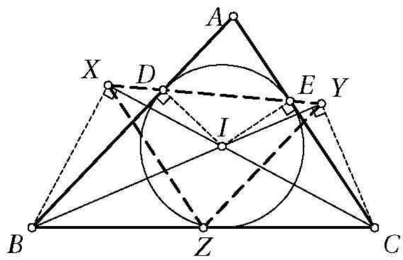
БМО 2005

1. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC соодветно во точките D и E. Нека симетралите на аглите во темињата C и B ја сечат правата DE соодветно во точките X и Y и нека Z е средината на страната BC. Докажи, дека триаголникот XYZ е рамностран ако и само ако $\measuredangle A = 60^\circ$.



Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница. Од

$$\measuredangle BIX = \tfrac{1}{2}(\measuredangle B + \measuredangle C) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle A = \measuredangle ADX$$

следува дека точките B, I, X, D лежат на иста кружница. Според тоа,

$$\measuredangle BXI = \measuredangle BDI = 90^\circ,$$

па затоа триаголникот BCX е правоаголен, што значи

$$\overline{ZX} = \overline{ZB} \text{ и } \measuredangle ZXC = \measuredangle ZCX = \measuredangle XCA,$$

т.е. $ZX \parallel AC$. Аналогно $\overline{ZY} = \overline{ZB}$ и $ZY \parallel AB$.

Конечно, $\overline{ZX} = \overline{ZY}$ и $\measuredangle XZY = \measuredangle A$, од што следува тврдењето.

2. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $p^2 - p + 1$ е точен куб.

Решение. Равенката $p^2 - p + 1 = b^3$ можеме да ја запишеме во видот

$$p(p-1) = (b-1)(b^2+b+1).$$

Од $b < p$ следува дека $p \mid b^2+b+1$, т.е. $b^2+b+1 = kp$ и $p-1 = k(b-1)$, за некој цел број $k > 1$. Уште повеќе $k \ge 3$ бидејќи b^2+b+1 е непарен број. Сега $p = kb - k + 1$ и

$$b^2 + b + 1 - kp = b^2 - (k^2-1)b + (k^2-k+1) = 0 \qquad (1)$$

што е квадратна равенка по b. Нејзината дискриминаната

$$D = (k^2-1)^2 - 4(k^2-k+1) = k^4 - 6k^2 + 4k - 3$$

мора да биде точен квадрат. Сега од $(k^2-3)^2 \le D < (k^2-2)^2$, следува $D = (k^2-3)^2$, па затоа $k = 3$. Конечно, од (1) следува $b = 7$ и $p = 19$ и тоа е единствено решение.

3. Ако a, b, c се позитивни реални броеви докажи го неравенството

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Бидејќи $\frac{a^2}{b}=2a-b+\frac{(a-b)^2}{b}$, $\frac{b^2}{c}=2b-c+\frac{(b-c)^2}{c}$, $\frac{c^2}{a}=2c-a+\frac{(c-a)^2}{a}$, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{|a-b|^2}{b}+\frac{|b-c|^2}{c}+\frac{|c-a|^2}{a}\geq\frac{4|a-b|^2}{a+b+c}$$

Последното неравенство непосредно следува од неравенството на Коши-Буњаковски- Шварц

$$(a+b+c)(\frac{|a-b|^2}{b}+\frac{|b-c|^2}{c}+\frac{|c-a|^2}{a})\geq(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2\geq(2|a-b|)^2$$

бидејќи $|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$. Знак за равенство важи ако и само ако $|a-b|=kb$, $|b-c|=kc$, $|c-a|=ka$, за некој k и $|a-b|=|a-c|+|c-b|$. Ако $k\neq 0$, од овие релации следува $b=c+a$, па затоа $a=kc=k^2b$ и $|\frac{1}{k}-1|a=|c-a|=ka$ и лесно се добива дека $k=\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ако $k=0$, тогаш $a=b=c$. Според тоа, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$ или $a:b:c=\phi^2:1:\phi$.

4. Нека $n\geq 2$ е природен број и нека S е подмножество на множеството $\{1,2,...,n\}$ кое не содржи два заемно прости броја, ниту два броја од кои едниот е делител на другиот. Колку елементи може најмногу да има множеството S ?

Решение. За секој $x\in S$ постои единствен $k_x\in\mathbb{N}_0$ таков што $\frac{n}{2}<2^{k_x}x\leq n$. Да означиме $f(x)=2^{k_x}x$. Пресликувањето f е инјекција. Навистина, ако за $x,y\in S$ важи $f(x)=f(y)$, тогаш или $x\,|\,y$ или $y\,|\,x$, па според условот на задачата $x=y$. Според тоа, множеството $f(S)=\{f(x)\,|\,x\in S\}$ има ист број елементи како и множеството S. Притоа $f(S)$ не содржи два последователни броја (бидејќи тие се заемно прости), па затоа $|f(S)|\leq[\frac{n-[\frac{n}{2}]+1}{2}]=[\frac{n+2}{4}]$.

Од друга страна, множеството $S=\{2i\,|\,\frac{n}{4}<i\leq\frac{n}{2}\}$ има точно $[\frac{n+2}{4}]$ елементи и ги задоволува условите на задачата. Според тоа, одговорот е $[\frac{n+2}{4}]$.