по a, втор по b, прв по c и шести степен по a, b и c. 3. $-5xy^3$, $-5x^2y^2$ и $-5xy^3$. 4. $9x^3y^4$ има највисок степен, а $-y^3$ има најнизок степен. 5. а) $-x^4y^2$-$3x^2y$+4x+$3y^3$-1, б) $-5a^2x^4$+$6ax^3$+$3x^2$-ax+1. 6. а) $-2x^5$+$5x^4y^2$+x^3y+$4x^2y^3$ $3xy^4$+$4y^4$ 1, б) (4-3x) y^4+$4x^2y^3$+$5x^4y^2$+x^3y-$2x^5$-1, в) $5x^4y^2$+$4x^2y^3$-$3xy^4$-$2x^5$+x^3y+$4y^4$-1.

.5. стр. 66

1. а) 11ab, б) $a^2b^2+5a^2b\ 3ab^2+4ab+6a+2b$. 2. а) $6a^2{\cdot}b$, б) $9a^2b+2ab^2$. 3. а) $2a^2b+4ab^2+2ab$, б) $a^2b^2+6a^2c$-$3ab^2+4abc+2ac^2$. 4. а) $8xy^2$, б) $3xy^2\ 4x^2y$, в) $3xy^2+x$. 5. а) $-2ax^2$, б) $7a^2xy$. 6. а) $6ab^2$+($-6ab^2$)=0, $-4ab+4ab$=0. 7. B(2)=C(-2)=2l, B(-1)=C(-1)=10, B(0)=C(0)=5, B(3)=C(3)=26, (-2)=-B(-2)=-21, (-l)=-B(-l)=-10, (0)=-B(0)=-5, (3)=-B(3)=-26.

.6. стр. 68

1. а) $-5x^3+4x^2-x+1$, б) $7ax-2x^2+5a-9$. 2. а) $a\ \ a$ +1, б) -2 -2. 3. а) $x^2\ y^2+x+y+4$, б) a^3+a^2. 4. а) $1\frac{4}{5}$, б) 1, в) -3. 5. Вредноста на изразот е 2 и не зависи од x. 6. а) Да, б) не. 7. а) $\overline{ab}+\overline{ba}$ =($10a+b$)+($10b+a$)=$11a+11b$ =11($a+b$), б) $\overline{ab}-\overline{ba}$ =($10a+b$)–($10b+a$)=$9a-9b$=9($a-b$). 8. =$2x^3$-($-3x^2-x+5$). 9. а) (a^2+2a)+($2a$+1), б) (x^2-2x)+(x-2). 10. а) (a^2+7a)-(a+2), б) (x^2+2x)-(x+4).

.7. стр. 69

1. $2ax^3+4a^2x-3ax+3a\ x+5$. 2. $11ax^2-10a^2x+3ax-a\ x$. 4. а) $a^2+3ab+3a\ b$, б) $x^4+x^3-3x^2+3x$. 5. а) ($4ab^2\ 2a^2b+ab$)+($-3a^2b+ab\ 5a$ 1), б) ($6x^5-4x^4+x^2$-l)+($-x^4-3x^3-2x$-l). 6. а) x^5, б) x^6, в) a^8, г) x^6.7. а) $15a^3b^3$, б) $8a^4x^3$, в) $-3a^2bc^3$.

.8. стр. 71

1. а) $-6x^3y^2$, б) $20x^2y$, в) $72a^4x^4$. 2. а) $-2a$, б) $3x$, в) 2. 3. a^5, б) $15a^3b^2$, в) $-10a^4b^2c$, г) $-2ax^5y^2$. 4. а) $6a^5b^2c^2$, б) $-28a^3b^4x$, в) $10ab^2$. 5. а) $-3a^2c$, б) $3ac$, в) $-9a^3$, г) $3a^3$. 6. а) $-12,5x$, б) $3x$, в) $\frac{5}{4}$. 7. а) $-9a^2{:}y^2$, б) $2,5a^2c^2{:}(b^2x)$, в) $\frac{8a}{5b^3}$, г) $\frac{6y^2}{5x^2}$. 9. а) a^6, б) x^8, в) y^8.

.9. стр. 72

1. а) $4a^4b^6$, б) $-125a^3b^6$, в) $16x^6y^2$, г) a^3b^3, д) $a^5x^{10}y^5$. 2. а) $8a^3x^3y^3$, б) $5{,}7a^4x^2y^2$, в) $125x^6$, г) $81a^8y^4$. 3. Дистрибутивен закон. 4. $(5+3+1)\cdot 4=9\cdot 4=36$; $(5+3+1)\cdot 4=5\cdot 4+3\cdot 4+1\cdot 4=20+12+4=36$.

.10. стр. 73

1. а) $6x^3-8x^2+10x$, б) $-18x^5+30x^4-18x^3+12x^2-24x$, в) $8a^4b\ 2a^2b^2+2ab^3$. 2. а) $12a^2x^2-20abx^2$, б) $-14a^2b^4+6a^3b^3-8a^2b^3$. 3. а) $10a^2-19ab-20b^2-2a+6b$, б) $-56xy^2-10x^2-6xy+56y^2$, в) $-55x+40a-106$. 4. а) Изразот е $-4y^2+12y$ и не зависи од x, б) изразот е $-6a^2-6a$ и не зависи од x. 5. а) 5, б) -9, в) 4, г) 9.

.11. стр. 74

1. а) $2a^2-16ab+15b^2$, б) $6x^3-8x^2+5x-3$, в) $14x^2y-7x^2y^2-10x^2y+13xy^2-4y^3$. 2. а) $-8a^2+17a$-ll, б) $17x^3+2x^2-19x-1$. 3. а) $4x^2$ -1, б) $6x^2+x-2$, в) $6x^2+7x+2$, г) $12x^3+8x^2-3x-2$, д) $-12x^3-8x^2+3x+2$. 4. а) $x^2+4xy-2$, б) $9x^2y$, в) $2x^2+5xy+2y^2-6x^2y-3xy^2$, г) $3xy^2\ 3x^2y+x+2y$. 5. $15b-3a-45$. За $a=30$, $b=38$ седобива 435.

.12.1. стр. 76

1. а) x^2-9y^2, б) x^4-1, в) $25-9a^2$. 2. а) $1-9x^2$, б) $\frac{1}{4}x^2y^2-1$. 3. а) a^4-b^4, б) $27a-b^2$. 4. 2. 5. а) a^4-16, б) x^3-25x, в) $81-x^4$. 6. а) $100^2-3^2=9991$, б) $200^2-1=39999$, в) $1-0{,}05^2=0{,}9975$, г) $60^2-3^2=3591$. 7. Квадратот има поголема плоштина за 9cm^2. 8. а) $a^2+2ab+b^2$, б) $4a^2\ 4ab+b^2$, в) $9x^2+12xy+4y^2$.

.12.2. стр. 77

1. а) $a^2+8a+16$, б) $49-14y+y^2$, в) $9-6y+y^2$, г) x^2+2x+1. 2. а) $4x+8$, б) $-16x^2-12xy+5y^2$, в) $-15x^2+27xy+5y^2$. 3. а) $4x-2$, б) $c^2-2cx+x^2-4$. 5. а) 1681, б) 529, в) 10201, г) 9801, д) 4624. 6. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. 7. y^2-5y+6. 8. Дистрибутивен закон на делењето во односна собирањето. 9. а) (48-18):6=30:6=5, 48:6-18:6=8-3=5, б) (63+21):7= 84:7=12; 63:7+21:7=9+3=12.

.13. стр. 79

1. $6ab^2x\ 4a^2+2b$. 2. а) $4x^3-3x^2+7x$-l, б) $-2a^3+3a^2\ 5a+1$. 3. а) $2y\ 3+5x^2y^2$, б) $-0{,}25x^5y^2+0{,}4x^2y-1{,}5xy^2+0{,}5$, в) $-18a^2b^2+2b+2$, $4ab^3\ 0{,}2$. 4. $4a^2+2a-3$, б) $-7ax+9a^2$. 6. а) 423, б) 232.

.14. стр. 81

1. а) $x^2\ x+1$, б) $3x^3-2x^2+x$-l. 2. Количникот е $2x+3$, а остатокот е $x-5$. 3. а) $2x+4y$, б) $4a+3$. 4. а) $-2x^2\ x+1$, б) $7a\ 2b$, 5. а) Количникот е $5x+2$, а остатокот е 8, б) Количникот е $0{,}5a^2-0{,}25a+2{,}625$, а остатокот е $-3{,}625a$+l1,875. 6. а) Разликата на тие броеви, б) збирот на тие броеви. 7. Количникот е 99. 8. а) $3x$, б) $5x+2$. 9. Другиот полином е $12a^2-18a+1$.

.15. стр. 82

1. Цели рационални изрази се: а) и в); дробно рационални изрази се: б) и г). 2. а) $\{(x,y)|x,y\in R,x\neq y\}$, б) $\{x|x\in R,x\neq 0\}$, в) $\{x|x\in R,x\neq 3\}$. 4. а) $\frac{x+y}{x-y}$, б) $\frac{x+2}{x-2}$, в) $\frac{1+a}{1-a}$.

.16.1. стр. 85

1. а) $4a(2b+3c)$, б) $2a(a-3)$, в) $x^2(x-y)$. 2. а) 0 и $-\frac{1}{2}$, б) 0, 2 и -2. 3. а) $3(x-1)$, б) $a(2a\ b)$, в) $a^2(a-1)$, г) $3a(x-3y)$, д) $a(5b-2)$, ѓ) $3a(4x\ 5y)$, е) $ax^2(a\ x)$. 4. а) $xy(y\ x\ 5)$, б) $6x^2y(2xy-3+y+5x^2)$, в) $2a^2c(3a^2c-4c^2+8a)$. 5. а) $(a+c)(b\ c)$, б) $(x\ y)(a+b)$, в) $(x\ 3)(x\ 2)$. 6. а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{2}{a+b}$, в) $\frac{4-x}{7}$. 7. а) $38^6-38^5=38^5\cdot 37$, б) $34^9+34^8=34^8\cdot 35$. 8. а) 0 и $\frac{1}{2}$, б) -1 и 3, в) -4 и $\frac{1}{2}$, г) 1 и 5. 9. а) $9x^2-y^2$, б) a^2-x^2. 10. а) $(4x^2y)^2$, б) $(5xy^3)^2$, в) $(2a)^2$.

.16.2. стр. 86

1. а) $(x\ y)(x+y)$, б) $(a-1)(a+1)$, в) $(3x\ 5)(3x+5)$. 2. а) $(3xy-1)(3xy+1)$, б) $(a\ 4bc)(a+4bc)$, в) $(7x-6y)(7x+6y)$. 3. а) $(10-3a)(10+3a)$, б)$(5x-\frac{2}{3})(5x+\frac{2}{3})$, в) $(xy-\frac{3}{4})(xy+\frac{3}{4})$. 4. а) $(x\ y-1)(x\ y+1)$, б) $(1-3x)(1+x)$, в) $8a$. 5. а) $5(x-2y)(x+2y)$, б) $x^2y^2(x\ y)(x+y)$, в) $5x(x\ y)(x+y)$. 6. а) $x^2(x\ y)(x+y)$, б) $a^4(1-b)(1+b)$, в) $3a(3b\ c)(3b+c)$. 7. а) $a^3(a-1)(a+1)$, б) $3(a\ b)(a+b)$, в) $2a(2x-1)(2x+1)$. 8. а) 1060, б) 12400, в) $18\frac{2}{3}$. 9. а) 11 и -11, б) 0 и 3. 10. а) $\frac{x}{x+6}$, б) $\frac{-3}{a+3}$, в) $-1-x$. 11. а) $(n+11)^2-n^2=11(2n+11)$, б) $(4n+7)^2-1=(4n+6)(4n+8)=8(n+2)(2n+3)$.

.16.3. стр. 88

1. а) $(x-4)^2$, б) $(1+5y)^2$, в) $(y-1)^2$. 2. а) $(x+2)^2$, б) $(a\ b)^2$, в) $(3x+1)^2$. 3. а) $(2x+3)^2$, б) $(a-1)^2$, в) $(4a+3b)^2$. 4. а) $(2a+b)^2$, б) $(2x-\frac{1}{2})^2$, в) $a(x+1)^2$. 5. а) $a^2+10a+25$, б) $x^2-10x+25$, в) $9a^2-42ab+49b^2$. 6. а) 4900, б) 2500. 7. а) $\frac{a}{3x-1}$, б) $\frac{4-3y}{4+3y}$, 8. а) $a^2-6a+9=(a-3)^2>0$, б) $x^2-10x+25=(x-5)^2\geq 0$. 9. а) $(x-7)^2-1$, б) $(y+4)^2-1$, в) $(a-4)^2-17$. 10. а) $(x+y\ c)(x+y+c)$, б) $(a\ b\ 7)(a-b+7)$, в) $(x\ 4\ y)(x-4+y)$.

.16.4. стр. 89

1. а) $(x\ 5)(x^2+1)$, б) $(x+1)(x^2+1)$, в) $(y^2+2)(y+4)$. 2. а) $x(x+3)(x^2+3)$, б) $(y\ 1)(y^4+y^2+1)$. 3. а) $(x+2)(x+3)$, б) $(x+2)(x\ 1)$, в) $(x\ 2)(x+1)$.

Задачи за повторување и утврдување - - стр. 89

1. а) $7ax^2\ 2ax$, б) $2ax^2$, в) $12ax^2$. 2. $(2x^2-10x)+(3x+4)$. 3. а) Намалителот е $a^2+5a\ 5$, б) намаленикот е $13a^2-5a+4$. 4. а) $-15a^3x+18a^4x-21a^3x^3$, б) $12ax^3-12ax^5+24a^3x^3$. 5. Изразот е еднаков на -6. 7. $n^2=1+(n+1)(n-1)$. 9. $(2n+1+2k+1)[2n+1-(2k+1)] = 2(n+k+1)2(n-k) = 4(n+k+1)(n-k)$. 10. а) $\frac{x}{y}$, б) $\frac{y}{5}$. 11. а) $\frac{13}{6}$, б) $\frac{59}{3}$. 12. $(n-1)+n+(n+1)=3n$. 13. а) $2x-3$, б) $3x+1$. 14. $3x+4$. 15. а) Количникот е x^2-2x-1, а остатокот е -2, б) Количникот е x^2+2x-1, а остатокот е 2.

Задачи за самоконтрола - - стр. 90

1. а) $9a^4b^4$,) $-7{,}59375a^{25}b^{20}$, в) $16a^4$. 2. $x\neq 3$. 3. а) $-2{,}4x^2$, б) $5xy^3$, в) $-2x$, г) $-\frac{2xy}{3}$, д) $0{,}75a^3$. 4. а) Степенот по однос на a е 2, по однос на b е 1, а по однос на a и b е 3, а) Степенот по однос на a е 2, по однос на b е 1, а по однос на a и b е 3, б) Степенот по однос на x е 2, по однос на y е 2, а по однос на x и y е 4, в) Степенот по однос на x е 1, по однос на y е 3, а по однос на x и y е 4, г) Степенот по однос на x е 1, д) Степенот по однос на a е 1, по однос на b е 1, а по однос на a и b е 2. 5. а) $3a^2b$, б) $-\frac{1}{2}xy^2$, в) $-5y^2$. 6. а) $(8x\ 3)(8x+3)$, б) $5(x\ 2)(x+2)$. 7. Дадениот моном треба да се помножи со а) xy, б) $2yz$. 8. $-\frac{x+y+1}{2}$. 9. $4xy$. 10. Изразот е еднаков на 15. 11. y^2-2y-1. 12. а) $(2x-1)^2$, б) $y(y+2x)^2$.

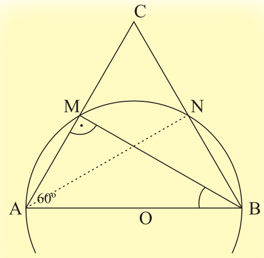
КРУЖНИЦА И МНОГУАГОЛНИК. ПЛОШТИНА ТЕМА IV

.1. стр. 92

1. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$. 2. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}=120$. 3. **Доказ**. Нека е дадена кружница $k(\ ,r)$, а AB и C нека се два заемно нормални дијаметри, т.е. нека B⊥C и $\overline{AB}=\overline{CD}$. Бидејќи AB и C се дијагонали на четириаголникот BC , а се нормални и се преполовуваат, значи тој е квадрат. 4. **Доказ**. Нека $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$, а M и нека се средини на $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$. Од $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{BN}=\overset{\frown}{NC}$ следува дека $\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{MB}+\overset{\frown}{BN}=\overset{\frown}{BN}+\overset{\frown}{NC}$, односно $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{BC}$, штд. 5. а) 60 , б) 45 в) 30 , г) 20 . 6. а) Точно е. 7. **Упатство**. Нацртај произволна кружница $k(\ ,r)$. а) Конструирај два заемно нормални радиуси OA⊥OB, потоа конструирај ја симетралата на тетивата B, б) конструирај тетива , чија должина е еднаква на радиусот r, а потоа конструирај ја симетралата

на лакот $\overset{\frown}{MN}$, в) конструирај тетива $\overline{MN}=r$, г) 135 =3·45 . 8. **Доказ.** Од складноста на централните агли AOC и B (како накрсни) (црт. 3) следува дека $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ и $\overline{AC}=\overline{BD}$. 9. **Доказ.** При осна симетрија S со оска AB аголот BAC се пресликува на аголот B , а со тоа тетивата на тетивата . Според тоа $\overline{AC}=\overline{AD}$. Оттука $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$.

.2. стр. 95



Црт. 2

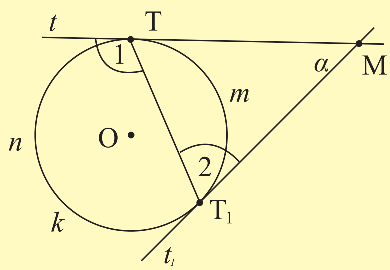
1.а) $\frac{1}{8}$, б) $\frac{1}{10}$, в) $\frac{1}{12}$. 2. ∠ABC=90 . 3. Од 0 до 180 . 4. а) 45 , б) 40 , в) 150 , г) 72 . 5. Од β+α= 180 , односно Од β+α=180 , односно β+2β=180 добиваме: β=60 , α=120 . 6. **Упатство**. Конструирај кружница *k* над отсечката AB (како нејзин дијаметар), потоа одреди го пресекот *k*∩ *p*. 7. $d=\overline{AB}=2\cdot\overline{CD}=2\cdot 2{,}5=5$(cm). 8. **Упатство**. Разгледај го цртежот 2. **Одг.** $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$=60 . 9. **Упатство.** Земи предвид дека, во правоаголен триаголник катетата што лежи спроти агол од 30 е еднаква на половина од хипотенузата; во нашиот случај таа е еднаква на радиусот *r*. 11.**Упатство**. Примени ја Талесовата теорема.

.3. стр. 98

2. **Упатство**. Низ точката M повлечи права, нормална на правата *p*. Центарот на бараната кружница ќе лежи на нормалата. 3. Нека е дадена права *p* и точка T∈*p*. Бараното множество од точки е права *q*, која минува низ T (но без T) и е нормална на *p*. 4. Две прави паралелни со правата *p* и на растојание *r* од неа. 5. **Доказ.** Нека AB е дијаметар на кружницата *k*(,*r*). Бидејќи тангентите $_1$ и $_2$ во точките A и B на кружницата *k* се нормални на дијаметарот AB, затоа тие се паралелни меѓу себе, штд. 6. **Упатство**. Низ центарот O на кружницата повлечи права *p*, што е: а) нормална, б) паралелна на дадената права *p*. 7. **Упатство.** Низ точката A∈*p* повлечи права *s*⊥*p*. Центарот на бараната кружница ќе лежи во пресекот ∩*q*. 8. **Упатство**. Радиусот на бараната кружница *k* е еднаков на растојанието од точката M до правата *p*. 9. $\overset{\frown}{TT_1}$ =∠TOT$_1$=180 -45 = 135 .

.4. стр. 99

1. ∠ B=∠ B =45 . 2. **Доказ**. Симетралата *s* на Δ BC минува низ врвот C на Δ BC и низ центарот на опишаната кружница околу Δ BC. Според тоа, ⊥AB и ⊥ . Оттука AB. 3. **Доказ**. Аголот ASB е надворешен за ΔB (црт. 15). Според тоа, ∠ASB=∠APM+∠MBP= $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}+\frac{\overset{\frown}{MP}}{2}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{MP})$, штд. 4. **Доказ**. Од ΔAEM (црт. 16) имаме ∠AMB=∠AEB-∠PAE= $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}-\frac{\overset{\frown}{PE}}{2}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{PE})$, штд. 5. **Доказ**. Нека е дадена кружница *k* и точка M∈*k* (црт. 3), од која се повлечени две тангенти и $_1$ кон кружницата *k*. Од Δ TT$_1$, имаме ∠TMT$_1$=α=∠1 ∠2= $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{T_nT_1}-\overset{\frown}{T_mT_1})$. 6. ∠ BC+∠ C=180 .



Црт. 3

.5. стр. 101

1. Околу правоаголникот. 2. а) Не може, б), в) Може. 3. ∠C=95 , ∠ =65 . 4. **Доказ**. Нека трапезот BC (AB C) е тетивен. За него важи ∠B+∠C=180 (бидејќи е трапез) и ∠A+∠C=180° (бидејќи е тетивен). Оттука следува дека ∠A=∠B. Значи, трапезот е рамнокрак. 5. **Упатство**. Точките , B, A$_1$ и B$_1$ се темиња на рамнокрак трапез. 6. **Упатство**. Направи цртеж. Аглите B и C во опишаната кружница се периферни над ист кружен лак $\overset{\frown}{AD}$. 7. $\overline{MN}+\overline{PQ}=\overline{NP}+\overline{QM}$.

.6. стр. 103

1. Во ромбот. 2. $\overline{CD}$ =10cm. 3. **Упатство**. Ако трапезот BC е тангентен, тогаш ќе важи $\overline{AB}+\overline{CD}$ = $\overline{AB}+\overline{CD}$, од каде, 2($\overline{AB}+\overline{CD}$)= , односно $\overline{AB}+\overline{CD}=\frac{L}{2}$. Значи $m=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})=\frac{L}{4}$. 4. **Упатство**. Земи предвид дека висината на ромбот е еднаква на дијаметарот d=2r на впишаната кружница во него. 5. Спротивните агли на правоаголниот трапез не се суплементни, затоа тој не е тетивен четириаголник, односно околу него не може да се опише кружница. 6. **Упатство**. Центарот на бараната кружница ќе лежи во пресекот на страната BC и бисектрисата на аголот A. 7. **Упатство**. Центарот на бараната кружница ќе лежи во пресекот на бисектрисата на внатрешниот агол A и бисектрисата на надворешниот агол на Δ BC при темето B (или C).

.7. стр. 106

1. Не може. 2. а) 5, б) 54, в) 170, г) 1175 дијагонали. 4. а) 1, б) 2, в) 47 дијагонали. 5. а) Седумаголник, 14 дијагонали, б) 10-аголник, 35 дијагонали, в) 18-аголник, 135 дијагонали, г) 28-аголник, 350 дијагонали. 6. На: а) 2, б) 3, в) 5, г) 13 триаголници. 7. а) 540 , б) 720 , в) 1080 , г) 1800 . 8. 116 . 9. а) петаголник, б) шестаголник, в) седумаголник, г) 10-аголник, д) 12-аголник.

.8. стр. 107

1. а) Не е точно, б) точно е. 2. а) Не е точно, б) точно е. 3. а) 108 , б) 135 , в) 150 , г) 160 . 4. Кај: а) 8-аголник, б) 12-аголник, в) 15-аголник, г) 20-аголник. 5. а) 72 , б) 60 , в) 40 . 6. **Доказ**. Добиениот шестаголник е правилен, бидејќи има еднакви страни (Зошто?) и еднакви внатрешни агли (Зошто?). 7. **Доказ**. Ако еден тетивен многуаголник има еднакви страни, тогаш темињата ја разделуваат опишаната кружница на n еднакви лаци. Во тој случај сите негови внатрешни агли се еднакви, како периферни агли над еднакви лаци во иста кружница. 8. Не е точно. На пример, правоаголникот е тетивен четириаголник со еднакви агли, но не е правилен.

.9. стр. 110

1.Упатство. Централниот агол е $\frac{360^o}{n}$. Покажи дека и надворешниот агол е исто $\frac{360^o}{n}$. 2. а) 120 , б) 90 , в) 72 , г) 60 . 3. а)($128\frac{4}{7}$) ,($51\frac{3}{7}$) ,($51\frac{3}{7}$) , б) 135 , 45 , 45 , в) 140 , 40 , 40 . 4. а) 8-аголник, б) 12-аголник, в) 10-аголник. 5. Не постои, б) 18-аголник, в), д), ѓ) не постои, г) осумаголник. 6. Доказ. Дијагоналите C и го разделуваат внатрешниот агол BAE на три еднакви агли, бидејќи тие се периферни агли над еднакви лаци. 7. ∠ =36 , ∠y=72 , ∠ =36 . 9. Не постојат, а кај многуаголниците со парен број на страни постојат. 10. Шест оски на симетријата. Да, таа е централно симетрична фигура. 11. Упатство. Направи цртеж. Покажи дека на повлечената тетива одговара кружен лак од 120 .

.10. стр. 113

1. **Упатство**. Раздели ја кружницата на: а) 6, б) 4, в) 8, г) 16 еднакви делови. 4. **Упатство**. Дадената кружница раздели ја на: а) 6, б) 12 еднакви делови, потоа во разделните точки конструирај тангенти на кружницата. 7. **Упатство**. Со помош на централниот агол раздели ја кружницата на: а) 5, б) 10 еднакви дела. 8. **Упатство**. Земи предвид дека внатрешниот агол кај правилниот петаголник е α=135 .

.11. стр. 115

1. а) 13cm, б) ≈11,4cm, в) 17cm. 2. а) ≈11,3cm, б) 10cm, в) 5,6cm, г) 8,5cm. 3. а) 157cm, б) 67,6cm, в) ≈41cm. 4. =16 $\sqrt{2}\approx$ 22,6cm. 5. = $\overline{AM}+\overline{MN}+\overline{AN}$ ≈23,4+13,9+15,5=52,8cm. 6. =b(3+ $\sqrt{3}$)cm. 7. 150 m. 8. а), в) Може, б), г) не може. 9. Триаголникот е: а), г) правоаголен, б), в) не е правоаголен.

.12. стр. 120

1. а)≈11,4cm, б) ≈l0,5cm. 2. 5cm. 3. 6 $\sqrt{2}$ 8,5cm. 4. ≈l0,06cm. 5. $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$≈2,lcm. 6. ≈4,24cm. 7. ≈24cm. 8. ≈6,5cm, =13cm. 9. =36 $\sqrt{3}$ cm, r=6cm, =12cm. 10. 12cm. 11. $\overline{BF}$ =5cm, $\overline{CF}$ =9,2cm, $\overline{CD}$ =13cm.

.13. стр. 123

3. **Упатство**. Бараната отсечка x, (односно y) може да го разгледува како хипотенуза (односно катета) на правоаголен триаголник со катети a и $2b$ (односно со хипотенуза a и другата катета $2b$). 4. **Упатство**. Отсечката со должина x сметај ја за хипотенуза на правоаголен триаголник, чии катети се a cm и 1cm. 6. **Упатство**. Бараната отсечка разгледувај ја како катета на правоаголен триаголник со хипотенуза $a+b$ и другата катета b.

.14. стр. 125

3. а) 1000 ари, б) 100000m^2, в) 0,1 m^2. 4. а), в) Точно е, б) не е точно. 5. Може да се состават правоаголник, рамнокрак правоаголен триаголник, рамнокрак трапез, ромбоид. Сите се еднакво плошни со дадениот квадрат. 6. Рамнокрак триаголник и паралелограм.

.15. стр. 127

1. а) 102cm^2, б) 48 m^2, в) 0,48cm^2. 2. а) 3cm^2, б) $\frac{9}{25}$ m^2. 3. а) 40m, б) 8,2 m^2. 5. Плоштината на правоаголникот: а) ќе се зголеми 2 пати, б) ќе се зголеми 6 пати. 6. $x=\sqrt{6\cdot 24}$ =12cm. 7. Четири различни правоаголници со страни: а) 1cm и 7cm, б) 2cm и 6cm, в) 3cm и 5cm, г) 4cm и 4cm. Најголема плоштина има квадратот. 8. Квадратот. 10. Плоштината на квадратот ќе се зголеми: а) за 36m^2 или за 56,25 , б) за 80cm^2, односно за 125 .

.16. стр. 129

1. а) 62,4cm^2, б) 25cm^2. 2. $_a$=4cm. 3. 10cm. 4. **Упатство**. За страните a и b и соодветните висини $_a$ и $_b$ на паралелограмот важи: $a>b \Rightarrow$ $_a$ $_b$. Одг. 12cm^2. 5. =30cm. 6. 4cm. 7. а) 3 и 2, б) 4 и 8, в) 5 и 11, г) 7, 9 и 10. 8. Бараниот паралелограм ќе има соодветна висина што е долга колку и страната на квадратот. 9. **Упатство**. Покажи дека ΔBCM=Δ . 10. P=12 $\sqrt{2}$ 17cm^2.

.17. стр. 132

1. а) 108cm^2, б) 3,6 m^2, в) 21,5m^2. 2. =8cm. 3. Плоштината: а) ќе се зголеми 3 пати, б) ќе се зголеми 2 пати, в) ќе се намали 3 пати. 5. 14,4cm. 6. 4,5cm. 8. Бараниот правоаголник ќе има висина еднаква на половина од висината кон основата на Δ BC. 10. Еднакво плошни се: а) 2 и 9, б) 3, 5, 7 и 8, в) 10 и 6. 11. а) 10, б) 19,5. 12. ≈120m, ≈837m^2. 13. а) 60cm^2, б) ≈26,8cm^2.

.18. стр. 134

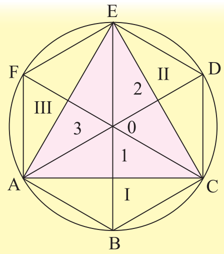
1. а) 99cm^2, б) 2,55 m^2. 2. 6cm. 3. 7cm. 4. ≈455 памук. 5. 6,8cm. 6. Се образува паралелограм. 7. **Упатство**. Одреди ја висината на трапезот. Одг. P=24cm^2. 8. **Упатство**. Покажи дека $\Delta BES \cong \Delta CDS$ (црт. 82). 9. **Упатство**. Покажи дека $\Delta BES \cong \Delta CFS$ (црт. 83). 10. а) Разгледај ја претходната задача, б) трапезот прво претвори го во паралелограм, а потоа добиениот паралелограм претвори го во правоаголник. 11. **Упатство**. Разгледај го: а) цртежот 82, б) цртежот 83.

.19. стр. 136

1. 36cm^2. 2. 15,12cm^2. 3. 24cm. 4. 31,205cm^2. 5. 28,88cm^2. 6. Страни на добиениот правоаголник ќе бидат: дијагоналата што е симетрала и половината од другата дијагонала на делтоидот: 7. **Упатство**. Пресметај ја прво страната на ромбот, а потоа од a $=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$ ќе добиеш =10,5cm. 8. d_2≈17,8cm, P=452,12cm^2. 9. 1125cm^2.

.20. стр. 138

1. 29400m^2. 2. а) 28cm^2, б) 27cm^2. 3. 292,5cm^2. 4. =27,7cm, =9,24cm^2. 5. =2cm, $r=\sqrt{2}$ cm, =6 $\sqrt{2}$ cm^2.



Црт. 4

6. Околу 2344 плочки. 7. **Упатство**. Разгледај го цртежот 4. 8. **Упатство**. Покажи дека триаголникот C е правоаголен (црт. 89). Одг. P≈5,4cm². 9. Пресметај ја прво плоштината на триаголникот според Хероновата формула. Потоа од формулата $P=sr$ ќе добиеш $r=\dfrac{2P}{a+b+c}$. 10. **Упатство**. Користи ја формулата P= r. **Одг**. r≈0,9cm. Не е еднозначно определен делтоид.

.21. стр. 141

1. а) ≈28,27cm, б) ≈6,28 m, в) ≈20,11 m. 2. а) ≈22cm, б) ≈39cm, в) ≈2,51m. 3. d≈3cm, r≈1,5cm. 4. ≈6366 m. 5. а) ≈107500 m, б) ≈1800 m, в) 30 m. 6. а) ≈8,8cm, б) ≈211cm. 7. r=16cm. 8. **Упатство**. Производот од периметарот (или само дијаметарот) на поголемото тркало и бројот на завртувањата што тоа ги прави во 1 минута е еднаков на производот од соодветните величини на помалото тркало. **Одг**. 240 завртувања. 9. **Упатство**. Производот од бројот на запците на едниот запченик и бројот на завртувањата што тој ги прави во 1 минута, е еднаков на производот на соодветните величини на другиот запченик. Одг.75 завртувања. 10. ≈16,17m. 11. а) πr, б) $\frac{1}{2}\pi r$, в) $\frac{1}{3}\pi r$.

.22. стр. 144

1. а) ≈0,37m, б) ≈0,55m, в) ≈1,03m. 2. ≈2,55cm. 3. $_1$≈14,97cm, $_2$≈10,68cm. 4. ≈16 51'. 5. ≈57 17 45 . 6. **Упатство**. Кружен лак што одговара на централен агол од 40 претставува $\frac{40}{360}=\frac{1}{9}$ од должината на кружницата. Одг. =6·9=54(m). 7. =12,5cm. 8. r=2,5cm. 9. α=144 . 10. а) 111,12 m, б) 1,852 m, в) ≈309m.

.23. стр. 145

1. а) ≈38,5cm², б) 36π(cm²), в) ≈3,14 m², г) ≈32,15m². 2. а) 9π (cm²), б) 121π(cm²), в) 490,87m², г) ≈0,442m². 3. а) ≈2 m², б) 19,6cm².4. Плоштината ќе се зголеми: а) 4 пати, б) 9 пати, в) 16 пати. 6. а) $r=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{20}\approx 4{,}5\,(\text{cm})$. 7. P=π r_1^2 -π r_2^2. **Одг**. ≈63,3cm². 8. 10cm. 9. а) $\frac{1}{2}\pi r^2$, б) $\frac{1}{4}\pi r^2$, в) $\frac{1}{3}\pi r^2$.

.24. стр. 148

1. а) ≈2,36cm², б) ≈8,04 m². 2. а) 17cm², б) 32cm². 3. ≈0,22 m. 4. ≈150 . 5. а) $\frac{1}{12}$, б) $\frac{1}{8}$, в) $\frac{1}{6}$, г) $\frac{1}{5}$, д) $\frac{5}{24}$, ѓ) $\frac{1}{3}$, е) $\frac{3}{8}$, ж) $\frac{2}{5}$, з) $\frac{5}{12}$ од плоштината на кругот. 6. а) 180 , б) 240 , в) 270 , г) 200 . 7. ≈10,35cm, ≈2,45cm². 8. ≈28,3cm, P≈21,2cm². 9. ≈22cm, ≈l0,5cm². 10. ≈27,56cm². 11. а) ≈35,33cm, =93,42cm². 12. ≈14cm².

Задачи за повторување и утврдување - - стр. 151

1. **Упатство**. Докажи дека Δ C =ΔB . Оттука следува $\overline{AC}=\overline{BD}$ и $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.2. **Упатство**. Дадениот агол прво направи го централен во некоја кружница. 3. **Доказ**. Нека е дадена кружница k(,r). Направи цртеж. Ако $\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}$, тогаш ΔAOB е рамностран. Оттука следува дека централниот агол AOB и кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ имаат 60 . Обратно, ако ∠AOB=60 , тогаш Δ B е рамностран. Значи $\overline{AB}=\overline{OA}$. 4. **Доказ**. Нека паралелограмот BC (AB C и BC) е тетивен. За него ќе важи ∠A=∠C (бидејќи е паралелограм) и ∠A+∠C=180 (бидејќи е тетивен). Оттука следува ∠A=90 и ∠C=90 . Значи BC е правоаголник, а ако $\overline{AB}=\overline{AD}$, тогаш тој е квадрат. 5. Кај: а) четириаголникот, б) седумаголникот. 6. **Упатство**. Земи предвид дека централниот агол е еднаков на надворешниот агол. 8. **Упатство**. Конструирај агол 135 =3·45 и подели го на два еднакви дела. Тој агол α=67 36 е внатрешен агол на правилниот осумаголник. 9. До висина

≈5,1m. 10. Плоштината ќе се: а) зголеми 3 пати, б) зголеми 2 пати, в) намали 4 пати. 11. 36cm. 12. P=15$\sqrt{3}$ ≈26(cm²). 13. 20cm. 14. P=28$\sqrt{3}$ cm². 15. ≈32cm². 16. Од $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$ =28,46 ќе добиеш a≈3,3cm. 17. ≈7,25 m. 18. ≈8165m. 19. а) Ќе се зголеми 3 пати, б) ќе се намали 5 пати. 20. ≈6m. 21. ≈16cm. 22. a≈27,5cm. 23. Плоштината ќе се зголеми: а) 2 пати, б) 3 пати. 24. ≈l8,8cm, ≈l8cm². 25. ≈164,5cm².

Задачи за самоконтрола - - стр. 152

1. 60 . 2. И соодветниот периферен агол ќе се зголеми 3 пати. 3. **Упатство**. Центарот на бараната кружница ќе лежи во средината на отсечката AB. 4. **Упатство**. Конструирај кружница k(B,3cm). Бараната права p е тангента на k, што е повлечена од точката A. 5. а) петаголник, б) седумаголник, в) 19-аголник, г) 42-аголник. 6. Кај квадратот. 8. n оски на симетрија. 9. **Упатство**. Бараниот квадрат има страна a=2r. 11. **Упатство**. Одреди ја прво висината на трапезот. Одг. 10,5cm². 12. а) ≈25,1cm, ≈50,27cm², б) ≈31,4 m, ≈78,54m², в) ≈6,28m, ≈3,14m².

ФУНКЦИЈА. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ ТЕМА V

.1. стр. 155

1. ×B={(a,1),(a,2),(a,b),(a,c),(b,1),(b,2),(b,b),(b,c),(c,1),(c,2),(c,b ,(c,c)}, B× = {(1,a),(l,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c), (b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)}. За Декартовиот производ комутативниот закон не важи. 3. M²= {(2,2),(2,5),(2,7),(2,9),(5,2),(5,5), , (9 , 9) }. 4. а) {3,6,9}×{4,6}, б) {c,2}×{a,c,3}. 5. 30,32,34,50,52,54.

.2. стр. 158

2. Во: а) , б) , в) , г) квадрант. 4. A(4,5;5,5), B(-3,5), C(-6;2,5), (l,3), (0,4), (-5;0,5), (-2,5;0), H(4,0), K(7,0), (2,5;-3), (5,-4), (0,-4), (-6,-2), (-2,-l), (-2,-3), T(-2,-4). 5. (-l, $\sqrt{3}$), B(1, $\sqrt{3}$), C(2,0), (1, $\sqrt{3}$), E(-1, $\sqrt{3}$), (-2,0). 6. а) Во , , , квадрант, б) Во , , , квадрант. 7. Точките B и лежат на Oy оската, а точките A и лежат на Ox оската. 8. B(3,-3), C(3,3), (-3,3). 9. Точките лежат на права што е паралелна со Oy оската и минува низ точката S(3,0). 10. Точките лежат на права p паралелна со Ox оската и минува низ точката S(0,-2). 11. а) Рамнокрак триаголник со страни $\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{BC}$ =6, б) правоаголен триаголник со катети $\overline{AB}=6$ и $\overline{AC}$ =2,5 и хипотенуза $\overline{BC}$ =6,5.

.3. стр. 161

1. а) a 2, б) b 2, b 3 и b 4, в) b 4 и d 4, г) Постои, тоа е елементот e, д) Постои. Таков е елементот a. 3. а) Г={(12,3),(15,6),(24,6),(72,9),(45,9)}, б) Г={(12,2),(15,5),(24,4),(72,2),(45,5)}, в) Г={(12,1),(15,1),(24,2),(72,7),(45,4)}. 4. Г ={(a,2),(b,2),(b,3),(b,4),(d,2),(d,4)}, Г ={(a,1),(a,2),(b,2),(c,4),(d,4),(c,5)}. 5. а) Г ={(2,3),(2,4),(2,6),(2,8),(2,9),(3,4),(3,6),(3,8),(3,9),(4,6),(4,8),(4,9),(6,8),(6,9),(8,9)}, б) Г ={(9,8),(9,6),(9,4),(9,3),(9,2),(8,6),(8,4),(8,3),(8,2),(6,4),(6,3),(6,2),(4,3),(4,2),(3,2)}, в) Г ={(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(3,9),(4,8)}.

.4. стр. 164

1. Тоа е условот: „секој елемент x∈A да е во релација само со еден елемент од y∈B“. 2. Релациите и не се функции. 3. Само релациите и се функции. 4. **Упатство**. Образувај ги сите подмножества од Декартовиот производ ×B={(a,1),(a,2),(c,1),(c,2)}. Од сите нив функции се: {(a,1),(b,2)}, {(a,2),(b,1)}, {(a,1),(b,1)}, {(a,2),(b,2)}. 5. Таа релација е функција. 6. Исказот: а) е вистинит, б) не е вистинит, в) е вистинит. 7. Да. Релацијата : → е функција. 8. Да, релацијата :K→π е функција. 9. Да, релацијата од M во S е функција.

.5. стр. 168

1. 108 , 140 , кај правилниот 12-аголник. Таа зависност на α од n е функција. 2. 716mm H , 525,7mm H . На висина 1000m, на 5000m. Зависноста на атмосферскиот притисок p од висината H е функција. 3. Домен е ={-1,0,1,2,3,4,5,6}, а кодомен е K={-1,0,1,2,3,4}. 4. (0)=2, (2)=2, (6)=0, а) за x=-1, x=3 и x=6, б) за $x\in$(-1,3) и (6,8], в) за $x\in$[-2,-1) и (3,6). 5. Релацијата од A на B е функција, а релацијата од C на не е функција (A)={-6,-4,0, 6,14,24}. 6. (-2)=-7, 7= (12), т.е. на x=-2 одговара y=-7, а y=7 е слика на x=12. 7. :A$\rightarrow$B, (x)=3x, $x\in\{-1,0,2,3,5\}$, :C$\rightarrow$ со (x)= x , $x\in${-5,-3,0,2,3,5 . 8. :A$\rightarrow$B со y=3x, а φ:B$\rightarrow$A со $y=\frac{x}{3}$.

.6. стр. 171

1. Еднородни величини. 2. Два члена. 3. Два размера. Спротивни размери. 4. а) 100:1, б) 1:100, в) 1:10. 5. а) 60:1, б) 1:24, в) 60:1. 6. а) 750:200, б) 8:30, в) 48:15, г) 5:5. 7. а) 8:3, б) 7:20, в) 50:2, г) $(\frac{3}{5}\cdot 40):(\frac{5}{8}\cdot 40)$=24:25. 8. а) 0,8, б) 0,625, в) 2. 9. 100:80 и 80:100. 10. 750:800; $(\frac{750}{800}\cdot 100)\% = \frac{750}{8}$ $=93\frac{3}{4}$ =93,75 . 11. Еднакви се размерите 18:6, 9:3 и 3:1, а исто и размерите 20:5 и 10:$2\frac{1}{2}$.

.7. стр. 173

1. а), б), в) Пропорции се. 2. 3:5=6:10; 3:6=5:10; 10:5=6:3; 10:6=5:3; 6:10=3:5; 6:3=10:5, 5:10=3:6 и 5:3=10:6. 3. **Упатство**. Првите членови на двата размера помножи ги со НЗС(15,3)=15. Одг. 8:4=10:5. 4. а), б) Може, в), г) не може. 5. Производот на кои било од два од нив треба да е еднаков на производот на другите два од нив. 6. а), б), в), г) може, д) не може. 7. Ќе се добие точна пропорција. 8. Еднаков е на количникот од производот на двата: а) внатрешни члена и другиот надворешен член, б) надворешни члена и другиот внатрешен чен. 9. а) $x=\frac{9\cdot 5}{15}$=3, б) $x = 6\cdot\frac{2}{3}:14 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$, в) $x = \frac{3\cdot 2}{0,4} = \frac{60}{4} = 15$, г) $x = \frac{5\cdot 1,2}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$. 10. Реши ја пропорцијата x:120=9:500. Одг. Растворен е 2,16 син камен. 11. Имало 6 девојчиња. 12. 2:6=6:18.

.8. стр. 175

1. а) a:b:c:d=8:5:3:2, б) x:y:z: =2:5:6:10. 2. **Упатство**: а) Од $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2+3+4}=\frac{180}{9}$=20 се добива α=40 , β=60 , γ=80 , б) α=45 , β=60 , γ=75 . 3. **Уп т тв** . Користи $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{5}=\frac{370}{10}$=37. дг. x=111, y=74, z=185. 4. α=40 , β=100 , γ=80 , δ=140 . 5. **Упатство**. Користи продолжена пропорција: x_1:x_2:x_3:x_4:x_5=600:800:400:120:120 и $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$=2480. Одг. x_1=1200, x_2=1600, x_3= 800, x_4=x_5=240. 6. а) x=180, y=360, z=540, б) **Упатство**. Користи ја пропорцијата $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{6}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{1080}{\frac{3+2+1}{6}}$=1080. Одг. x=540, y=360, z=180.

.10. стр. 178

4. а) 4:6=6:9, б) 4:8=8:16.

.11. стр. 180

1. а) 7,5 б) 6, в) 1,6. 2. а) 5, б) 6, в) 25, г) $3\frac{1}{2}$. 3. а) 4, б) 4, в) 2, г) $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, д) 0,6. 4. 9,5 C.

.12. стр. 182

1. а) $_a$=8, M_o=8, M_e=7,5, б) $_a$=8, M_o=9, M_e=9. 2. $_a$=l2, M_o=9, M_e=9. 3. Рангот на горниот притисок е 27, на долниот 10, а на пулсот 18. Модот на горниот притисок е M_o=150, на долниот M_o=88, а на пулсот M_o=72.

Медијана на горниот притисок е M_e=150, на долниот е M_e=86, а на пулсот M_e=72, б) просечниот горен притисок е ≈148,6; на долниот ≈85,4; а на пулсот 72,3. 4. а) =3*a*, б) =4*a*, в) =2π*r*.

.13.1. стр. 183

1. Функцијата е права пропорционалност со коефициент *k*=4. 2. *y*=0,5*x*. 3. =4*a* е права пропорционалност. 4. =2π*r* е права пропорционалност со коефициент *k*=2π. 5. P=πr^2 не е права пропорционалност. 6. =12 (m) преминува во $S=12\cdot\frac{1000}{3600}\cdot t$ (m). 7. $d=\sqrt{2}\cdot a$, $k=\sqrt{2}$. 8. $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

.13.2. стр. 185

1. 52,5 јаглен. 2. $208\frac{1}{3}$. 3. 1920 . 4. 9,5 сол. 5. 7,75 m. 6. За 5 сек. 7. Ќе изора $6\frac{2}{3}$ a.

.13.3. стр. 187

2. а) *y*=2, б) *x*=-6. 3. За *x*>0, б) за *x* 0. 4. а) (2)=$\frac{1}{2}$, (4)=1, (6)=$\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, б) на сегментот [$\frac{1}{2}$,1], в) за *x*=8. 5. а) Точките А и С, б) точките B и C. 6. *y*=4,5*x*, а) *y*=60,75 (cm^2), б) *x*=2 (cm). 7. б) Страната *y* ќе се зголеми 2 пати.

.14.1. стр. 189

1. а), б) Функцијата е обратна пропорционалност. 3. *k*=(-2)(-12)=24. 4. Во обратна пропорционалност. 5. а), б), в) Во обратна пропорционалност. 6. Не е обратна пропорционалност.

.14.2. стр. 191

1. За 7 часа. 2. 21 ден. 3. За 1 час. 4. На 18 лица. 5. 120 завртувања во минута. 6. За 6 часа.

.14.3. стр. 193

1. а) (1)=8, (2)=4, (4)=2, б) за *x*=$\frac{4}{3}$. 2. а) За *x* 0, б) за *x*>0. 3. а) Во и , б) во и квадрант. 4. (1)=$\frac{1}{2}$, (–2)=$\frac{1}{4}$, ($\frac{1}{4}$)=2.

.15. стр. 194

1. Ќе се добијат 59,64 суви сливи. 2. **Упатство**. Часовите претвори ги во минути, потоа реши ја пропорцијата *x*:120=210:15. Одг. 1680 вода. 3. 26 бензин. 4. 3200 вода. 5. 828 волна. 6. За 4,5 часа. 7. За 24 дена. 8. 114,3 кашкавал. 9. Ќе има 150 страни.

Задачи за повторување и утврдување - - стр. 195

1. а) A_1(*a*,-*b*), б) A_2(-*a*,*b*), в) A_3(-a,-*b*). 2. а) A×B = {(1,2),(1,4),(1,5),(3,2),(3,4),(3,5),(4,2),(4,4),(4,5)}, б) B×A = {(2,1),(2,3),(2,4),(4,1),(4,3),(4,4),(5,1),(5,3),(5,4)}, в) A^2={(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4),}, г) B^2= {(2,2),(2,4),(2,5),(4,2),(4,4),(4,5),(5,2),(5,4),(5,5)}. 3. а) права *x*=3 паралелна со О*y*-оската, б) права *y*=-2 паралелна на О*x*-оската, в) права *y* =*x* симетрала на и квадрант, г) права *y*=-*x* симетрала на и квадрант. 5. а) Од *x*-1=2*x*+3 се добива x=-4, б) *x*=3,5. 6. *r*(9)=4, *r*(10)=0, *r*(11)=1. 7. A_1(-2,3), B_1(-5,1), C_1(-8,6). 8. A_1(2,5). 9. Да, функција е. Множество на вредностите на таа функција е [-7;5 . 10. а) *x*=20, б) *x*=$\frac{2}{3}$, в) *x*=3, г) *x*=$\frac{87}{4}$. 11. а) 1:6, б) 1:7,5; в) 1:125, г) 1:12,5; д) 1:24. 12. *d*(*A*,B)=200000cm=2 m. 13. а) Постои, б) не постои. 14. Треба да се земат уште (24-16)=8 работници. 15. а) 5*n*+1, б) 5*n*+2, в) 5*n*+3, г) 5*n*+4. 16. Од 13*a*+31*b*=(13+31)*x* се добива *x*=$\frac{13a+31b}{44}$ (денари за 1). 17. а) Разликата не се менува, ако намаленикот и намалителот се намалат за еден ист број *k*, б) проширување на дропките, в) скратување на дропките. 18.

Од $x+2x=36$ се добива $x=12$. Одг. Бараните броеви се 12 и 24. 19. 3,4,5. 20. Не постои, бидејќи ако a и $a+3$ се најмалата и најголемата вредност, тогаш аритметичката средина и медијаната се наоѓаат помеѓу a и $a+3$, па нивната разлика не може да биде еднаква на 4. 21. а) $r\approx 1770$ m. 22. Ќе закасни 324 сек=5 минути и 24 секунди. 23. Ќе се набере 350 памук. 24. 45 запци.

Задачи за самоконтрола - - стр. 196

1. Лежат: а) на Оy-оската, б) на Оx-оската. 3. а) $M_1(3, -7)$, б) $M_2(-3,7)$, в) $M_3(-3, -7)$. 4. Пресечни точки А(-1, 0) и В(0,2). 5. $5\frac{2}{9}$, 6, 4, 7. 6. а) 1000:1, б) 100:1, в) 1:100. 7. а) 4:3, б) 4:5. 8. Одличните ученици претставуваат од сите ученици или $(\frac{1}{6}\cdot 100)\%$. 9. а) 5:3=15:9, б) 15:12=5:4, в) $2\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}$=6:8. 10. $s=3x$. 12. Растојанието меѓу местата А и В на географската карта изнесува $\overline{AB}=\frac{5400000}{500000}=\frac{54}{5}$=10,8cm.

КВАДРАТЕН КОРЕН НА БРОЕВИ ОД 1 ДО 1000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00	1,00	1,41	1,73	2,00	2,24	2,45	2,65	2,83	3,00
1	3,16	3,32	3,46	3,61	3,74	3,87	4,00	4,12	4,24	4,36
2	4,47	4,58	4,69	4,80	4,90	5,00	5,10	5,20	5,29	5,39
3	5,48	5,57	5,66	5,74	5,83	5,92	6,00	6,08	6,16	6,24
4	6,32	6,40	6,48	6,56	6,63	6,71	6,78	6,86	6,93	7,00
5	7,07	7,14	7,21	7,28	7,35	7,42	7,48	7,55	7,62	7,68
6	7,75	7,81	7,87	7,94	8,00	8,06	8,12	8,19	8,25	8,31
7	8,37	8,43	8,49	8,54	8,60	8,66	8,72	8,77	8,83	8,89
8	8,94	9,00	9,06	9,11	9,17	9,22	9,27	9,33	9,38	9,43
9	9,49	9,54	9,59	9,64	9,70	9,75	9,80	9,85	9,90	9,95
10	10,00	10,05	10,10	10,15	10,20	10,25	10,30	10,34	10,39	10,44
11	10,49	10,54	10,58	10,63	10,68	10,72	10,77	10,82	10,86	10,91
12	10,95	11,00	11,05	11,09	11,14	11,18	11,22	11,27	11,31	11,36
13	11,40	11,45	11,49	11,53	11,58	11,62	11,66	11,70	11,75	11,79
14	11,83	11,87	11,92	11,96	12,00	12,04	12,08	12,12	12,17	12,21
15	12,25	12,29	12,33	12,37	12,41	12,45	12,49	12,53	12,57	12,61
16	12,65	12,69	12,73	12,77	12,81	12,85	12,88	12,92	12,96	13,00
17	13,04	13,08	13,11	13,15	13,19	13,23	13,27	13,30	13,34	13,38
18	13,42	13,45	13,49	13,53	13,56	13,60	13,64	13,67	13,71	13,75
19	13,78	13,82	13,86	13,89	13,93	13,96	14,00	14,04	14,07	14,11
20	14,14	14,18	14,21	14,25	14,28	14,32	14,35	14,39	14,42	14,46
21	14,49	14,53	14,56	14,59	14,63	14,66	14,70	14,73	14,76	14,80
22	14,83	14,87	14,90	14,93	14,97	15,00	15,03	15,07	15,10	15,13
23	15,17	15,20	15,23	15,26	15,30	15,33	15,36	15,39	15,43	15,46
24	15,49	15,52	15,56	15,59	15,62	15,65	15,68	15,72	15,75	15,78
25	15,81	15,84	15,87	15,91	15,94	15,97	16,00	16,03	16,06	16,09
26	16,12	16,16	16,19	16,22	16,25	16,28	16,31	16,34	16,37	16,40
27	16,43	16,46	16,49	16,52	16,55	16,58	16,61	16,64	16,67	16,70
28	16,73	16,76	16,79	16,82	16,85	16,88	16,91	16,94	16,97	17,00
29	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,20	17,23	17,26	17,29
30	17,32	17,35	17,38	17,41	17,44	17,46	17,49	17,52	17,55	17,58
31	17,61	17,64	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,80	17,83	17,86
32	17,89	17,92	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,08	18,11	18,14
33	18,17	18,19	18,22	18,25	18,28	18,30	18,33	18,36	18,38	18,41
34	18,44	18,47	18,49	18,52	18,55	18,57	18,60	18,63	18,65	18,68
35	18,71	18,73	18,76	18,79	18,81	18,84	18,87	18,89	18,92	18,95
36	18,97	19,00	19,03	19,05	19,08	19,10	19,13	19,16	19,18	19,21
37	19,24	19,26	19,29	19,31	19,34	19,36	19,39	19,42	19,44	19,47
38	19,49	19,52	19,54	19,57	19,60	19,62	19,65	19,67	19,70	19,72
39	19,75	19,77	19,80	19,82	19,85	19,87	19,90	19,92	19,95	19,97
40	20,00	20,02	20,05	20,07	20,10	20,12	20,15	20,17	20,20	20,22
41	20,25	20,27	20,30	20,32	20,35	20,37	20,40	20,42	20,45	20,47
42	20,50	20,52	20,54	20,57	20,59	20,62	20,64	20,66	20,69	20,71
43	20,74	20,76	20,78	20,81	20,83	20,86	20,88	20,90	20,93	20,95
44	20,98	21,00	21,02	21,05	21,07	21,10	21,12	21,14	21,17	21,19
45	21,21	21,24	21,26	21,28	21,31	21,33	21,35	21,38	21,40	21,42
46	21,45	21,47	21,49	21,52	21,54	21,56	21,59	21,61	21,63	21,66
47	21,68	21,70	21,73	21,75	21,77	21,79	21,82	21,84	21,86	21,89
48	21,91	21,93	21,95	21,98	22,00	22,02	22,05	22,07	22,09	22,11
49	22,14	22,16	22,18	22,20	22,23	22,25	22,27	22,29	22,32	22,34

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	22,36	22,38	22,41	22,43	22,45	22,47	22,49	22,52	22,54	22,56
51	22,58	22,61	22,63	22,65	22,67	22,69	22,72	22,74	22,76	22,78
52	22,80	22,83	22,85	22,87	22,89	22,91	22,94	22,96	22,98	23,00
53	23,02	23,04	23,07	23,09	23,11	23,13	23,15	23,17	23,20	23,22
54	23,24	23,26	23,28	23,30	23,32	23,35	23,37	23,39	23,41	23,43
55	23,45	23,47	23,50	23,52	23,54	23,56	23,58	23,60	23,62	23,64
56	23,66	23,69	23,71	23,73	23,75	23,77	23,79	23,81	23,83	23,85
57	23,88	23,90	23,92	23,94	23,96	23,98	24,00	24,02	24,04	24,06
58	24,08	24,10	24,13	24,15	24,17	24,19	24,21	24,23	24,25	24,27
59	24,29	24,31	24,23	24,35	24,27	24,39	24,41	24,43	24,45	24,47
60	24,50	24,52	24,54	24,56	24,58	24,60	24,62	24,64	24,66	24,68
61	24,70	24,72	24,74	24,76	24,78	24,80	24,82	24,84	24,86	24,88
62	24,90	24,92	24,94	24,96	24,98	25,00	25,02	25,04	25,06	25,08
63	25,10	25,12	25,14	25,16	25,18	25,20	25,22	25,24	25,26	25,28
64	25,30	25,32	25,34	25,36	25,38	25,40	25,42	25,44	25,46	25,48
65	25,50	25,51	25,53	25,55	25,57	25,59	25,61	25,63	25,65	25,67
66	25,69	25,71	25,73	25,75	25,77	25,79	25,81	25,83	25,85	25,87
67	25,88	25,90	25,92	25,94	25,96	25,98	26,00	26,02	26,04	26,06
68	26,08	26,10	26,12	26,13	26,15	26,17	26,19	26,21	26,23	26,25
69	26,27	26,29	26,31	26,33	26,34	26,36	26,38	26,40	26,42	26,44
70	26,46	26,48	26,50	26,51	26,53	26,55	26,57	26,59	26,61	26,63
71	26,65	26,66	26,68	26,70	26,72	26,74	26,76	26,78	26,80	26,81
72	26,83	26,85	26,87	26,89	26,91	26,93	26,94	26,96	26,98	27,00
73	27,02	27,04	27,06	27,07	27,09	27,11	27,13	27,15	27,17	27,18
74	27,20	27,22	27,24	27,26	27,28	27,30	27,31	27,33	27,35	27,37
75	27,39	27,40	27,42	27,44	27,46	27,48	27,50	27,51	27,53	27,55
76	27,57	27,59	27,60	27,62	27,64	27,66	27,68	27,69	27,71	27,73
77	27,75	27,77	27,78	27,80	27,82	27,84	27,86	27,87	27,89	27,91
78	27,93	27,95	27,96	27,98	28,00	28,02	28,04	28,05	28,07	28,09
79	28,11	28,12	28,14	28,16	28,18	28,20	28,21	28,23	28,25	28,27
80	28,28	28,30	28,32	28,34	28,35	28,37	28,39	28,41	28,43	28,44
81	28,46	28,48	28,50	28,51	28,53	28,55	28,57	28,58	28,60	28,62
82	28,64	28,65	28,67	28,69	28,71	28,72	28,74	28,76	28,77	28,79
83	28,81	28,83	28,84	28,86	28,88	28,90	28,91	28,93	28,95	28,97
84	28,98	29,00	29,02	29,03	29,05	29,07	29,09	29,10	29,12	29,14
85	29,15	29,17	29,19	29,21	29,22	29,24	29,26	29,27	29,29	29,31
86	29,33	29,34	29,36	29,38	29,40	29,41	29,43	29,44	29,46	29,48
87	29,50	29,51	29,53	29,55	29,56	29,58	29,60	29,61	29,63	29,65
88	29,66	29,68	29,70	29,72	29,73	29,75	29,77	29,78	29,80	29,82
89	29,83	29,85	29,87	29,88	29,90	29,92	29,93	29,95	29,97	29,98
90	30,00	30,02	30,03	30,05	30,07	30,08	30,10	30,12	30,13	30,15
91	30,17	30,18	30,20	30,22	30,23	30,25	30,27	30,28	30,30	30,31
92	30,33	30,35	30,36	30,38	30,40	30,41	30,43	30,45	30,46	30,48
93	30,50	30,51	30,53	30,54	30,56	30,58	30,59	30,61	30,63	30,64
94	30,66	30,68	30,69	30,71	30,72	30,74	30,76	30,77	30,79	30,81
95	30,82	30,84	30,85	30,87	30,89	30,90	30,92	30,94	30,95	30,97
96	30,98	31,00	31,02	31,03	31,05	31,06	31,08	31,10	31,11	31,13
97	31,14	31,16	31,18	31,19	31,21	31,22	31,24	31,26	31,27	31,29
98	31,30	31,32	31,34	31,35	31,37	31,38	31,40	31,42	31,43	31,45
99	31,46	31,48	31,50	31,51	31,53	31,54	31,56	31,58	31,59	31,61
100	31,62	31,64	31,65	31,67	31,69	31,70	31,72	31,73	31,75	31,76

АЗБУЧНИК НА ПОИМИТЕ

СОДРЖИНА

ТЕМА I
ВЕКТОРИ. ТРАНСЛАЦИЈА

ТЕМА II
СТЕПЕНИ. КВАДРАТЕН КОРЕН

ТЕМА III
ПОЛИНОМИ

ТЕМА IV
КРУЖНИЦА И МНОГУАГОЛНИК. ПЛОШТИНА

ТЕМА V
ФУНКЦИЈА. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ