29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 21. октобар 2007. год.

8—9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) Колико се највише белих и црних жетона може ставити на шаховску таблу тако да на свакој хоризонтали и на свакој вертикали белих жетона буде тачно два пута више него црних? (Један жетон заузима само једно поље)

2. (4 поена) На папиру су записани број 1 и неки број x који није цео. У једном потезу (кораку) може се на папиру написати збир или разлика било која два већ написана броја, или да се напише број реципрочан било ком од већ написаних бројева. Такође је допуштено на папиру записати број који се тамо већ налази, као и сабрати број сам са собом. Може ли се после извесног броја потеза на папиру појавити број x^2?

3. (4 поена) Средиште једне од страница троугла и подножја висина спуштених на друге две странице тог троугла су темена једнакостраничног троугла. Мора ли у том случају и полазни троугао бити једнакостраничан?

4. (5 поена) У таблицу 29×29 уписани су бројеви 1, 2, 3, ... , 29, сваки тачно по 29 пута. Испоставило се да је збир бројева изнад главне дијагонале три пута већи од збира бројева испод те дијагонале. Нађите број који је уписан у централно поље те таблице. (Главна дијагонала — то је дијагонала која спаја горњи леви угао таблице са доњим десним углом)

5. (5 поена) Мађионичар завезаних очију даје једном гледаоцу 5 карата с бројевима од 1 до 5. Гледалац две карте задржава (сакрива) код себе, а три даје мађионичаревом помоћнику. Помоћник показује гледаоцу две од те три карте, а гледалац каже мађионичару бројеве тих карата (којим год хоће редом). После тога мађионичар погађа бројеве карата које је задржао (сакртио) гледалац. Како треба да се договоре мађионичар и помоћник, да би трик увек успео?

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 21. oktobar 2007. год.

10—11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) На свакој од сто слика приказани су једна одрасла особа и једно дете које је нижег раста од одрасле особе. Од свих њих треба саставити једну велику слику. При томе је допуштено променити размеру сваке слике, тј. поделити висину одраслог и висину детета истим целим бројем (при чему се за разне слике размера може мењати различито). Доказати да је могуће урадити (тј. променити размеру сваке слике) тако да после тога на великој (збирној) слици ма која одрасла особа (с било које слике) буде виш аод ма ког детета (на било којој од слика).

2. (4 поена) На папиру су записана три позитивна броја: x, y и 1. У једном потезу (кораку) може се на папиру написати збир или разлика било која два већ написана броја или, пак, број реципрочан било ком од већ написаних бројева. Такође је допуштено на папиру записати број који се тамо већ налази, као и сабрати број сам са собом. Може ли се после извесног броја потеза на папиру добити:

а) број x^2? (2 поена)
б) број xy? (2 поена)

Разуме се, могу се разматрати разни случајеви (на пример, ако је $x=1$, задатак је решен; али је остало да се реши када је $x\neq 1$, итд.).

3. (4 поена) Дата је права и две тчке A и B, које су са исте стране те праве и на једнаком растојању од ње. Како помоћу шестара и лењира наћи на правој тачку C, такву да производ AC·BC буде најмањи?

4. (4 поена) Мађионичар завезаних очију даје једном гледаоцу 29 карата с бројевима од 1 до 29. Гледалац две карте задржава (сакрива) код себе, а остале даје мађионичаревом помоћнику. Помоћник показује гледаоцу две од тих карата, а гледалац каже мађионичару бројеве тих карата (у ком год хоће редоследу). После тога мађионичар погађа бројеве карата које је задржао (сакрио) гледалац. Како треба да се договоре мађионичар и помоћник, да би трик увек успео?

5. Квадрат странице 1 cm разрезан је на три конвексна многоугла. Може ли се десити да дијаметар (пречник) свакога од њих није већи од:

а) 1 cm; (1 поен)

б) 1,01 cm; (2 поена)

в) 1,001 cm? (2 поена)

(Дијаметар многоугла је максимално растојање између два његова темена)

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 28. октобар 2007. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (5 поена) На страници CD ромба $ABCD$ узета је тачка K тако да је $AD=BK$. Нека је F пресечна тачка дијагонале BD и симетрале странице BC. Докажите да тачке A, F и K леже на једној правој.

2. **а)** (3 поена) Пера и Васа замислили су по три природна броја. Пера је за свака два од својих бројева написао на табли њихов највећи заједнички делилац. Васа је за свака два од својих бројева на табли написао њихов најмањи заједнички садржалац. Испоставило се да да је Пера на табли написао исте бројеве као и Васа (могуће другим редом). Докажите да су сви написани бројеви на табли различити.

б) (3 поена) Да ли ће тврђење из претходног задатка остати да важи ако Пера и Васа у почетку замисле по четири природна броја?

3. (6 поена) Миша стоји у центру кружног терена (ливадице) полупречника 100 метара. Сваког минута он чини корак дугачак 1 метар. Пре сваког корака он саопштава у ком смеру ће да коракне. Каћа има право да га натера да промени смер у супротан. Може ли миша поступати тако да у неком моменту свакако изађе са тог терена, или га Каћа може увек у томе спречити?

4. (7 поена) Дата је трака са $1 \times N$ поља (квадратића). Двојица играју овакву игру. Играч који је први на потезу ставља крстић у једно од слободних поља, а други играч ставља нулу. И тако наизменично. Није допуштено у суседна поља ставити два крстиће или две нуле. Губи онај ко не може да учини потез (да стави свој знак). Који од играча може увек да победи (ма како да игра његов супарник)?

5. (8 поена) Имамо колекцију (гарнитуру) од неколико тегова и на сваком је назначена његова маса. Познато је да су колекција маса и колекција натписа исте, али је могуће да су неки натписи побркани (погрешно стављени). Теразије представља хоризонтална дуж (полуга), која има ослонац у свом средишту. При мерењу тегови се вешају у произвољним тачкама полуге, после чега теразије остају у равнотежи или скрећу на једну или другу страну (тј. нарушава се равнотежа: један крај полуге се подиже, а други спушта). Може ли се увек једним мерењем проверити да ли су сви натписи тачни или не? (Теразије ће бити у равнотежи ако је збир момената тегова који су десно од средине полуге једнак збиру момената тегова који су лево, а у противном, скренуће надоле тамо где је збир момената већи. Моменат тега је производ ms масе тега m и растојања s од њега до средиишта полуге).

6. Мађионичару су везали очи, а гледалац је поређао у низ N једнаких новчића, при чему је сам одлучивао да ли ће са горње стране бити "круна" или "писмо". Мађионичарев помоћник је онда замолио гледаоца да на листу папира напише ма који број од 1 до N и покаже га свим присутним. Видевши тај број, помоћник показује гледаоцу на један од новчића у низу и моли га да преврне тај новчић, што овај учини.. Затим мађионичару одвезују очи, а он погледа на низ новчића и без грешке одређује број који је гледалац написао.

а) (4 поена) Докажите да, ако мађионичар и његов помоћник имају метод који омогућава мађионичару да гарантовано открије број за $N=a$, онда они имају метод и за $N=2a$.

б) (5 поена) Нађите све вредности N за које мађионичар с помоћником има такав метод (начин за погађање).

7. (9 поена) Влада је решио да постане велики писац. Ради тога је он сваком слову нашег језика придружио реч која садржи то слово. Затим је написао реч придружену слову "А". Даље је уместо сваког слова написао придружену му реч (правећи размак између речи); затим је у тако насталом тексту поново уместо сваког слова написао придружену му реч, и тако укупно 40 пута. Владин текст почиње овако: "Конвој бродова на успаваним морима". Докажите да се тај склоп речи среће у Владином тексту бар још једном.

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 28. октобар 2007. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.
Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. а) (2 поена) Пера и Васа замислили су по три природна броја. Пера је за свака два од својих бројева написао на табли њихов највећи заједнички делилац. Васа је за свака два од својих бројева на табли написао њихов најмањи заједнички садржалац. Испоставило се да је Пера на табли написао исте бројеве као и Васа (могуће другим редом). Докажите да су сви написани бројеви на табли различити.

б) (2 поена) Да ли ће тврђење из претходног задатка остати да важи ако Пера и Васа у почетку замисле по четири природна броја?

2. (6 поена) Дијагонале тетивног четвороугла (тј. четвороугла уписаног у кружницу) секу се у тачки P. Нека су K, L. M, N - средишта страница тог четвоироугла. Докажите да су полупречници описаних кружница око троуглова PKL, PLM, PMN и PNK једнаки.

3. (6 поена) Одредите све растуће аритметичке прогресије с коначним бројем чланова, чији је збир једнак 1, а сваки члан је облика $1/k$, где је k природан број.

4. (6 поена) Имамо колекцију (гарнитуру) од неколико тегова и на сваком је назначена његова маса. Познато је да су колекција маса и колекција натписа исте, али је могуће да су неки натписи побркани (погрешно стављени). Теразије представља хоризонтална дуж (полуга), која има ослонац у свом средишту. При мерењу тегови се вешају у произвољним тачкама полуге, после чега теразије остају у равнотежи или скрећу на једну или другу страну (тј. нарушава се равнотежа: један крај полуге се подиже, а други спушта). Да ли је увек могуће једним мерењем проверити да ли су сви натписи тачни или не? (Теразије ће бити у равнотежи ако је збир момената тегова који су десно од средине полуге једнак збиру момената тегова који су лево, а у противном, скренуће надоле тамо где је збир момената већи. Моменат тега је производ ms масе тега m и растојања s од њега до средишта полуге).

5. Мађионичару су везали очи, а гледалац је поређао у низ N једнаких новчића, при чему је сам одлучивао да ли ће са горње стране бити "круна" или "писмо". Мађионичарев помоћник је онда замолио гледаоца да на листу папира напише ма који број од 1 до N и покаже га свим присутним. Видевши тај број, помоћник показује гледаоцу на један од новчића у низу и моли га да преврне тај новчић, што овај учини. Затим мађионичару одвезују очи, а он погледа на низ новчића и без грешке одређује број који је гледалац написао.

а) (4 поена) Докажите да, ако мађионичар и његов помоћник имају метод који омогућава мађионичару да гарантовано открије број за N=a и за N=b, онда они имају метод и за N=ab.

б) (4 поена) Нађите све вредности N, за које мађионичар с помоћником има такав метод (начин за погађање).

6. (8 поена) У равни су нацртана два конвексна многоугла P и Q. За сваку страницу многоугла P, многоугао Q можемо поставити између две праве паралелне тој страници. Означимо са h најмање растојање које може бити између тих правих, а са l дужину странице, па израчунамо производ $l\ h$. Сумирајући те производе по свим страницама многоугла P, добићемо неку величину (P,Q). Докажите да је $(P,Q)=(Q,P)$.

7. Пред Аљошом се налази 100 затворених кутија, а у свакој од њих је или црвена или плава коцкица. Аљоша има рубље (руска новчана јединица, 1 рубља — 100 копејки). Он прилази ма којој затвореној кутији, објављује боју коцкице у њој (по његовом мишљењу) и ставља неку суму (то не мора бити цео број копејки, али не може бити више од суме коју он има у том тренутку). Кутија се отвара и Аљошина сума се увећава или смањује, зависно од тога да ли је он погодио или није боју коцкице у кутији. Игра се наставља све док се не отворе све кутије. Која је највећа сума коју Аљоша може себи да гарантује, ако је њему познато да:

а) (3 поена) плавих коцкица има тачно 1;

б) (5 поена) плавих коцкица има тачно n.

(Напомена: Аљоша може да стави и 0, тј. може бесплатно да отвори кутију и види боју коцкице.)

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 24. фебруар 2008. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) У конвексном шестоуглу ABCDEF наспрамне сатранице су међусобно паралелне (AB са DE, BC са EF и CD са FA), а такође је AB=DE. Докажите да је BC=EF и CD=FA.

2. (5 поена) У равни је нацртано 10 једнаких дужи и означене су све њихове пресечне тачке. Показало се да свака пресечна тачка дели ма коју дуж која кроз њу пролази у размери 3:4. Колики је највећи могући број означених пресечних тачака?

3. (5 поена) Имамо 30 картица и на свакој је написан број: на дест картица – број a, на десет другхих – број b, а на десет преосталих – број c (бројеви a, b, c су сви различити). Познато је да за ма којих пет картица можемо изабрати још пет, тако да збир бројева на тих десет картица буде једнак нули. Докажите да је један од бројева a, b, c једнак нули.

4. (6 поена) Нађите све природне бројеве n за које је $(n+1)!$ дељиво са $1!+2!+...+n!$ ($k!$ је производ свих природних бројева од 1 до закључно са k).

5. (6 поена) Поља табле 10×10 обојена су црвеном, плавом и белом бојом. Ма која два поља са заједничком страницом обојена су разним бојама. Познато је да црвених поља има 30.

а) (2 поена) Докажите да је могуће увек изрезати 30 правоугаоника, од којих се сваки састоји од два поља – белог и плавог.

б) (2 поена) Наведите пример бојења те табле, када је могуће изрезати 40 таквих правоугаоника (и објасните зашто је он одговарајући).

в) (2 поена) Наведите пример бојења табле, када није могуће изрезати више од 30 таквих правоугаоника (и објасните зашто је он одговарајући).

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 24. фебруар 2008. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) Имамо 30 картица и на свакој је написан број: на десет картица – број a, на десет другхих – број b, а на десет преосталих – број c (бројеви a, b, c су сви различити). Познато је да за ма којих пет картица можемо изабрати још пет, тако да збир бројева на тих десет картица буде једнак нули. Докажите да је један од бројева a, b, c једнак нули.

2. (5 поена) Може ли најмањи заједнички садржалац целих бројева 1, 2, 3, ..., n бити 2008 пута већи од најмањег заједничког садржаоца целих бројева 1, 2, 3, ..., m ?

3. (5 поена) У троуглу ABC угао A је прав, M је средиште дужи BC, H – подножје висине из темена A. Права која пролази кроз тачку M и нормална је на AC, по други пут сече описану кружницу око троугла AMC у тачки P. Докажите да дуж BP полови дуж AH.

4. (5 поена) Дати су конвексан многоугао и квадрат. Познато је да, ма како поставили две копије многоугла унутар квадрата, постојаће тачка која припада и једном и другом од тих многоуглова. Докажите да, ма како поставили три копије многоугла унутар квадрата, постаојаће тачка која им припада.

5. (6 поена) Дата је таблица (на слици десно) у којој можемо замењивати места врстама, а тако|е и колонама (у било ком поретку). Колико различитих таблица можемо добити из дате таблице на такав начин?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Сложенија варијанта, 9. март 2008. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. Број N представља производ два суседна природна броја. Докажите да:

а) (2 поена) том броју можемо дописати са десне стране две цифре тако да се добије тачан квадрат;

б) (2 поена) ако је $N>12$, то се може учинити на јединствен начин.

2. (5 поена) На страницама AB и BC троугла ABC изабране су редом тачке K и M тако да је $KM \| AC$. Дужи AM и KC секу се у тачки O. Зна се да је $AK=AO$ и $KM=MC$. Докажите да је $AM=KB$.

3. (6 поена) Дата је карирана трака, издељена на квадратиће, ширине 1 квадратић и бесконачна на обе стране. Два поља те траке су клопке (замке), а између њих је N поља и на једном од њих налази се скакавац. При сваком потезу ми изговарамо природан број, после чега скакавац скаче за толики број поља лево или десно (по свом избору). За које N можемо изговорати бројеве тако да сигурно утерамо скакавца у једну од клопки, ма где он на почетку био измећу њих и ма како бирао правце својих скокова? (Ми све време видимо где се налази скакавац.)

4. (6 поена) Неколико (коначан број) тачака у равни обојено је у четири боје, при чему има тачака од сваке боје. Никоје три од тих тачака не леже на истој правој Докажите да се могу наћи три различита троугла (који се могу и сећи), таква да су им темена различитих боја и да унутар њих нема обојених тачака.

5. (7 поена) У кружном распореду стоји 99 деце и свако од њих у почетку има лопту. Сваког минута свако дете (које има лопту) баца лопту једном од својих суседа. При томе, ако две лопте дођу до једног детета, онда се једна од тих лопти избацује из игре неповратно. Кроз које најмање време код деце може остати само једна лопта?

6. (7 поена) Постоје ли природни бројеви $a, b, c, d,$ такви да је

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1, \quad \frac{a}{d}+\frac{c}{d}=2008?$$

7. (8 поена) Конвексни четвороугао $ABCD$ нема паралелних страница. Углови које странице тог четвороугла образују са дијагоналом AC (у неком поретку) су једнаки 16°, 19°, 55° и 55°. Колики може бити оштар угао између дијагонала AC и BD?

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Сложенија варијанта, 9. март 2008. год.

10—11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. Од папира је изрезан троугао чији је један угао α. Затим је тај троугао разрезан на неколико троуглова. Може ли се догодити да сви углови свих добијених троуглова буду мањи од

а) (3 поена) у случају када је $\alpha = 70^0$;

б) (3 поена) у случају када је $\alpha = 80^0$?

2. (6 поена) На бројевној правој у тачки P налази се "тачкасти" скакавац. Тачке 0 и 1 су клопке (замке). При сваком свом "потезу" ми изговарамо неки позитиван број, после чега скакавац скаче лево или десно (по свом избору) на растојање које је једнако том броју. За која P можемо изговарати бројеве, тако да гарантовано можемо сатерати скакавца у једну од клопки? (Ми све време видимо где се налази скакавац.)

3. (6 поена) Полином степена $n>1$ има n различитих корена (нула) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Његов први извод има корене $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$. Докажите неједнакост

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

4. (7 поена) Пеђа и Васа нацртали су по један конвексан четвороугао без паралелних страница. Сваки од њих је у свом четвороуглу повукао по једну дијагоналу и одредио углове које та дијагонала образује са страницама његовог четвороугла. Пеђа је добио бројеве α, α, β и γ. (у неком поретку), а Васа исте те вредности (могуће и у неком другом поретку). Докажите да се дијагонале Пеђиног четвороугла секу под истим углом као и дијагонале Васиног четвороугла.

5. (8 поена) Сви природни бројеви написани су у неком поретку (сваки број по једном). Може ли се обавезно наћи неколико бројева (више од једног), који су написани редом један за другим (почев од неког места), а чији је збир прост број?

6. (8 поена) Једанаесторици мудраца завезали су очи и свакоме су ставили на главу капу која је обојена једном од 1000 боја. После тога су им одвезали очи и сваки је видео све капе осим своје. Затим истовремено сваки показује осталима једну од две картице - белу или црну. А после тога, сви треба истовремено да кажу боју своје капе. Да ли је то могуће? Мудраци се могу унапред (пре него што су им завезали очи) договарати како да поступају. Мудрацима је познато у којих 1000 боја могу бити капе.

7. (8 поена) Дате су две кружнице и три праве. Свака права на кружницама исеца тетиве исте дужине. Пресечне тачке правих граде троугао. Докажите да кружница описана око тог троугла пролази кроз средиште дужи која спаја средишта датих кружница.

29-й Международный математический Турнир городов

2007/08 учебный год

Решения задач

Осенний тур

Тренировочный вариант, младшие классы

1.1. [3] Какое наибольшее число белых и черных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на любой горизонтали и на любой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем черных?

Ответ. 48 фишек.

Решение. Число фишек на каждой вертикали кратно 3, значит, их не больше 6, а на всей доске – не более 48. Пример расстановки 48 фишек: 32 белые фишки ставим на белые поля, а 16 черных – вдоль главной «черной» диагонали и вдоль двух параллельных диагоналей «длины» 4.

1.2. [4] На бумажке записаны 1 и некоторое нецелое число x. За один ход разрешается записать на бумажку сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Можно ли за несколько ходов получить на бумажке число x^2?

Решение. Можно. Например, так (числа записаны в порядке их появления):

$$\frac{1}{x},\ x+1,\ \frac{1}{x+1},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x},\ x^2+x,\ (x^2+x)-x=x^2.$$

1.3. [4] Середина одной из сторон треугольника и основания высот, опущенных на две другие стороны, образуют равносторонний треугольник. Верно ли, что исходный треугольник тоже равносторонний?

Ответ: неверно.

Первое решение. Рассмотрим произвольный остроугольный треугольник ABC, где $\angle B = 60°$. Пусть AH и CK – высоты, M – середина AC. В прямоугольных треугольниках AHC и AKC медианы HM и KM равны половине гипотенузы, поэтому треугольники CMH *и* AMK *равнобедренные*. Угол AMH – внешний угол треугольника CMH, и значит равен $2\angle C$, а угол CMK – внешний угол треугольника AMK, и значит равен $2\angle A$, откуда

$$\angle HMK = \angle AMH + \angle CMK - 180° = 2(\angle A + \angle C) - 180° = 2\cdot 120° - 180° = 60°.$$

Второе решение. На полуокружности с диаметром AC и центром M отметим точки K и H так, чтобы дуга KH составляла 60°и прямые AK и CH пересекались вне полукруга. Пусть B – точка пересечения этих прямых. Тогда K и H – основания высот треугольника ABC (лежащие на его сторонах), треугольник KMH равносторонний, а треугольник ABC – нет (если прямая KH не параллельна AC).

1.4. [5] В таблицу 29×29 вписали числа 1, 2, 3, ..., 29, каждое по 29 раз. Оказалось, что сумма чисел над главной диагональю в три раза больше суммы чисел под этой диагональю. Найдите число, вписанное в центральную клетку таблицы.

Ответ. 15.

Решение. Над (под) диагональю находится 29·14=406 чисел. Но сумма 406 наибольших чисел таблицы (16, …, 29, взятые по 29 раз) равна 29·(16+29)·14/2=29·45·14/2 ровно в три раза больше суммы 406 наименьших чисел (1, 2, …, 14, взятые по 29 раз), которая равна 29·(1+14)·14/2=29·15·14/2. Поэтому все числа на диагонали равны 15.

1.5. [5] Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю 5 карточек с номерами от 1 до 5. Зритель прячет две карточки, а три отдает ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?

Решение. Занумеруем вершины правильного пятиугольника числами от 1 до 5. *Отрезками* назовем его стороны и диагонали. Пара карточек, спрятанных зрителем, соответствует одному из отрезков. Среди трех карточек у ассистента есть пара, соответствующая параллельному отрезку. Ее он и называет фокуснику.

Тренировочный вариант, старшие классы

2.1.[1] [3] На экране компьютера стоят в ряд 200 человек. На самом деле эта картинка составлена из 100 фрагментов, на каждом – пара: взрослый и ребенок пониже ростом. Разрешается в каждом из фрагментов изменить масштаб, уменьшив при этом одновременно рост взрослого и ребенка в одинаковое целое число раз (масштабы разных фрагментов можно менять независимо друг от друга). Докажите, что можно добиться, чтобы на общей картинке все взрослые были выше всех детей. [3 балла]

Решение. Для каждого фрагмента зафиксируем рациональное число, большее роста ребенка, но меньшее роста взрослого. Представим эти числа в виде обыкновенных дробей и приведем их все к общему знаменателю. Теперь уменьшим размеры каждого фрагмента в число раз, равное числителю соответствующей ей дроби.

2.2. На бумажке записаны три положительных числа x, y и 1. За один ход разрешается записать на бумажку сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Можно ли за несколько ходов получить на бумажке

а) [2] число x^2? **б**) [2] число xy?

Решение. **а**) См. 1.2.

б) Разделим одно из чисел на 2: $\frac{1}{y}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y}, \frac{y}{2}$. Далее, умея возводить в квадрат, за несколько шагов получим число $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = xy$.

Или так: получаем число $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$, а затем два раза делим его пополам.

2.3. [4] Дана прямая и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой на равном расстоянии от нее. Как с помощью циркуля и линейки найти на прямой такую точку C, что произведение $AC \cdot BC$ будет наименьшим?

Решение. Площадь треугольника ACB не зависит от C: основание AB и опущенная на него высота постоянны. С другой стороны, эта площадь равна $^1/_2\ AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB$. Поэтому наименьшему произведению $AC \cdot BC$ соответствует наибольший синус угла ACB.

---

[1] Участникам задача давалась в такой формулировке:

Есть сто картинок, на каждой изображены взрослый и ребенок ростом поменьше (все двести человек на картинках разные). Из них надо собрать одну большую картину. Разрешается перед этим изменить масштаб каждой картинки, уменьшив ее размеры в целое число раз (масштабы разных картинок можно менять независимо друг от друга). Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине все взрослые были выше всех детей.

Построим окружность с диаметром AB. Если она пересекает нашу прямую l в двух точках P и Q, то эти точки – искомые ($\sin \angle APB = \sin \angle AQB = 1$). В противном случае искомая точка C – пересечение l с серединным перпендикуляром к отрезку AB (из этой точки отрезок AB виден под наибольшим нетупым углом, поскольку остальные точки прямой лежат вне проходящей через точки A, B и C окружности).

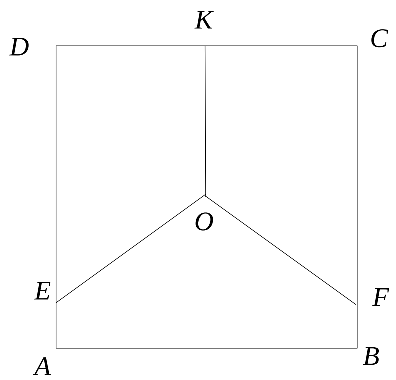
2.4. [4] Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю 29 карточек с номерами от 1 до 29. Зритель прячет две карточки, а остальные отдает ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?

Решение. Расположим мысленно карточки по кругу. Тогда если зритель загадал две не соседние карточки A и B, ассистент указывает на карточку, идущую следом за А и на карточку, идущую следом за B (по часовой стрелке). Если же зритель загадал две соседние карточки, ассистент указывает на следующие две соседние карточки (по часовой стрелке).

2.5. Квадрат со стороной 1 см разрезан на три выпуклых многоугольника. Может ли случиться, что диаметр каждого из них не превосходит

а) [1] 1 см; **б**) [2] 1,01 см; **в**) [2] 1,001 см?

а) Нет. В один многоугольник попадут две вершины квадрата, скажем А и В. Остальные точки отрезка AD удалены от B на расстояние больше 1, поэтому они находятся вне этого многоугольника, следовательно, A лежит на границе двух многоугольников (первого и второго). Аналогично B лежит на границе первого и третьего многоугольников (B не может принадлежать второму). Но тогда середина K стороны CD не может принадлежать ни одному из многоугольников. Противоречие.



б) Да. См. рис.: O – центр квадрата $ABCD$, K – середина стороны CD, $AE = BF = 0{,}14$.

$AF = \sqrt{1+0{,}14^2} < 1{,}01$, $EK = \sqrt{0{,}5^2+0{,}86^2} < 1$.

в) Нет. Предположим нам удалось разрезать квадрат на три многоугольника M_1, M_2, M_3 нужных диаметров. Пусть вершины A и B принадлежат M_1. Отложим на стороне AD отрезок $AG = 0{,}05$, а на стороне BC – отрезок $BH = 0{,}1$. Точки G и H не могут принадлежать M_1, поскольку $AH > BG = \sqrt{1+0{,}05^2} > 1{,}001$. Пусть G принадлежит многоугольнику M_2. Тогда H принадлежит M_3 ($HG = BG > 1{,}001$). Тогда середина K стороны CD не может принадлежать ни одному из многоугольников: $AK > GK > HK = \sqrt{0{,}9^2+0{,}5^2} = \sqrt{1{,}06} > 1{,}001$. Противоречие.

Авторское решение задачи:

Ответ: а, в – невозможно, б – возможно.

Для начала заметим, что если бы частей было не 3, а 4, то не представляло бы труда разрезать квадрат на части диаметром $d < 0{,}75$. Поскольку частей только 3, какие-то две вершины лежат в одном многоугольнике, и его диаметр не меньше 1.

Улучшаема ли эта оценка? Если даже «совсем грубо» разрезать квадрат на три равных прямоугольника размеров 1x(1/3), то диаметр d каждой части будет меньше 1,1 ($d = (1+1/9)^{1/2} < 1+1/18) < 1{,}1$). Здесь и далее мы пользуемся неравенством $(1+x)^{1/2} < 1 + x/2$.

Разбивать на прямоугольники диаметром меньше 1,01 надо немного аккуратнее. Разрежем квадрат, как оконную раму: сверху отрежем «форточку» ширины a, а оставшуюся часть разрежем пополам. Получены три прямоугольника: один размером 1xa, и два размером ½x(1-a). Предположим, что их диаметры равны (интуитивно понятно, что этот вариант

наилучший; доказать это нетрудно, но нам в этом нет нужды). Тогда $1+a^2 = (½)^2+(1-a)^2$, откуда a=1/8, и $d^2 = [1+(1/8)^2] = [(½)^2+(7/8)^2] = 65/64$, $d = (1+1/64)^2 < 1+1/128 < 1{,}01$.
Остается доказать, что диаметр одного из многоугольников больше 1,001 (п. в, из которого, конечно, следует п. а). Пусть A(0,0), B(0,1), C(1,1), D (1,0) – вершины квадрата, и пусть вершины A, B лежат в первой части разбиения. Рассмотрим точки E (0, 1/20), F(1/10, 0) и G (1, ½). Легко видеть, что расстояние между любыми из этих точек больше 1,001. Если диаметр каждой части не больше 1,001, то они лежат в разных частях, т.е. одна из них также лежит в первой части. Но расстояние от этой точки либо до A, либо до B опять-таки больше 1,001.

Основной вариант, младшие классы

3.1. [5] На стороне CD ромба $ABCD$ нашлась такая точка K, что $AD = BK$. Пусть F – точка пересечения диагонали BD и серединного перпендикуляра к стороне BC. Докажите, что точки A, F и K лежат на одной прямой.

$ABKD$ – равнобедренная трапеция. Точка G пересечения ее диагоналей лежит на серединном перпендикуляре к основанию AB. В силу симметрии ромба $ABCD$ относительно диагонали BD, G лежит также на серединном перпендикуляре к BC, то есть совпадает с точкой F.

3.2. **а**) [3] Петя и Вася задумали по три натуральных числа. Петя для каждых двух своих чисел написал на доске их наибольший общий делитель. Вася для каждых двух из своих чисел написал на доске их наименьшее общее кратное. Оказалось, что Петя написал на доске те же числа, что и Вася (возможно в другом порядке). Докажите, что все написанные на доске числа равны.

б) [3] Останется ли верным утверждение предыдущей задачи, если Петя и Вася изначально задумали по четыре натуральных числа?

а) **Первое решение**. Выберем какой-нибудь простой делитель p задуманных Васей чисел. Пусть он входит в разложение этих чисел на простые множители в степенях a, b и c, где $a \le b \le c$. Тогда в разложение выписанных Васей наименьших общих кратных p будет входить в степенях b, c и c, то есть две *наибольшие* степени совпадают. Аналогично можно проверить, что среди выписанных Петей наибольших общих делителей совпадают две *наименьшие* степени p. Значит, совпадают *все* степени p в выписанных числах. Поскольку это верно для любого простого делителя, то сопадают все разложения на простые множители, а, значит, и все выписанные числа.

Второе решение. Пусть Петя и Вася *написали* числа a, b и c. *Попарные* наибольшие общие делители этих чисел равны: это наибольший общий делитель d трех чисел, задуманных Петей. С другой стороны, каждый такой попарный делитель делится на одно из чисел, задуманных Васей. Значит, d делится и на наименьшее общее кратное задуманных Васей чисел, которое равно НОК(a, b, c). Следовательно,
НОК(a, b, c) = НОД(a, b, c), то есть $a = b = c$.

Замечание. Задуманные числа совпадать не обязаны, например у Васи задуманы 2, 3 и 6, а у Пети – 6, 12 и 18.

б) Нет, не останется. Например, если Петя задумал числа 6, 10, 15, 30, а Вася – числа 1, 2, 3, 5, то оба выпишут наборы 2, 3, 5, 6, 10, 15. (Таких примеров сколько угодно: если Вася задумает четыре взаимно простых числа a,b,c,d, а Петя – их произведения по три штуки, то есть числа abc, abd, acd, bcd, то в итоге оба напишут наборы ab,ac,ad,bc,bd.)

3.3. [6] Миша стоит в центре круглой лужайке радиуса 100 метров. Каждую минуту он делает шаг длиной 1 метр. Перед каждым шагом он объявляет направление, в котором хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы в какой-то момент обязательно выйти с лужайки, или Катя всегда сможет ему помешать?

Ответ. Может.

Решение. Начиная со второго шага Миша каждый раз может выбирать направление, перпендикулярное отрезку, соединяющее точку, где он находится, с центром O лужайки. Пусть Миша шагнул из точки A, где $OA = \sqrt{a}$, в точку B. По теореме Пифагора $OB = \sqrt{a+1}$. Действуя так, после n-го шага Миша будет находиться на расстоянии ровно $\sqrt{n}$ м от центра. Сделав 10001 шаг, Миша выйдет за пределы лужайки.

3.4. [7] Дана клетчатая полоса $1\times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выиграть (как бы ни играл его соперник)?

Решение. При $N = 1$ выигрывает первый, в остальных случаях – второй. Его стратегия: первый ход сделать в крайнюю клетку, а дальше ходить как угодно. После k-го хода первого крестики делят полоску не менее чем на k частей, состоящих из пустых клеток и ноликов. Но к этому моменту выставлено лишь k–1 ноликов, значит, в одной из частей нолика нет, и туда можно сходить.

3.5. [8] Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что набор масс и набор надписей одинаковы, но возможно некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закрепленный за середину. При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольные точки отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет? (Весы будут в равновесии, если сумма моментов гирь справа от середины равна сумме моментов гирь слева; иначе отклонятся в сторону, где сумма больше. Моментом гири называется произведение ms массы гири m на расстояние s он нее до середины).

Ответ. Всегда.

Решение. Мы будем использовать *транснеравенство*: если $A_1<\ldots<A_n$ и $B_1\le\ldots\le B_n$, и $C_1,\ldots,C_n$. – любая перестановка чисел $B_1, \ldots,B_n$, то $A_1 C_1+\ldots+A_n C_n\le A_1 B_1+\ldots+A_n B_n$, причем равенство достигается только в случае $C_1=B_1,\ldots,C_n=B_n$.

Отложим самую легкую гирю m. Остальные гири прикрепим слева от середины в разных точках, но чем больше масса, тем дальше от центра. Подсчитаем, в какую точку справа надо повесить гирю m, чтобы было равновесие (эта точка не выйдет за пределы отрезка, если гири слева прикреплять достаточно близко к его середине). Покажем, что если надписи перепутаны, то равновесия нет. Действительно, если перепутаны только массы слева, то суммарный момент слева стал меньше по *транснеравенству*. Если дополнительно поменять местами массу m с другой массой слева, то момент справа станет больше, а слева еще меньше.

Замечание. Можно обойтись и без транснеравенства. Подвесим гири $m_2, \ldots, m_n$ слева на расстояниях $am_2, \ldots, am_n$ от центра (константа a выбирается так, чтобы точка $a\dfrac{m_2^2+\ldots+m_n^2}{m}$ подвеса гири m не вышла за пределы отрезка). Пусть $M_2, \ldots, M_n$ – перестановка гирь $m_2, \ldots, m_n$. В силу неравенств $2m_iM_i \le m_i^2+M_i^2$ новый момент

$a(m_2M_2 + \ldots + m_nM_n)$ не превосходит старый $a(m_1^2 + \ldots + m_n^2)$, причем равенство будет только, когда $m_i = M_i$ при всех i.

Замечания для знатоков. **1**. Фактически в предыдущем замечании доказан частный случай неравенства Коши-Буняковского.

2. Вместо транснеравенства или неравенства Коши-Буняковского можно использовать неравенство Чебышева.

3. Можно обойтись вообще без неравенств. Нам надо показать, что существует решение уравнения $m_1x_1 + \ldots + m_nx_n = 0$ (*), не являющееся решением ни одного из уравнений вида $M_1x_1 + \ldots + M_nx_n = 0$ (*), полученных нетривиальными перестановками коэффициентов. Но пространство решений уравнения (*) (n–1)-мерно, а пространство решений системы (*), (**) (n–2)-мерно. Поскольку (n–1)-мерное пространство нельзя покрыть конечным числом (n–2)-мерных подпространств, искомое решение существует.

3.6. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие – орлом вверх, а какие – решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое целое число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.

а) [4] Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способ, позволяющий фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = k$, то есть способ и для $N = 2k$.

б) [5] Найдите все значения N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ.

Ответ. б) $N = 2^m$.

Решение. а) Мысленно расположив монеты в клетках доски $2\times k$, фокусник пишет под каждым столбцом из двух клеток О, если монеты там лежат одной стороной вверх, и Р – если разными сторонами. Эта комбинация сообщает ему число n от 1 до k. Если в верхней строке четное число решек, он называет n, иначе $n + k$.

Пусть зритель назвал число m. Чтобы сообщить его, ассистент тоже мысленно пишет строку из O и P по тому же правилу. Он может изменить одну из букв, чтобы получить код, соответствующий числу m (при $m \le k$) или $m - k$ (при $m > k$). Для этого ему достаточно перевернуть любую из монет в соответствующем столбце. Выбором верхней или нижней монеты он обеспечивает нужную четность числа решек в верхней строке.

б) Первое решение. При $N = 1$ «способ» очевиден. Из (а) следует, что последовательно удваивая, получим способы для каждого N вида 2^m.

Пусть для какого-то N есть способ угадывания. Для угадывания те комбинации орлов и решек, которые ассистент в принципе может «выдать» фокуснику, должны быть разбиты на N групп: когда фокусник видит комбинацию из i-й группы, он называет число i.

Предположим, что 2^N не делится на N. Так как всего комбинаций 2^N, то в одной из групп (пусть j-й) находится $d < \frac{2^N}{N}$ комбинаций. Каждая комбинация j-й группы может быть получена изменением одного знака ровно из N других комбинаций. Но так как $dN < 2^N$, то найдется исходная комбинация, из которой ассистент не может получить ни одну из комбинаций j-й группы. Значит, если зритель построит эту комбинацию, ассистент не сможет сообщить фокуснику, что загадано число j. Противоречие.

Следовательно, 2^N кратно N, то есть N – степень двойки.

б) Второе решение. Комбинаций из N монет всего 2^N. Допустим, способ у ассистента и фокусника есть. Рассмотрим какую-нибудь одну комбинацию (она может попасться ассистенту). Изменяя в ней положение ровно одной монеты, можно получить ровно N других комбинаций. Каждая из N этих комбинаций должна обозначать для фокусника свое число от 1 до N (так как есть N вариантов для загаданного числа). Припишем этим комбинациям номера, которые они обозначают. Таким образом можно *каждой* из 2^N

комбинаций приписать число, которое она обозначает для фокусника (так как каждая комбинация может получить из некой другой описанным выше способом).

Посчитаем, скольким комбинациям приписано число 1. Всего комбинаций 2^N, из каждой можно получить ровно одну комбинацию, которой приписана 1. Всего получаем 2^N комбинаций, которым приписана 1, но при этом каждую такую комбинацию мы посчитали N раз (поскольку каждую комбинацию можно получить ровно из N других). Значит 1 приписана $2^N/N$ комбинациям. Это число должно быть целым, что возможно только если N является степенью двойки. Для степени двойки способ следует из пункта а) (так как для N=1 способ очевиден).

3.7. [9] Володя решил стать великим писателем. Для этого он каждой букве русского языка сопоставил слово, содержащее эту букву. Потом написал слово, сопоставленное букве “А”. Дальше каждую букву в нем заменил на сопоставленное ей слово (разделяя слова пробелами), потом в получившемся тексте вновь заменил каждую букву на сопоставленное ей слово, и так всего 40 раз. Володин текст начинается так: “Ряд кораблей на дремлющих морях”. Докажите, что этот оборот встречается в Володином тексте еще хотя бы раз.

Первое решение. Обозначим через T_k текст после k шагов. Заметим, что ни в одном тексте до T_{40} первая буква не могла на следующем шаге перейти в однобуквенное слово (иначе в дальнейшем первое слово всегда бы оставалось однобуквенным). Значит, каждый раз текст удлинялся хотя бы на одну букву.

Кроме того, в слове T_1 буква А стоит не на первом месте (иначе во всех текстах первое слово начиналось бы на А).

Поскольку в T_1 есть буква А, причем не в начале, то в T_2 входит (также не с начала) полученный из этой буквы А текст T_1. Аналогично, в T_3 входит T_2, полученный из входящего в T_2 текста T_1. Но тогда в T_3 входит и T_1. Продолжая, видим, что в каждом тексте содержатся (не с начала) все предыдущие тексты.

Выпишем первые буквы всех текстов (напомним, что исходная буква А – еще не текст). В русском алфавите 33 буквы, поэтому уже среди первых 34 букв будет повторение. Пусть первое повторение – буква L на k-м месте, где $k \leq 34$. Тогда в T_k буква L стоит на первом месте и еще раз в том входящем в T_k тексте, где L впервые встретилась. От T_k до T_{39} не менее 5 замен, и из первой L в T_{39} получатся минимум 6 первых букв, а в T_{40} – не менее чем 6 первых слов. Значит, в T_{40} из первой L получится текст, начинающийся словами “Ряд кораблей на дремлющих морях”. Но такой же текст получится из второго вхождения L в T_k.

Второе решение. Как показано выше, первая буква любого текста «порождает», как минимум двухбуквенное слово. Поэтому первая буква L текста T_{35} «порождает» минимум 5 первых букв в тексте T_{39}, а в тексте T_{40} – первые 5 слов, то есть весь данный в условии фрагмент. Поскольку буква L на первом месте встречалась и раньше, то некоторый текст T_k (k < 40) также начинался со слов РЯД КОРАБЛЕЙ НА ДРЕМЛЮЩИХ МОРЯХ. Первые две буквы РЯ этого текста порождают в тексте T_{40} весь указанный фрагмент (поскольку буква Я содержится только в последнем его слове). Но T_k содержит и еще один фрагмент РЯ (в слове МОРЯХ), который и порождает в T_{40} второе вхождение нашего фрагмента.

Основной вариант, старшие классы

4.1. [2+2] См. **3.2**.

4.2. [6] Диагонали вписанного четырехугольника пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N – середины (по порядку) сторон четырехугольника. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников PKL, PLM, PMN и PNK равны.

Решение. Пусть K, L, M, N – середины соответственно сторон AB, BC, CD, AD четырехугольника $ABCD$. Треугольники BAP и CDP подобны по двум углам, поэтому подобны и их "половинки" KAP и MDP. Следовательно, $\angle APK = \angle DPM$.

$KL \parallel AC$, $ML \parallel BD$ (как средние линии треугольников ABC и BCD), значит, $\angle LKP = \angle APK = \angle DPM = \angle LMP$.

Итак, углы LKP и LMP, опирающиеся на отрезок LP, равны. Значит, равны и радиусы описанных окружностей треугольников PKL и PLM. Остальные равенства доказываются аналогично.

4.3. [6] Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых равна 1, и каждый член имеет вид $\frac{1}{k}$, где k – натуральное.

Решение. Домножив на НОК знаменателей, получим возрастающую арифметическую прогрессию $\{a_i\}$ из n натуральных чисел, сумма S которой делится на каждый член. Члены этой прогрессии, очевидно, не имеют общего делителя, значит, ее разность d взаимно проста с каждым членом. Разберем два случая.

1) $n = 2m$. Тогда $S = \frac{n(a_m + a_{m+1})}{2} = na_{m+1} - md$, откуда md, а поэтому и m кратно a_{m+1}. Но это невозможно, так как $a_{m+1} > m$.

2) $n = 2m+1$. Тогда $S = n\,a_{m+1} = na_m + nd$, откуда $n = 2m+1$ кратно a_m Но поскольку $a_m \geq m$ это возможно только при $a_m = m$ и $m = 1$. Отсюда единственный ответ: $^1/_6$, $^1/_3$, $^1/_2$.

4.4. [6] См. 3.5.

4.5. [4+4] Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие – орлом вверх, а какие – решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое целое число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.

а) [4] Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способы, позволяющие фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = a$ и для $N = b$, то есть способ и для $N = ab$.

б) [4] Найдите все значения N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ.

Решение. а) Фокусник и ассистент заранее каждому целому числу от 1 до ab сопоставляют пару целых чисел (i,j), где $1 \leq i \leq a$ и $1 \leq j \leq b$, таким образом: записывают целые числа от 1 до ab в табличку $a\times b$ и числу, стоящему на пересечении i-й строки и j-го столбца, сопоставляют пару (i,j). Теперь, чтобы восстановить число, фокуснику достаточно угадать пару чисел (i,j), которая сопоставлена этому числу.

Действия фокусника: мысленно расположив монеты в виде прямоугольника $a\times b$, фокусник пишет справа от горизонтального ряда монет О, если в нём четное число орлов, и Р – в противном случае. Так он получает комбинацию из a орлов и решек. По тому же правилу он пишет О или Р под каждым вертикальным рядом монет, получая комбинацию из b орлов и решек. Эта пара комбинаций и сообщает ему пару чисел: i от 1 до a, и j от 1 до b. Заглянув в таблицу $a\times b$, заполненную числами от 1 до ab, фокусник называет число на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Действия ассистента: он тоже мысленно выписывает две комбинации орлов и решек по тем же правилам. Пусть названное зрителем число находится в табличке с числами на пересечении i-й строки и j-го столбца. Чтобы сообщить i по способу для a монет, ассистенту надо изменить k-ю позицию в комбинации справа от прямоугольника. Аналогично, для сообщения j ему надо изменить l-ю позицию в комбинации под прямоугольником. Тогда он просто переворачивает монету на пересечении k-го горизонтального ряда и l-го вертикального ряда в прямоугольнике.

б) При N =1 все ясно, при N=2 способ такой: числу 1 соответствует орел, а числу 2 – решка на левой монете. По пункту (а), взяв a=b=2, получим способ для N=4. Последовательно удваивая, получим способы для каждого N вида 2^m. Доказательство того, что при других значениях N способов нет, смотрите в решении задачи **3.6 б)**.

4.6. [8] На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника P и Q. Для любой стороны многоугольника P многоугольник Q можно зажать между двумя прямыми, параллельными этой стороне. Обозначим через h расстояние между этими прямыми, а через l – длину стороны, и вычислим произведение lh. Просуммировав такие произведения по всем сторонам P, получим некоторую величину (P, Q). Докажите, что (P, Q) = (Q, P).

Решение. Докажем, что $(P, Q) = {}^1/_2 \sum a_i b_j \sin \varphi_{ij} = (Q, P)$, где a_i – стороны P, b_j – стороны Q, φ_{ij} – угол между a_i и b_j.

Зафиксируем некоторую сторону a_i, зажмем многоугольник Q между прямыми, параллельными a_i, и выберем две вершины C и D, *лежащие на этих двух прямых. Контур Q разбивается на две ломаных с концами* C и D. Ввиду выпуклости проекция такой ломаной на перпендикулярную a_i прямую m складывается из проекций звеньев ломаной. Значит, проекция многоугольника Q на m покрывается проекциями его сторон ровно два раза, то есть сумма длин проекций сторон равна удвоенному расстоянию h_i между зажимающими Q прямыми. Длина проекции b_i на m равна $b_i\cos(90^\circ-\varphi_{ij})=b_i \sin\varphi_{ij}$, значит, $2h_i = \sum_j b_j \sin\varphi_{ij}$, а $a_i h_i = \frac{1}{2}\sum_j a_i b_j \sin\varphi_{ij}$. Складывая такие суммы по всем i, получим нужную формулу.

4.7. Перед Алешей 100 закрытых коробочек, в каждой – либо красный, либо синий кубик. У Алеши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету в данный момент). Коробочка открывается, и Алешин счет увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все все коробочки. Какую наибольшую сумму на счету может гарантировать себе Алеша, если ему известно, что

а) [3] синий кубик только один;

б) [5] синих кубиков ровно n.

(Алеша может поставить и 0, то есть просто бесплатно открыть коробочку и увидеть цвет кубика.)

Ответ. **а)** $\frac{2^{100}}{100}$. **б)** $\frac{2^{100}}{C_{100}^{n}}$

Первое решение. б) Рассмотрим общую ситуацию: Алеша знает, что есть m красных и n синих кубиков в $m + n = K$ коробочках. Попросим его в таком случае поставить $\frac{|n-m|}{K}$-ю часть своего капитала на тот цвет, которого больше (в частности, при $m = n$ Алеша ничего не ставит). Докажем индукцией по K, что действуя так, Алеша увеличит свой капитал в $\frac{2^K}{C_K^n}$ раз.

Когда коробочка всего одна, утверждение очевидно: мы увеличиваем капитал в два раза. Пусть теперь утверждение верно для K-1 коробочек, докажем его для K коробочек.

Пусть для определенности $m \le n$. Если открыт синий кубик, то на этом шаге Алеша увеличил капитал в $1+\frac{n-m}{K}=\frac{2n}{K}$ раз, остались n–1 синий кубик и K – 1 коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\frac{2^{K-1}}{C_{K-1}^{n-1}}$ раз. Перемножая эти числа и учитывая, что $C_{K-1}^{n-1}\cdot\frac{K}{n}=C_K^n$, получим требуемое $\frac{2^K}{C_K^n}$. Если открыт красный кубик, капитал уменьшился, умножившись на $1-\frac{n-m}{K}=\frac{2m}{K}$, и остались n синих кубиков и K – 1 коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\frac{2^{K-1}}{C_{K-1}^n}$ раз. Перемножая, учтем, что $C_{K-1}^n\cdot\frac{K}{m}=C_{K-1}^{m-1}\frac{K}{m}=C_K^m=C_K^n$, и снова получим требуемое.

Покажем теперь индукцией по K, что в большее число раз Алеша капитал увеличить не может. Для случая одной коробочки это очевидно. Если коробочек несколько, и Алеша поставит на синий цвет долю, большую указанной в алгоритме, то, при выпадении красного, он получит меньше, чем по алгоритму. А если он поставит долю меньше, чем по алгоритму (в том числе отрицательную, если ставит на красный), он получит меньше, чем по алгоритму при выпадении синего.

Второе решение. **а**) Обозначим через B_m наибольший «выигрыш» Алеши для случая m коробочек. Очевидно, $B_1 = 2$.

Если $m > 1$, Алеша делает ставку на цвет первой коробочки. Заметим, что поставить x на красный цвет, это то же самое, что поставить $–x$ на синий. Поэтому можно считать, что Алеша всегда ставит на синий цвет, а $x \in [–1, 1]$.

Если в первой коробочке окажется синий шарик, капитал Алеши станет равным $1 + x$, а в конце игры он (ставя все свои деньги на заведомо известный цвет) может его довести до $(1 + x)2^{m–1}$. Если же в первой коробочке красный шарик, то выигрыш Алеши равен $(1 – x)B_{m–1}$. Итак, $B_m = \max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$, где $f(x) = \min\{(1 + x)2^{m–1}, (1 – x)B_{m–1}\}$. Нарисовав график, видим, что f достигает максимума в той точке x_0, где $(1 + x_0)2^{m–1} = (1 – x_0)B_{m–1}$. Таким образом, $B_m = (1 + x_0)2^{m–1} = (1 – x_0)B_{m–1}$.

Положив $B_m = \frac{2^m}{P_m}$, получим $(1 + x_0)P_m = 2$, $(1 – x_0)P_m = 2P_{m–1}$. Сложив последние равенства, имеем $P_m = 1 + P_{m–1}$. Отсюда (поскольку $P_1 = 1$) $P_m = m$.

б) Обозначим через $B_{m,n} = \frac{2^m}{P_{m,n}}$ наибольший «выигрыш» Алеши для случая m коробочек и n синих шариков. Очевидно, $B_{1,0} = B_{1,1} = 2$, $B_{m,0} = 2^m$, т.е. $P_{1,0} = P_{1,1} = P_{m,0} = 1$.

Рассуждая аналогично **а**), приходим сначала к системе

$$B_{m,n} = (1 + x_0)B_{m–1,n–1} = (1 – x_0)B_{m–1,n},$$

а потом – к соотношению $P_{m,n} = P_{m–1,n–1} + P_{m–1,n}$.

Это соотношение, очевидно, позволяет однозначно восстановить по указанным выше начальным условиям. Но и им и соотношению, как известно, удовлетворяют биномиальные коэффициенты C_m^n. Следовательно, $P_{m,n} = C_m^n$.

29-й Международный математический Турнир городов

2007-08 учебный год, Весенний тур

Решения задач

Леонид Медников, Александр Шаповалов

Базовый вариант, 8-9 классы.

5.1. [3] В выпуклом шестиугольнике ABCDEF противоположные стороны попарно параллельны (AB || DE, BC || EF и CD || FA), а также AB = DE. Докажите, что BC = EF и CD = FA.

Решение. Ясно, что ABDE - параллелограмм. угол CBD = углу FEA, а угол BDC = углу EAF как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, треугольники BCD и EFA равны по стороне и двум углам.

5.2. [5] На плоскости нарисовали 10 равных отрезков и отметили все их точки пересечения. Оказалось, что каждая точка пересечения делит любой проходящий через нее отрезок в отношении 3:4. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

Решение. 10. На каждом отрезке расположено не более двух отмеченных точек. С другой стороны, каждая отмеченная точка принадлежит двум отрезкам. Поэтому точек не больше 10. Пример с 10 точками дается следующей картинкой:

Пара параллельных отрезков пересекается с парой параллельных отрезков. Это дает 4 отмеченных точки. Еще тройка отрезков пересекается по трем точкам и еще одна тройка пересекается по трем точкам. Это дает еще 6 отмеченных точек.

5.3. [5] Есть тридцать карточек, на каждой написано по числу: на десяти карточках - a, на десяти других - b, и на десяти оставшихся - c (числа a, b, c все разные). Известно, что к любым пяти карточкам можно подобрать еще пять так, что сумма чисел на этих десяти карточках будет равна нулю. Докажите, что одно из чисел a, b, c равно нулю.

Решение. Пусть $a < b < c$. Отметим на числовой оси всевозможные суммы чисел на пяти карточках. Для каждой из них отмечена и противоположная, поэтому отмеченные точки расположены симметрично относительно 0. В частности, противоположны наибольшая (5c) и наименьшая (5a) суммы, значит, $5a + 5c = 0$, то есть $c = -a$. Противоположны и суммы, ближайшие к "крайним", то есть $(4a + b) + (4c + b) = 0$. Отсюда сразу следует, что $b = 0$.

5.4. [6] Найдите все натуральные n, при которых $(n + 1)!$ делится на сумму $1! + ... + n!$.

Ответ. n = 1, 2.

Решение. Пусть $n > 2$ и $(n + 1)! = k(1! + ... + n!)$. Заметим, что $k < n$ (так как $n(1! + ... + n!) > n((n - 1)! + n!) = n(n - 1)! + n*n! = n! + n*n! = (n + 1)!$).

Разделив равенство на k, получим
(k - 1)!(k + 1)(k + 2)* ... *n = 1! + ... + n!.
Однако левая честь в этом равенстве четна (в произведении (n + 1)! было минимум два четных сомножителя, а мы сократили лишь один), а правая нечетна. Противоречие.

5.5. Клетки доски 10*10 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Любые две клетки с общей стороной раскрашены в разные цвета. Известно, что красных клеток 20.

а) [2] Докажите, что всегда можно вырезать 30 прямоугольников, каждый из которых состоит из двух клеток - белой и синей.

б) [2] Приведите пример раскраски, когда можно вырезать 40 таких прямоугольников.

в) [2] Приведите пример раскраски, когда нельзя вырезать больше 30 таких прямоугольников.

Решение.

а) Разрежем доску на 50 прямоугольников 1*2. Ровно 20 из них содержат красные клетки, а остальные 30 - бело-синие.

б) Расположим 40 сине-белых прямоугольников вертикально, как показано на схеме 1 (с - синий, б - белый), оставшиеся 20 клеток сделаем красными (к - красный):

```
| б | к | б | к | б | к | б | к | б | к |
|   |---|   |---|   |---|   |---|   |---|
| с | б | с | б | с | б | с | б | с | б |
|---|   |---|   |---|   |---|   |---|   |
| к | с | к | с | к | с | к | с | к | с |
-----------------------------------------
| с | б | с | б | с | б | с | б | с | б |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| б | с | б | с | б | с | б | с | б | с |
-----------------------------------------
| с | б | с | б | с | б | с | б | с | б |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| б | с | б | с | б | с | б | с | б | с |
-----------------------------------------
| к | б | к | б | к | б | к | б | к | б |
|---|   |---|   |---|   |---|   |---|   |
| б | с | б | с | б | с | б | с | б | с |
|   |---|   |---|   |---|   |---|   |---|
| с | к | с | к | с | к | с | к | с | к |
```

в) Окрасим 20 клеток в красный цвет, а также отметим 30 клеток, как на схеме 2. Каждый сине-белый прямоугольник должен содержать отмеченную клетку, следовательно их не больше 30.

```
| * |   | * |   | * |   | * |   | * |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | * |   | * |   | * |   | * |   | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * |   | * |   | * |   | * |   | * |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | * |   | * |   | * |   | * |   | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * |   | * |   | * |   | * |   | * |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | * |   | * |   | * |   | * |   | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| к |   | к |   | к |   | к |   | к |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | к |   | к |   | к |   | к |   | к |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| к |   | к |   | к |   | к |   | к |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | к |   | к |   | к |   | к |   | к |
```

Базовый вариант, 10-11 классы

6.1. [4] См. 5.3.

6.2. [5] Может ли наименьшее общее кратное целых чисел 1, 2, ... , n быть в 2008 раз больше, чем наименьшее общее кратное целых чисел 1, 2, ... , m?

Решение. Нет. Пусть $2^k \le m < 2^{k+1}$, $3^l \le m < 3^{l+1}$. Допустим, что $2008 = НОК(1,2,...,n)/НОК(1,2,...,m)$. 2008 делится на 8, поэтому $n \ge 2^{k+3}$. $2^{k+3} > 4m > 3m \ge 3^{l+1}$. Получается, что 2008 делится на 3, что неверно.

6.3. [5] В треугольнике ABC угол A прямой, M - середина BC, H - основание высоты, проведенной из вершины A. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно AC, вторично пересекает описанную окружность треугольника AMC в точке P. Докажите, что отрезок BP делит отрезок AH пополам.

Решение. MP - диаметр указанной окружности (он перпендикулярен хорде AC и делит ее пополам). Значит, угол BCP прямой, то есть PC || AH. Продолжим CP и BA до пересечения в точке N. MP - средняя линия треугольника BCN, то есть прямая BP делит сторону NC пополам. Следовательно, она делит пополам и сторону AH подобного треугольника BHA (гомотетичного треугольнику BCN с центром гомотетии B).

6.4. [5] Даны выпуклый многоугольник и квадрат. Известно, что как ни расположи две копии многоугольника внутри квадрата, найдется точка, принадлежащая обеим копиям. Докажите, что как ни расположи три копии многоугольника внутри квадрата, найдется точка, принадлежащая всем трем копиям.

Решение. Копия, расположенная внутри квадрата, содержит центр квадрата (иначе симметричная ей относительно этого центра копия также лежит внутри квадрата, а с этой копией не пересекается). Значит, каждая из трех копий, помещенных внутрь квадрата, содержит центр квадрата. Это и есть общая точка трех копий.

6.5. [6] Дана таблица (см. справа). Можно в ней переставлять строки, а также можно переставлять столбцы (в любом порядке). Сколько различных таблиц можно получить таким образом из данной таблицы?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

Ответ: 7!*6!.

Решение. Заметим, что числа во всех строках и всех столбцах различны. Кроме того, для любого клетчатого прямоугольника сумма чисел, стоящих в его противоположных углах, равна по модулю 7 сумме чисел, стоящих в двух других противоположных углах. При разрешенных перестановках эти свойства, очевидно, сохраняются. Поэтому итоговая таблица полностью определяется своими верхней строкой и левым столбцом.

С другой стороны, перестановками столбцов мы можем получить в верхней строке любую из 7! перестановок чисел от 1 до 7, а перестановками строк со 2-й по 7-ю - любую из 6! перестановок чисел в 6 нижних клетках левого столбца.

Сложный вариант, 8-9 классы

7.1. Число N является произведением двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что

а) [2] можно приписать к этому числу справа две цифры так, чтобы получился точный квадрат;

б) [2] если N > 12, это можно сделать единственным способом.

Решение. а) Припишем 25 к числу $N = n(n + 1)$. Получится число $100n(n + 1) + 25 = (10n + 5)^2$.

б) Если $N > 12$, то $n >= 4$.

Число X, полученное приписыванием двух цифр, должно удовлетворять неравенствам $100n(n+1) <= X < 100n(n+1)+100$. Покажем, что в этом интервале нет квадратов, кроме $100N + 25 = (10n + 5)^2$, именно покажем, что квадраты соседний слева и соседний справа выходят пределы этого допустимого интервала.

$100n^2 + 80n + 16 = (10n+4)^2$ есть квадрат, соседний слева.
$n >=4$, $20n >= 80$, следовательно $16 < 20n$,
отсюда $100n^2 + 80n + 16 < 100n^2 + 100n$,
получаем $(10n+4)^2 < 100n(n+1)$, то есть квадрат, соседний слева, лежит левее левого конца допустимого интервала.

$(10n + 6)^2$ есть квадрат, соседний справа. Докажем, что он Больше правого конца допустимого интервала.

$$n > 3.2;$$
$$20n > 64;$$
$$100n^2 + 120n + 36 > 100n^2 + 100n + 100;$$
$$(10n + 6)^2 > 100n(n+1)+100.$$

7.2. [5] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что KM || AC. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что AK = AO и KM = MC. Докажите, что AM = KB.

Решение. угол COM = углу AOK = углу AKO, угол KCM = углу CKM = углу ACK, поэтому угол AMC = 180^о - угол COM - угол KCM = 180^о - угол AKC - угол ACK = угол KAC = угол BKM. угол BMK = глу BCA. Следовательно, треугольники AMC и BKM равны по стороне (MC = KM) и двум прилежащим углам, и AM = BK.

7.3. [6] Дана клетчатая полоска (шириной в одну клетку), бесконечная в обе стороны. Две клетки полоски являются ловушками, между ними - N клеток, на одной из которых сидит кузнечик. На каждом ходу мы называем натуральное число, после чего кузнечик прыгает на это число клеток влево или вправо (по своему выбору). При каких N можно называть числа так, чтобы гарантированно загнать кузнечика в одну из ловушек, где бы он ни был изначально между ловушками и как бы ни выбирал направления прыжков? (Мы все время видим, где сидит кузнечик.)

Ответ. При N = 2k - 1, где k - натуральное число.

Решение. Занумеруем клетки целыми числами по порядку так, чтобы ловушки получили номера 0 и N + 1.

Пусть N + 1= 2k. Будем каждый раз называть расстояние d до ближайшей ловушки. Ясно, что наибольшая степень двойки, на которую делится d, меньше k. Если кузнечик прыгнет в противоположную сторону и не попадет в ловушку, то он останется между ловушками, и расстояние до одной из ловушек станет 2d, а до другой 2k - 2d. Оба этих расстояния делятся на вдвое большую степень двойки. Рано или поздно расстояния разделятся на 2k, что и означает попадание в ловушку.

Пусть, наоборот, N + 1 = 2kt, где t нечетно и больше 1. Объявим ловушками все клетки с номерами, кратными t. Пусть кузнечик стоит не в ловушке. Заметим, что он не стоит и ровно посредине между двумя ловушками, поскольку все числа вида либо нецелые, либо кратны t. Значит, при любом названном числе у кузнечика есть прыжок не в ловушку.

7.4. [6] Несколько (конечное число) точек плоскости окрашены в четыре цвета, причем есть точки каждого цвета. Никакие три из этих точек не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся три разных (возможно, пересекающихся) треугольника, каждый из которых имеет вершины трех разных цветов и не содержит внутри себя окрашенных точек.

Решение. Рассмотрим треугольник, наименьший (по площади) среди треугольников с вершинами трех разных цветов. Внутри него нет окрашенных точек (если бы такая была, то, соединив ее с вершинами двух других цветов, мы получили бы меньший треугольник). Пусть это оказался треугольник с вершинами 1-го, 2-го и 3-го цветов.

Теперь рассмотрим наименьший "разноцветный" треугольник, имеющий вершину 4-го цвета. Без ограничения общности можно считать, что это треугольник с вершинами 1-го, 2-го и 4-го цветов. Внутри него не может быть точек этих трех цветов. Но и точки 3-го цвета быть не может: соединив ее с вершинами 1-го и 4-го цветов, мы бы получили меньший по площади треугольник с вершиной 4-го цвета.

Наконец рассмотрим наименьший "разноцветный" треугольник, имеющий вершины 3-го и 4-го цветов. Аналогично показываем, что и внутри него нет окрашенных точек.

Итак, мы нашли искомые треугольники.

7.5. [7] По кругу стоят 99 детей, изначально у каждого есть мячик. Ежеминутно каждый ребенок с мячиком кидает свой мячик одному из двух соседей; при этом, если два мячика попадают к одному ребенку, то один из этих мячиков теряется безвозвратно. Через какое наименьшее время у детей может остаться только один мячик?

Ответ. Через 98 минут (уточняем условие: первый бросок происходит в конце (а не вначале) первой минуты, второй - в конце второй минуты и т.д.).

Решение. Занумеруем детей и мячики по часовой стрелке от 1 до 99.

Покажем, что ответ 98 возможен.

На каждом нечетном шагу (включая первый) первый мячик перебрасывается от 1-го ребенка ко 2-му, а на четных шагах - от 2-го к 1-му; остальные мячики, брошенные этим детям, пропадают.

Остальные мячики с нечетными номерами на каждом шагу перекидываются против часовой стрелки, а мячики с четными номерами - по часовой стрелке.

Мячики с нечетными номерами попадают второму ребенку на нечетных шагах, при этом первый мячик не пропадает, а остальные пропадают. Мячик с номером 99 пропадает на 97-м шагу, остальные мячики с нечетными номерами - раньше.

Аналогично, мячики с четными номерами попадают первому ребенку на четных шагах, одновременно с мячиком номер 1, прошенным вторым ребенком. При этом мячик с номером 2 пропадает на 98-м шагу, остальные мячики с четными номерами - раньше.

Покажем, что через n минут, если $n < 98$, мячиков всегда будет больше одного.

Нам удобнее считать, что мячики не теряются, а склеиваются (с сохранением всех номеров), и собираются в конце у 1-го ребенка.

Допустим, что n нечетно.

Тогда каждый мячик должен оказаться у первого ребенка через n минут, то есть через нечетное число минут, иначе через n минут этот мячик с места первого ребенка уйдет. Для этого мячик номер один должен пройти полный круг, на что ему необходимо не меньше 99 минут (ровно 99 минут, если он двигается все время в одну сторону).

Допустим, что n четно. Тогда первому мячику обходить полный круг необязательно, но второй мячик должен обойти полный круг без одного шага, иначе он попадает на место первого ребенка через нечетное число минут, а через n минут он с этого места уйдет. На такой путь второму мячику необходимо 98 минут.

Итак, во всех случаях меньше, чем через 98 минут, число мячиков будет больше одного.

7.6. [7] Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a/b + c/d = 1$, $a/d + c/b = 2008$?

Ответ - существуют.

Решение. Положим $x = 1/b$, $y = 1/d$. Решим систему уравнений

$$ax + cy = 1$$
$$cx + ay = 2008$$

относительно x и y.

$$ax = 1 - cy;$$
$$x = (1-cy)/a;$$
$$c(1-cy)/a + ay = 2008;$$
$$(c - c^2*y)/a + ay = 2008;$$
$$y(a - c^2/a) = 2008 - c/a;$$
$$y = (2008 - c/a)/(a-c^2/a) = (2008a - c)/(a^2-c^2).$$

$$x = (1-cy)/a = (1-c(2008a-c)/(a^2-c^2))/a =$$
$$= (a^2-c^2-2008ac+c^2)/(a(a^2-c^2)) =$$
$$= (a-2008c)/(a^2-c^2).$$

$1/x$ и $1/y$ должны быть натуральными числами. Если взять $a = 2009$, $c = 1$, то $1/x = 2009^2-1$ - натуральное число. Заметим, что если мы увеличим a и c в k раз, то x и y увеличатся в k раз, и уравнения системы останутся выполненными. Значит, если взять $k = 2008*2009-1$, то $1/y$ станет целым, а $1/x$ останется целым. Числа получатся такие:

$a = 2009(2008*2009 - 1)$, $b = 2008*2010(2008*2009 - 1)$,
$c = 2008*2009 - 1$, $d = 2008*2010$.

7.7. [8] В выпуклом четырехугольнике ABCD нет параллельных сторон. Углы, образованные сторонами четырехугольника с диагональю AC, равны (в каком-то порядке) 16°, 19°, 55° и 55°. Каким может быть острый угол между диагоналями AC и BD?

Ответ. 87 градусов.

Решение. Пусть E - точка пересечения диагоналей. Достаточно рассмотреть два варианта расположения углов (угол в этом тексте обозначается $<$).

1) $<BAC = <DAC = 55^\circ$, $<BCA = 19^\circ$, $<DCA = 16^\circ$. Пусть I - точка пересечения биссектрис треугольника ABD. Четырехугольник BCDI вписанный, (так как $<BID = 180^\circ - <IBE - <IDE = 180^\circ - (<ABE + <ADE)/2 = 180^\circ - (180^\circ - 2*55^\circ)/2 = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$; $<BID + <BCD = 145^\circ + 35^\circ = 180^\circ$).
Поэтому $<DBI = <DCI = <DCA = 16^\circ$.
Значит, $<ABD = 32^\circ$, и $<AED = <ABD + <BAC = 87^\circ$.

2) $<BAC = <BCA= 55^\circ$, $<DAC = 19^\circ$, $<DCA = 16^\circ$. Тогда $<ADC = 145^\circ$, $<ABC = 70^\circ$.

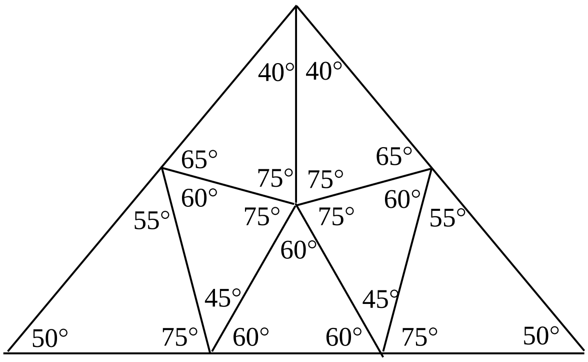
Рассмотрим описанную окружность треугольника ADC. Центр этой окружности является вершиной равнобедренного треугольника с основанием AC и углом при вершине, равным $2*(180^\circ - 145^\circ) = 70^\circ$, то есть совпадает с точкой B. Поэтому
$<ABD = 2 <DCA = 32^\circ$, и $<AED = <ABD + <BAC = 87^\circ$.

29 Турнир Городов, весенний тур, сложный вариант, 10-11 классы

8.1. Бумажный треугольник, один из углов которого равен α, разрезали на несколько треугольников. Могло ли случиться, что все углы всех полученных треугольников меньше α

а) [3] в случае, если $\alpha = 70°$;

б) [3] в случае, если $\alpha = 80°$?



Решение. **а**) Не могло. В треугольниках разбиения все углы должны быть больше $180° - 70° - 70° = 40°$. Но исходный угол в $70°$ нельзя разрезать на углы, большие $40°$.

б) Могло. На рисунке изображен треугольник с углом $80°$, составленный из треугольников с меньшими углами. Для его построения проведем два луча, образующие угол $80°$ (стороны треугольника), и биссектрису этого угла. Выберем на биссектрисе произвольную точку и построим верхние треугольники с углами $40°$, $75°$ и $65°$, затем внутренние треугольники и проведем основание исходного треугольника.

8.2. [6] На числовой прямой в точке P сидит точечный кузнечик. Точки 0 и 1 – ловушки. На каждом ходу мы называем любое положительное число, после чего кузнечик прыгает влево или вправо (по своему выбору) на расстояние, равное этому числу. Для каких P можно называть числа так, чтобы гарантированно загнать кузнечика в одну из ловушек? (Мы всё время видим, где сидит кузнечик.)

Ответ. При $P = a\cdot 2^{-k}$, где a и k – натуральные числа, $0 < a < 2^k$.

Решение. Пусть P – число указанного в ответе вида, и дробь несократима (то есть a нечетно). Заметим, что тогда и число $1 - P$ имеет тот же вид (причем с тем же знаменателем). Назовем теперь наименьшее из чисел P и $1 - P$. Если кузнечик прыгнет и не попадет в ловушку, то он останется между ловушками, и расстояние до одной из ловушек удвоится. В результате знаменатель координаты кузнечика уменьшится вдвое. После k прыжков координата станет целой, что означает попадание в ловушку.

Объявим теперь ловушками все рациональные числа со степенью двойки в знаменателе. Покажем, что если кузнечик не в ловушке, он всегда может прыгнуть не в ловушку. Заметим, что полусумма ловушек – снова ловушка. Пусть названо число d. Так как $P = \dfrac{(P+d)+(P-d)}{2}$, и P – не ловушка, то хотя бы одна из точек $P + d$ и $P - d$ – тоже не ловушка. Туда и прыгнем.

8.3. [6] Многочлен степени $n > 1$ имеет n разных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Его производная имеет корни $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Докажите неравенство $\dfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n} > \dfrac{y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2}{n-1}$.

Решение. Можно считать, что наш многочлен приведенный:

$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$$

По формулам Виета $x_1 + \ldots + x_n = a_1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$, откуда

$$2a_2 = (x_1 + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Поскольку $P(x) = nx^{n-1} - (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots$, аналогично получаем:

$y_1 + \ldots + y_{n-1} = \dfrac{n-1}{n}a_1$, $y_1y_2 + y_1y_3 + \ldots + y_{n-2}y_{n-1} = \dfrac{n-2}{n}a_2$,

$$y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2a_1^2-2\frac{n-2}{n}a_2=$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2(x_1+\ldots+x_n)^2-\frac{n-2}{n}\left((x_1+\ldots+x_n)^2-(x_1^2+\ldots+x_n^2)\right)=$$

$$=\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2+\frac{n-2}{n}(x_1^2+\ldots+x_n^2).$$

После подстановки полученного выражения в правую часть исходного неравенства, умножения на и приведения подобных членов оно превратится в известное неравенство $\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n} > \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2$ между средним квадратичным и средним арифметическим (строгое для неравных чисел).

8.4. [7] Петя и Вася нарисовали по четырёхугольнику без параллельных сторон. Каждый провёл в своём четырёхугольнике одну из диагоналей и вычислил углы, образованные этой диагональю со сторонами своего четырёхугольника. Петя получил числа α, α, β и γ (в некотором порядке), и Вася – тоже эти числа (возможно, в другом порядке). Докажите, что диагонали четырёхугольника Пети пересекаются под теми же углами, что и диагонали четырёхугольника Васи.

Решение. Существуют не более двух принципиально разных четырехугольников, удовлетворяющих условию – углы α имеют общую вершину или образуются в разных вершинах, соединенных диагональю, остальные четырехугольники им подобны. Причем, если имеется два принципиально разных четырехугольника, то $\alpha<90°$ и $\beta+\gamma<180°$, следовательно, оба четырехугольника выпуклые. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle CAB = \angle CAD = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $\angle DCA = \gamma$, а в четырехугольнике $AECF$ $\angle ACE = \angle CAE = \alpha$, $\angle ACF = \beta$, $\angle CAF = \gamma$ (точка E лежит на прямой AD, точка F – на прямой BC). Тогда $AB \parallel EC$, $AF \parallel DC$. Докажем, что диагонали DB и EF также параллельны. Обозначим O точку пересечения AD и BC. Из $AB \parallel EC$ следует $OA/OD = OB/OC$, из $AF \parallel DC$ следует $OA/OE= OB/OC$. Следовательно $OE/OD = OF/OB$. Следовательно $DB \parallel EF$ и составляют равные углы с общей диагональю AC.

8.5. [8] Все натуральные числа выписали в ряд в некотором порядке (каждое число по одному разу). Обязательно ли найдутся несколько (больше одного) чисел, выписанных подряд (начиная с какого-то места), сумма которых будет простым числом?

Решение. Не обязательно. Покажем как записать натуральные числа в бесконечную последовательность, где таких “простых сумм” нет.

Возьмем $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Пусть конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n>1)$ без “простых сумм” уже построена, и m – наименьшее натуральное число, которое не является ее членом. Положим $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + m$, $a_{n+1} = S!$, $a_{n+2} = m$. Полученная последовательность также не содержит простых сумм. Действительно, любая сумма, содержащая слагаемое a_{n+1}, равна $S! + k$, где $1 < k \le S$, и не является простым числом, поскольку делится на k.

Продолжая такое построение по индукции, мы получим бесконечную последовательность. Из построения очевидно, что каждое натуральное число попадает в эту последовательность ровно один раз.

8.6. [8] Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек – белую или черную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Мудрецы могут заранее договориться о своих действиях (до того, как им завязали глаза); мудрецам известно, каких 1000 цветов могут быть колпаки.

Решение. Существует ровно 2^{11} 11-разрядных последовательностей из 0 и 1, из них с четным числом единиц – ровно половина, то есть $2^{10} = 1024$. Закодируем 1000 цветов тысячей таких последовательностей. Распределим разряды между мудрецами. Мудрец номер k действует так: среди видимых им 10 цветов колпаков подсчитывает число a_k тех, у кого в k-м разряде стоит 1. Если это число четно, он показывает черную, а иначе – белую карточку.

После этого каждый мудрец может вычислить все разряды в коде цвета своего колпака, кроме одного – за который он сам отвечает. Для этого он подсчитывает число b_k единиц в k-тых разрядах девяти мудрецов (кроме себя и мудреца номер k), и если четность b_k совпадает с показанной четностью a_k, у него в k-м разряде 0, иначе 1. Недостающий разряд восстанавливается благодаря четности общего числа единиц в коде.

8.**7**. [8] Даны две окружности и три прямые, каждая прямая высекает на окружностях хорды равной длины. Точки пересечения прямых образуют треугольник. Докажите, что описанная окружность этого треугольника проходит через середину отрезка между центрами данных окружностей.

Решение. Утверждение очевидно следует из следующих двух лемм.

Лемма 1. Основание перпендикуляра, опущенного из середины линии центров двух окружностей на прямую, высекающую на этих окружностях равные хорды, лежит на радикальной оси этих окружностей.

Напомним, что *радикальной осью* двух окружностей называется множество точек, степени которых относительно обеих окружностей равны. *Степень точки P* относительно окружности радиуса R с центром в O – это число $OP^2 - R^2$, оно в свою очередь равно произведению секущих, проведённых к окружности из точки P (взятых со знаком). Радикальная ось – это прямая (если, конечно, окружности не концентрические.)

Лемма 2. Если основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника, лежат на одной прямой, то точка лежит на описанной окружности этого треугольника.

Доказательство леммы 1. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, H_1 и H_2 – середины высекаемых хорд K_1L_1 и K_2L_2 длины $2d$. Основание P нашего перпендикуляра – середина отрезка H_1H_2 (так как отрезок O_1O_2 проектируется на H_1H_2). Пусть $PH_1 = PH_2 = l$. Степень точки P относительно первой окружности равна $\left(\overline{PK_1}, \overline{PL_1}\right) = \left(\overline{PH_1} + \overline{H_1K_1}, \overline{PH_1} - \overline{H_1K_1}\right) = l^2 - d^2$. Тот же результат мы получим, вычисляя степень точки P относительно второй окружности.

Доказательство леммы 2. Пусть P, Q, R – основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AB, AC, BC треугольника ABC. Пусть точка M не лежит на описанной окружности Ω треугольника ABC. Найдём тогда такую вершину треугольника ABC, что при гомотетии с центром в этой вершине окружность Ω перейдет в окружность Ω_1, проходящую через точку M. Такая вершина найдётся: иначе M лежала бы на трёх касательных к Ω, касающихся Ω в вершинах треугольника ABC, что невозможно (ведь из любой точки можно провести не более двух касательных к данной окружности). Пусть найденная вершина – это A. При нашей гомотетии треугольник ABC перейдет в треугольник AB_1C_1, вписанный в Ω_1. Основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AB_1, AC_1 треугольника $A_1B_1C_1$, – те же точки P и Q. Пусть R_1 – основание перпендикуляра, опущенного из M на B_1C_1. Как известно, точки P, Q и R_1 лежат на одной прямой (*прямая Симсона*). А точки P, Q и R лежат на одной прямой по условию. Но точки M, R и R_1 тоже будут лежать на одной прямой (так как BC и B_1C_1 параллельны). Значит, прямая PQ пересекает прямую MR как в точке R, так и в точке R_1. Следовательно точки R и R_1 совпадают. Тогда совпадают и прямые AB и A_1B_1, то есть коэффициент гомотетии равен 1, и Ω_1 совпадает с Ω.

Замечание. Прямое доказательство леммы 2 требует либо разбора нескольких случаев расположения точки M, либо понятия ориентированного угла между прямыми (см. Прасолов. Задачи по планиметрии. 1991, зад. 5.85 б).