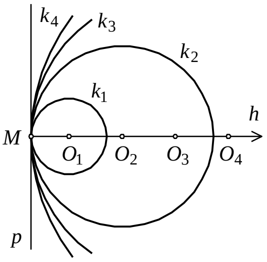
Лилјана Поповиќ Грибовска
Скопје

ИНВЕРЗИЈА

1. Вовед

Нека во рамнината се дадени права p, точка M на неа и полуправа h со почеток во M и нормална на p.



Црт. 1

Да конструираме кружница k со центар во произволна точка O од полуправата h, која ја допира правата p во точката M. Ако точката O се движи по полуправата h и последователно ги зазема положбите $O_1, O_2, O_3, O_4, \ldots$ на нив ќе одговараат соодветно кружниците $k_1, k_2, k_3,\ k_4, \ldots$, кои ја допираат правата p во точката M. Тогаш, може да се каже, дека секоја следна кружница се повеќе се “исправа”, бидејки секоја следна кружница има се помала кривина (под кривина на кружница се подразбира вредноста на изразот $\frac{1}{r}$, каде r е радиусот на кружницата). Ова ни дава за право секоја права да ја разгледуваме како кружница, имено како *кружница со бесконечно голем радиус*. Исто така, и секоја точка може да се разгледува како кружница и тоа како *кружница со радиус нула,* кое пак следува директно од дефиницијата на кружница

2. Дефиниција и основни својства на инверзијата

Нека во рамнината π е дадена точката O, а $m>0$ е реален број. Разгледуваме пресликување I од $\pi\setminus\{O\}$ во $\pi\setminus\{O\}$, кое на произволна точка $A\neq O$ од рамнината и придружува точката A' која што лежи на полуправата OA и го задоволува равенството

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m\,. \tag{1}$$

Дефиниција 1. Пресликувањето $I:\pi\setminus\{O\}\to\pi\setminus\{O\}$, дефинирано со (1) се нарекува *инверзија* со центар во O и коефициент m.

Забелешка 1. Од дефиницијата, следува дека точката A' е еднозначно определена, што значи дека пресликувањето е инјекција. Јасно, ова пресликување е и сурјекција. Значи инверзијата I е биективно пресликување од $\pi\setminus\{O\}$ во $\pi\setminus\{O\}$.

Теорема 1. Инверзијата е инволуторно пресликување.

Доказ. Од $B^{'}D^{'}$. следува дека A' лежи на полуправата OA и, притоа, $\overline{AD}$. Ако $I(A')=A_1$, тогаш A_1 ќе лежи на полуправата OA', која се совпаѓа со полуправата OA, притоа $\angle SM^{'}T=\frac{1}{2}\angle MO_1T$, од каде следува дека $A_1=A$, т.е. $I(A')=A$. Значи $I^2=E$ и како I е биекција следува дека $I=I^{-1}$, т.е. инверзијата е инволуторно пресликување. ■

Теорема 2. Точката е неподвижна за инверзија ако и само ако припаѓа на кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$.

Доказ. Нека точката A е неподвижна за инверзијата I, т.е. $I(A)=A$. Ставаме $m=r^2, (r>0)$ и тогаш од равенството (1) следува $\overline{OA}^2=r^2$, т.е. $\overline{OA}=r$, што значи дека $A\in k_0(O,\sqrt{m})$.

Обратно, ако $A\in k_0(O,\sqrt{m})$, тогаш $\overline{OA}\cdot\overline{OA}=r^2=m$, па затоа $I(A)=A$, т.е. точката A е неподвижна за инверзијата I. ■

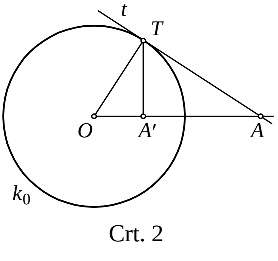
Дефиниција 2. Кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$ ја нарекуваме *кружница на инверзијата* (1).

Во натамошните разгледувања, за инверзијата I со центар во O и коефициент $m=r^2$ *ќе ја користиме ознаката* $I(O,r)$.

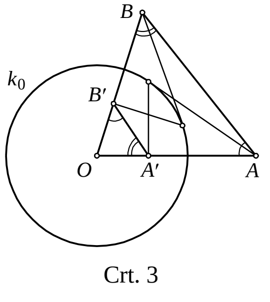
Теорема 3. Внатрешна точка на кружницата на инверзијата се пресликува во надворешна точка и обратно.

Доказ. Ако A е внатрешна точка за кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$, тогаш $\overline{OA}<\sqrt{m}$. Затоа, од $I(A)=A'$ и $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m$ следува дека $\overline{OA'}>\sqrt{m}$, што значи дека A' е надворешна точка за k_0. Обратното тврдење се докажува аналогно. ■

Нека A е надворешна точка за k_0 (црт. 2). Од точката A повлекуваме тангента t кон k_0. Во допирната точка T повлекуваме нормала на полуправата OA. Пресечната точка на OA и нормалата е бараната слика A' на точка-



Crt. 2



Crt. 3

та *A* при инверзијата *I*. Навистина триаголниците $\triangle OTA$ и $\triangle OTA'$ се правоаголни со заеднички агол кај темето *O*, па затоа тие се слични, од каде што следува

$$\overline{OA'}:\overline{OT}=\overline{OT}:\overline{OA},\ \text{т.е. }\ \overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OT}^2=m=r^2.$$

Ако *A* е внатрешна точка за k_0, ќе ја искористиме истата конструкција, но во обратен ред, при што *A* и A' си ги заменуваат местата.

Теорема 4. Ако *I* е инверзија со центар во *O* и коефициент *m*. Ако *A* и *B* се произволни точки и $I(A)=A'$ и $I(B)=B'$, тогаш $\measuredangle OBA=\measuredangle B'A'O$ и $\measuredangle OAB=\measuredangle A'B'O$.

Доказ. Ако точките *A*, *B* и *O* се колинеарни, тогаш тврдењето е јасно. Затоа, да претпоставиме дека точките *A*, *B* и *O* не се колинеарни и нека се распоредени како на црт. 3. Од $I(A)=A'$ и $I(B)=B'$, следува $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m$ и $\overline{OB}\cdot\overline{OB'}=m$, па затоа $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}$, односно $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OB}^{'}:\overline{OA}^{'}$. Според тоа, $\triangle OAB$ и $\triangle OB'A'$ се слични, па затоа $\measuredangle OBA=\measuredangle B'A'O$ и $\measuredangle OAB=\measuredangle A'B'O$. ■

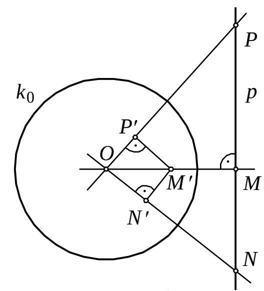
Забелешка 2. Во доказот на теорема 4 видовме дека $\triangle OAB\sim\triangle OB'A'$, па затоа

$$\overline{A'B'}=\frac{\overline{AB}\cdot r^2}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}},\ r^2=m. \tag{2}$$

Теорема 5. При инверзија, права која што минува низ центарот на инверзијата се пресликува во самата себе, а права која што не минува низ центарот на инверзијата се пресликува во кружница која што минува низ центарот на инверзијата.

Доказ. Нека *I* е дадена инверзија со кружница на инверзија $k_0(O,r)$, а *p* е произволна права од рамнината.

Ако *p* минува низ центарот на инверзијата, тогаш од дефиницијата на инверзијата, сликата A' на произволна точка $A(\neq O)$ од *p* лежи на *p*, и обратно, произволна точка $B'(\neq O)$ од *p* е слика на точката *B* од *p*. Значи $I(p)=p'=p$.



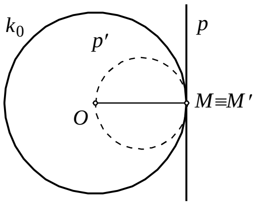
Црт. 4

Нека правата *p* не минува низ центарот на инверзијата, *p* не ја сече кружницата k_0 и нека M' е сликата на точката *M* која е пресек на правата *p* со нормалата на *p* низ *O* (црт. 4). На правата *p* избираме произволна точка $P(\neq M)$ и нека P' е нејзината слика. Од теорема 4 следува $\measuredangle OP'M'=\measuredangle OMP$ и како $\measuredangle OMP=90^\circ$, следува дека $\measuredangle OP'M'=90^\circ$, т.е. P' лежи на кружница p' чиј дијаметар е $\overline{OM'}$. Конечно, од произволноста на точката *P* следува дека сликата на правата *p* е кружницата со дијаметар $\overline{OM'}$.

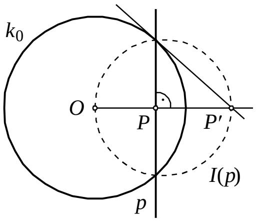
Обратно, нека $N'(\neq O)$ е произволна точка од кружницата p'. Да ја означиме со N пресечната точка на правата ON' со p. За да докажеме дека N' е слика на N при инверзијата I, доволно е да докажеме дека $\overline{ON}\cdot\overline{ON'}=r^2$. Од $\triangle OM'N' \sim \triangle ONM$ (правоаголни триаголници со заеднички агол во темето O), следува дека $\overline{ON'}:\overline{OM}=\overline{OM'}:\overline{ON}$, т.е. $\overline{ON}\cdot\overline{ON'}=\overline{OM}\cdot\overline{OM'}$ и како $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=r^2$, добиваме $\overline{ON}\cdot\overline{ON'}=r^2$. Значи $p'=I(p)$. ■

Забелешка 3. За да ја конструираме сликата p' на правата p која што не минува низ центарот O на инверзијата, доволно е да ја конструираме сликата M' на точката M и тогаш сликата на правата p' е кружницата со дијаметар $\overline{OM'}$.

Кружницата p' поедноставно се наоѓа во случаите кога p ја допира k_0 (Црт. 5), тогаш $M = M'$ и кога p ја сече k_0 (Црт. 6). За да ја најдеме кружницата p' во случајот кога правата p ја сече k_0, ја бараме ортогоналната проекција на точката O врз правата p, и нека тоа биде точката P. Во еден од пресеците на кружницата на инверзијата k_0 со правата p повлекуваме тангента t. Пресекот на правата OP со t е сликата P' на точката P при инверзијата I. Бараната кружница (слика на правата p) е кружницата што минува низ пресечните точки на k_0 со p и низ точките O и P', таа има дијаметар $\overline{OP'}$.



Црт. 5

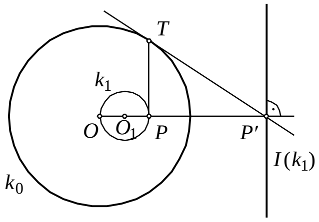


Црт. 6

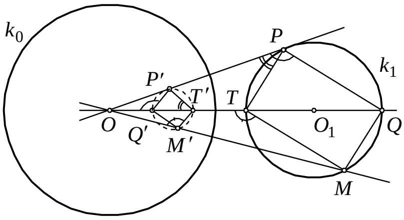
Забелешка 4. Да забележиме дека тангентата t на кружницата p' во точката O е нормална на OM, а бидејќи и правата p е нормална на OM, следува дека тангентата (t) кон кружницата слика е паралелна со правата оригинал (p).

Теорема 6. Секоја кружница што минува низ центарот на инверзијата се пресликува во права што не минува низ центарот на инверзијата, а секоја кружница што не минува низ центарот на инверзијата се пресликува во кружница што исто така не минува низ центарот на инверзијата.

Доказ. Бидејќи секоја кружница што минува низ центарот на инверзијата е слика на права што не минува низ центарот на инверзијата (Т. 5), а инверзијата е инволуторно пресликување (Т. 1), првиот дел од теоремата е нивна директна последица. Конструкцијата може да се проследи на (Црт. 7), каде инверзијата е дадена со кружницата на инверзија k_0 со центар во точката O, а кружницата k_1 што минува низ O нека има центар во точката O_1. Правата OO_1 ја сече кружницата k_1 во точката P. Од P издигаме нормала на правата OO_1, таа ја сече k_0 во точката T. Низ T повлекуваме тангента t на k_0, t ја сече правата OO_1 во точката $P^{'}$. Бараната права е правата низ $P^{'}$ која е нормална на OO_1.



Црт. 7



Црт. 8

Што се однесува до вториот дел на теоремата во доказот ќе ја користиме (Т.4) за запазување на аглите при инверзијата. Нека I е дадека инверзија со кружница на инверзија $k_0(O, r)$, додека $k_1(O_1, r_1)$ е произволна кружница од рамнината која не минува низ центарот O на инверзијата I. Ќе ја бараме сликата $k_1^{'}$ на k_1. Да ги означиме со T и Q пресечните точки на правата OO_1 со k_1, со P да означиме произволна точка од k_1 и нека $I(T)=T'$, $I(Q)=Q'$ и $I(P)=P'$. Тогаш $\angle OQ'P'=\angle OPQ$ и $\angle OT'P'=\angle OPT$, па имаме

$$\angle Q'P'T'=\angle OQ'P'-\angle OT'P'=\angle OPQ-\angle OPT=90^\circ .$$

Значи точката P' лежи на кружница $k_1^{'}$, чиј дијаметар е отсечката $\overline{Q'T'}$. И, бидејки P е произволна точка од k_1 следува дека сликите на сите точки од k_1 лежат на $k_1^{'}$.

Обратно, нека M' е произволна точка од кружницата $k_1^{'}$ (оваа кружница е означена со испрекината линија на црт. 8), а M точка од полуправата OM' за која важи $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=r^2$. Ќе докажеме дека M лежи на k_1. Според Т. 4 $\angle OM'Q'=\angle OQM$ и $\angle OM'T'=\angle OTM$, одовде

$$\angle TMQ=\angle OTM-\angle OQM=\angle OM'T'-\angle OM'Q'=90^\circ .$$

Значи точката M лежи на кружницата k_1. Од досега изнесеното следува дека $k_1^{'}=I(k_1)$. Кружницата $k_1^{'}$ неможе да минува низ центарот O на инверзијата I, бидејки во спротивно кружницата $k_1^{'}$ и правата OO_1 би имале три заеднички точки (Q', P' и O), што не е возможно. До истиот заклучок може да се дојде доколку се искористи првиот дел од теоремата и теорема 1.

Конструкција. За да ја најдеме сликата $k_1^{'}$ на кружницата k при инверзијата I, ќе постапиме на следниот начин. Бидејки центарот $O_1^{'}$ на $k_1^{'}$ неможе да се искористи, најнапред ги наоѓаме точките T и Q на правата OO_1 како нејзини пресеци со кружницата k_1. Потоа ќе ги најдеме $T' = I(T),\ \ Q' = I(Q),$ (може и со основната конструкција) или со користење на (Т. 4) за запазување на аглите како на нашиот цртеж. Од доказот на теоремата е јасно дека бараната кружница $k_1^{'}$ е кружницата со дијаметар $\overline{Q'T'}$. Конструкцијата е полесна доколку k_1 ја допира или ја сече кружницата k_0, и се остава на читателите за вежба.

Забелешка 5. Да забележиме дека центрите на кружницата на инверзија, кружницата оригинал и кружницата слика лежат на иста права.

3. Примена на основните својства на инверзијата во задачи

Пред да продолжиме со изложување на други интересни својства на инверзијата да ги примениме горе докажаните теореми во задачи.

Задача 1. Дадени се две прави. Најди инверзија која едната права ја пресликува во другата.

Решение. Од Т.5 директно следува дека со инверзија права се пресликува во права, само доколку минува низ центарот на инверзијата, и при тоа се пресликува во себе. Значи постои инверзија со бараното својство само ако правите се совпаѓаат и притоа нејзиниот центар може да биде било која точка на правата, а и коефициентот е произволен.

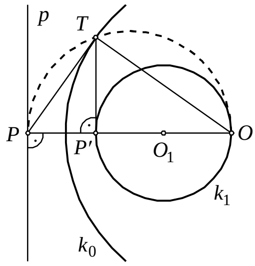
Задача 2. Дадени се права и кружница. Најди инверзија која правата ја пресликува во кружницата.

Решение. Од Т.5 следува дека постои инверзија со својство правата да ја преслика во кружницата, при што центарот на таа инверзија ќе биде на кружницата и нема да припаѓа на правата.

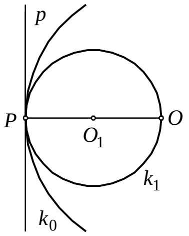
При тоа можни се следните три случаи:

2.1 Правата p и кружницата $k_1(O_1,\ r)$ немаат заеднички точки (црт. 9). Низ точката O_1 повлекуваме права нормална на p. Таа ја сече правата p во точката P, а кружницата k_1 во точките O и $P^{'}$, така што $P^{'}$ е меѓу O_1 и P. Над $\overline{OP}$, како над дијаметар конструираме кружница, во $P^{'}$ повлекуваме права нормална на OP и во нивниот пресек наоѓаме точка T. На овој начин ја добивме кружницата на инверзијата што ги задоволува условите на задачата, тоа е кружницата $k\ (O,\ \overline{OT}\ )$, (види го вториот дел на доказот на Т.5).

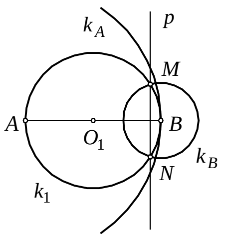
2.2 Правата p и кружницата $k_1(O_1,\ r)$ се допираат во точката P (црт. 10). Како и во претходниот случај низ точката O_1 повлекуваме права нормална на p. Таа ја сече кружницата k_1 во точката O. Од доказот на Т.5 следува дека бараната инверзија е определена со кружницата на инверзија $k(O,\ \overline{OP}\ )$.



Црт. 9



Црт. 10



Црт. 11

2.3 Правата p и кружницата $k_1(O_1, r)$ се сечат во точките M и N (црт. 11). Како и во претходните случаи низ точката O_1 повлекуваме права нормална на p. Таа ја сече кружницата k_1 во точките A и B. Од доказот на Т.5 следува дека постојат две инверзии определени со кружниците $k_A(A, \overline{AM})$ и $k_B(B, \overline{BM})$ што ги задоволуваат условите на задачата.

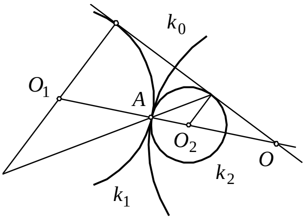
Задача 3. Дадени се две кружници. Најди инверзија која едната ја пресликува во другата.

Решение. Според Т.6 со инверзија кружница се пресликува во кружница само доколку не минува низ центарот на инверзијата, при што и кружницата - слика исто така не минува низ центарот на инверзијата. Бидејки било кои две кружници се хомотетични и имаат еден или два центри на хомотетија, ќе постои инверзија која едната кружница ќе се преслика во другата доколку центарот на хомотетијата не лежи на кружниците, тогаш тој е и центар на инверзијата. Според (Т.3), бидејки секоја внатрешна точка на кружницата на инверзијата се пресликува во надворешна и обратно, не е тешко е да се сфати зошто за кружниците $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, (нека $r_1 > r_2$), ќе постои или не постои таква инверзија.

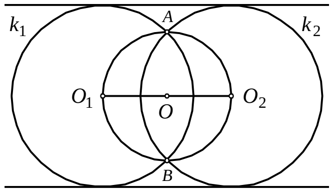
Во најопштиот случај ($O_1 \neq O_2$, $r_1 \neq r_2$) постојат два центри на хомотетија (внатрешен и надворешен). Да го одбереме, заради прецизност, надворешниот центар O за центар на инверзија I. Тогаш постои инверзија со центар во O што едната кружница ја пресликува во другата. За да ја најдеме, да го означиме со p степенот на точката O во однос на кружницата k_1 (види статија *Степен на точка во однос на кружница* од В. Василевска во *Сигма 45 од 99/00*), па на оваа кружница да примениме инверзија $I(O, p)$ и потоа хомотетија $H(O, r_2/r_1)$. Тогаш сликата k_2 на кружницата k_1 се добива со инверзијата $I(O, pr_2/r_1)$. Слично се постапува кога центарот на инверзијата е внатрешениот центар на хомотетија за кружниците k_1 и k_2. На црт. 12 е прикажан еден од можните случаи на поставеност на кружниците k_1 и k_2 ($O_1 \neq O_2$, $r_1 \neq r_2$, $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$, т.е. кога тие се допираат однадвор во точката A), тогаш центарот на инверзијата се совпаѓа со надворешниот центар на хомотетија O, па кружницата на инверзија ќе биде $k_0(O, \overline{OA})$, точката A е неподвижна.

Посебни случаи:

1^0. Концентрични кружници ($O_1=O_2=O$, $r_1\neq r_2$), тогаш бараната инверзија I е со центар во O и коефициент $m=r_1\cdot r_2$. Кружницата на инверзија можеме да ја конструираме ако низ O повлечеме произволна полуправа и искористиме дека пресечните точки на оваа полуправа со кружниците k_1 и k_2 се инверзибилни.



Црт. 12



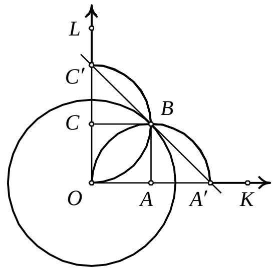
Црт. 13

2^0. Еднакви кружници ($O_1\neq O_2$, $r_1=r_2=r$, $\overline{O_1O_2} < 2r$), постои само еден центар на хомотетија, а тоа е и центарот на инверзијата O кој е средината на отсечката $\overline{O_1O_2}$, пресечните точки на кружниците k_1 и k_2 се неподвижни, што значи може да се конструира кружницата на инверзија $k_0(O,\ \overline{OO_1}\ )$, (црт. 13).

Не постои инверзија со бараното својство во случаите кај еднакви кружници за кои: $O_1\neq O_2$, $r_1=r_2=r$, $\overline{O_1O_2}=2r$ и $O_1\neq O_2$, $r_1=r_2=r$, $\overline{O_1O_2}>2r$.

Задача 4. Дадена е инверзија I со кружница на инверзија $k_0(O,r)$, и квадрат $AOBC$, така што $B\in k_0$. Да се конструира фигурата што е слика од квадратот $AOBC$ при инверзијата I.

Решение. Бидејќи правите OA и OC минуваат низ центарот на инверзијата тие се пресликуваат во самите себе, правите AB и BC не минуваат низ центарот на инверзијата па тие се пресликуваат во кружници што минуваат низ центарот на инверзијата. Бараната фигура ќе ја добиеме на следниот начин: повлекуваме тангента на кружницата k_0 во точката B, тогаш нејзините пресечни точки со полуправите OA и OC се точките $A'=I(A)$ и $C'=I(C)$, па страните на квадратот $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$ се пресликуваат со инверзијата I во полуправите $A'K$ и $C'L$ соодветно. Точката B се пресликува во самата себе бидејќи припаѓа на кружницата на инверзијата. Значи страните $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$ на квадратот се пресликуваат соодветно во лакот $A'B$ од кружницата $k\ (A,\ \overline{AO}\ )$ и лакот $C'B$ од кружницата $k\ (C,\ CO)$ (црт. 14).



Црт. 14

Ова е само дел од задачите во оваа статија кои се непосредно врзани за основните својства на инверзијата.

4. Други поважни својства на инверзијата

Видовме дека при инверзијата не е неопходно да се прави суштинска разлика меѓу права и кружница (права се пресликува во кружница и обратно, при одредена нивна поставеност во рамнината), што дава можност задачи за кружници да се решават како задачи за прави и обратно. Нивната поврзаност ќе биде поткрепена и со следните својства.

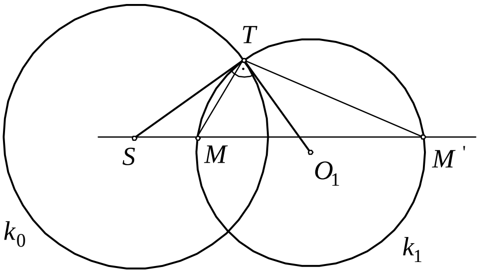
Теорема 7. Две прави, права и кружница, две кружници кои немаат заеднички точки или се допираат или се сечат во две точки при инверзијата ги задржуваат овие својства.

Доказ. Непосредно следува од тоа што инверзијата е биекција.

Дефиниција 3. Ако p е прева, k кружница, A произволна точка, t тангента на k повлечена од A, под *агол меѓу права и кружница* го подразбираме помалиот од аглите меѓу правите p и t. Ако k_1 и k_2 се кружници, A произволна точка, а t_1 и t_2 тангенти на k_1 и k_2 повлечени од A, под *агол меѓу две кружници* ќе го подразбираме помалиот од аглите меѓу правите t_1 и t_2. За кружницата k_1 ќе велиме дека *ортогонало ја сече* кружницата k_2, ако k_1 и k_2 се сечат под агол од 90°.

Теорема 8. Кружница, различна од кружницата на инверзијата, е неподвижна ако и само ако ортогонално ја сече на кружницата на инверзијата.

Доказ. Нека I е дадена инверзија со кружница на инверзија $k_0(S,\ r)$ и нека кружницата $k_1(O_1,r_1)$ ортогонално ја сече k_0, а M е произволна точка од k_1, (црт. 15). Ако со $M^{'}$ ја означиме втората пресечна точка на правата SM со k_1 (да забележиме дека $M \equiv M'$ ако SM ја допира k_1), тогаш ST се јавува како тангента на кружницата k_0 во точката T, една од пресечните точки на k_0 и k_1. Одовде следува дека $\overline{ST}:\overline{SM'}=\overline{SM}:\overline{ST}$ т.е. $\overline{SM}\cdot\overline{SM'}=\overline{ST}^2=r^2$, значи сликата M' при инверзијата I на произволна точка M од k_1 лежи истотака на k_1. Од произволноста на точката M може да се заклучи дека $I\,(k_1)=k_1$.



Црт. 15

Обратно, нека k_1 е неподвижна при инверзијата I, т.е. $k_1=I\,(k_1)$, ќе докажеме дека k_1 ортогонално ја сече k_0. Од тоа што k_1 е различна од k_0, следува дека постои точка M од k_1 која не лежи на k_0 и која не е неподвижна при инверзијата I. Бидејќи k_1 е неподвижна при I, сликата $M^{'}$ на M ќе биде пресечната точка на $\overline{SM}$ со k_1.

Во тој случај исполнето е равенството $\overline{SM} \cdot \overline{SM'} = r^2$ и една од точките M и M' е надворешна, а другата внатрешна за k_0. Значи k_1 и k_0 се сечат. Ако T е една од двете пресечните точки, тогаш $\overline{SM} \cdot \overline{SM'} = \overline{ST}^2$, од каде е $\overline{ST} : \overline{SM} = \overline{SM'} : \overline{ST}$, па значи $\Delta SMT \sim \Delta STM'$. Одовде $\angle STM = \angle SM'T$. Но, $\angle SM'T = \frac{1}{2} \angle MO_1T$, рпа затоа $\angle STM = \frac{1}{2} \angle MO_1T$. Значи ST е тангента за k_1. Заклучуваме дека кружницата k_1 ортогонално ја сече k_0. Со тоа теоремата е докажана.

Забелешка 5. Да забележиме дека додека, кружницата на инверзија k_0 е точкасто неподвижна (секоја нејзина точка се пресликува во самата себе), што не е случај со ортогоналната кружница k_1 на k_0, таа како целина е неподвижна, и само пресечните точки со k_0 се пресликуваат во самите себе.

Без доказ да го споменеме и следното важно својство на инверзијата, кое ќе го користиме во решавањето на задачите.

Теорема 9. Агол меѓу две прави, права и кружница или меѓу две кружници се запазува при секоја инверзија.

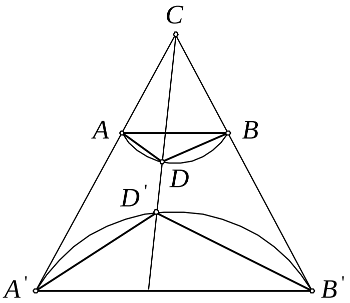
5. Примена на инверзијата во решавање на задачи

Сега користејќи ги ново докажаните својства за инверзијата, заедно со претходно докажаните основни својства на инверзијата да решиме уште неколку интересни задачи, а ќе бидат дадени и задачи за самостојна работа.

Ќе започнеме со една задача што директно следува од последната теорема, а ќе биде користена и Т.6. од првоит дел на оваа статија.

Задача 5. Нека A, B, C и D се било кои четири точки во рамнината кои не лежат на една права или една кружница. Да се докаже дека аголот под кој се сечат кружниците опишани околу триаголниците ABC и ABD е еднаков на аголот под кој се сечат кружниците опишани околу триаголниците CDA и CDB.

Решение. Нека избереме инверзија I со центар во C и произволен коефициент m, и нека $I(A) = A'$, $I(B) = B'$, $I(C) = C'$ и $I(D) = D'$, (црт. 16). Кружницата која минува низ точките A,B,C да ја означиме со k_{ABC}, а слично и за другите. Ќе користиме дека аглите при инверзија се запазуваат, односно агол се пресликува во нему еднаков агол. Од Т.6. имаме $I(k_{ABC}) = A'B'$ и $I(k_{ABD}) = k_{A'B'D'}$, затоа аголот меѓу k_{ABC} и k_{ABD} е еднаков со аголот меѓу



Црт. 16

$A'B'$ и $k_{A'B'D'}$. Исто така од $I(k_{ACD}) = A'D'$, и $I(k_{BCD}) = B'D'$, имаме дека аголот меѓу k_{ACD} и k_{BCD} е еднаков со аголот меѓу $A'D'$ и $B'D'$. И бидејки аголот меѓу $A'D'$ и $B'D'$ е еднаков со аголот меѓу $A'B'$ и $k_{A'B'D'}$ како агли над иста тетива $A'B'$ задачата е решена.

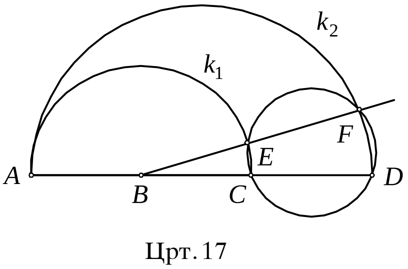
Задача 6. (*Теорема на Птоломеј*) Нека четириаголникот *ABCD* е впишан во кружницата *k*. Докажи дека збирот од производите на должините на спротивните страни е еднаков на производот од должините на неговите дијагонали, т.е. $\overline{AB}\cdot\overline{DC}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.

Решение. Нека избереме инверзија *I* со центар на кружницата на инверзијата k_0 во точката *D* и произволен радиус *r*, *I* (*D*, *r*). Според Т.6. со оваа инверзија кружницата *k* ќе се преслика во права која не минува низ центарот на инверзијата *D*. Тоа значи дека A', B', C', слики на точките *A*, *B*, *C*, ќе лежат на правата-слика на кружницата *k* и за нив ќе важи: $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$. Тогаш според равенството (2), кое е последица од Т.4., ќе имаме:

$$\frac{\overline{AB}\cdot r^2}{\overline{DA}\cdot\overline{DB}}+\frac{\overline{BC}\cdot r^2}{\overline{DB}\cdot\overline{DC}}=\frac{\overline{AC}\cdot r^2}{\overline{DA}\cdot\overline{DC}},$$

односно $\overline{AB}\cdot\overline{DC}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.

Задача 7. Точките *B* и *C* лежат на отсечката $\overline{AD}$, при што за нив важи: $\overline{AC}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}{\overline{AD}-\overline{AB}}$. Полуправа со почеток во точката *B* ги сече кружниците со дијаметри $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ во точките *E* и *F*. Да се докаже дека точките *C*, *D*, *E* и *F* лежат на една иста кружница.



Црт. 17

Решение. Точката *C* е меѓу точките *B* и *D* (црт. 17). Дека навистина е така, да претпоставиме дека C е меѓу *A* и *B*. Тогаш, бидејки

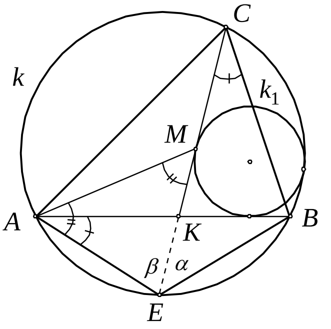
$$\overline{AC}=\overline{AB}-\overline{BC},$$
$$\overline{AD}-\overline{AB}=\overline{BD},$$
$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}$$

во условот на задачата би имале:

$$(\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BD}=(\overline{AB}+\overline{BD})\cdot\overline{AB},$$

односно $\overline{AB}\cdot\overline{BD}-\overline{BC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB^2}+\overline{BD}\cdot\overline{AB}$, од каде $-\overline{BC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB^2}$, што секако не е можно. Значи точките се разместени на следниот начин: *A*, *B*, *C* и потоа *D*. Сега не е тешко да се заклучи дека $\overline{BC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}^2$. Оттука идејата да избереме инверзија *I* (*B*, $\overline{AB}$). При тоа, точката *A* останува неподвижна, а од $\overline{BC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}^2$, следува дека $I\ (C)=D$. Од друга страна бидејќи правата $ABCD$ минува низ центрите на кружниците k_1 и k_2, добиваме дека $I\ (k_1)=k_2$. Правата EF минува низ B и ги сече k_1 и k_2 во точките E и F, па следува дека $I\ (E)=F$ и како $I\ (C)=D$, добиваме дека точките C, D, E и F лежат на иста кружница.

Задача 8. Нека CK е симетрала на $\angle ACB$ на ΔABC. Кружницата k_1 ги допира отсечките $\overline{BK}$ и $\overline{CK}$ и кружницата k опишана околу ΔABC. Да се докаже дека допирната точка M на CK и k_1 е центар на вписаната кружница во ΔABC.



Црт. 18

Решение. Нека пресекот на симетралата CK и опишаната кружница k околу ΔABC биде точката E, при што јасно е дека E е средина на лакот AB на кружницата k (црт. 18). Да избереме инверзија $I(E, \overline{EA})$, тогаш точките A и B се неподвижни, тогаш според Т.6 и Т.1, правата AB се пресликува во кружницата k и обратно, а правата CE во самата себе (Т.5). Според Т.9, бидејќи кружницата k_1 ја допира k, AB и CE тогаш и нејзината слика $k_1^{'}$ ги допира нивните слики AB, k и CE. Значи $k_1 \equiv k_1^{'}$. Тогаш $I\ (M)=M$, т.е M е неподвижна точка при I, затоа $\overline{EM} = \overline{EA}$. Значи ΔAEM е рамнокрак со еднакви агли во темињата A и M, т.е $\angle MAE = \angle AME = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $\angle AEM = \beta$, како агол над лак AC. Од друга страна $\angle EAB = \frac{\gamma}{2}$, како агол над лак BE. Конечно

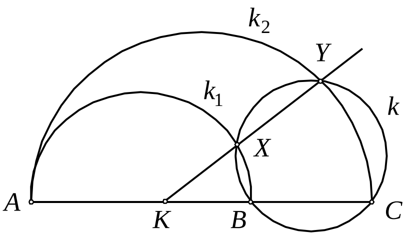
$$\angle BAM = \angle MAE - \angle EAB = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Значи AM е симетрала на $\angle\alpha$. A, одовде следува дека точката M е центарот на вписаната кружница во ΔABC.

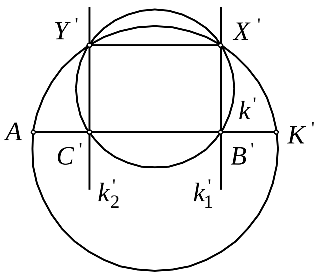
Задача 9. Точката B е внатрешна за отсечката $\overline{AC}$. Од иста страна на $\overline{AC}$ се поставени кружници k_1 и k_2 со дијаметри $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, соодветно. Произволна кружница k минува низ точките B и C. Ако k ги сече k_1 и k_2 во точките X и Y, да се докаже дека правата XY ја сече отсечката $\overline{AC}$ во фиксна точка K и при тоа важи: $\frac{1}{\overline{AK}} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}}$.

Решение. Да избереме инверзија $I\ (A, r)$. Тогаш сликите на точките B, C и K при инверзијата I ќе бидат B', C' и K' соодветно; додека кружниците k_1 и k_2 ќе се пресликаат во правите $k_1^{'}$ и $k_2^{'}$ кои ја сечат $AB^{'}$ под прав агол во точките B', C' соодветно, кружницата k се пресликува во k' која минува низ точките B', C' и ги сече правите k_1' и k_2' во точките X', Y' кои се слики на точките X и Y при инверзијата I, (црт. 19 а,б). Бидејки четириаголникот $B'C'Y'X'$ е вписан во кружницата k' тој е правоаголник, па затоа $X'Y' \| B'C'$.

Правата XY која не поминува низ центарот на инверзијата се пресликува во кружница која минува низ центарот A на инверзијата I, но и низ точките X', Y' и K'. Од присутната осната симетрија (црт.18б), имаме $\overline{AC'} = \overline{B'K'}$. Од $I(C) = C'$, следи $\overline{AC} \cdot \overline{AC'} = p^2$, односно $\overline{AC'} = \frac{r^2}{\overline{AC}}$. Од друга страна како пследица од Т.4 имаме, според равенството (2), дека $\overline{B'K'} = \frac{\overline{BK} \cdot r^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AK}}$, значи $\frac{r^2}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BK} \cdot r^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AK}}$, односно $\overline{AB} \cdot \overline{AK} = \overline{AC} \cdot \overline{BK}$. Во последното равенство можеме да ги извршиме следните трансформации:



Црт. 19а



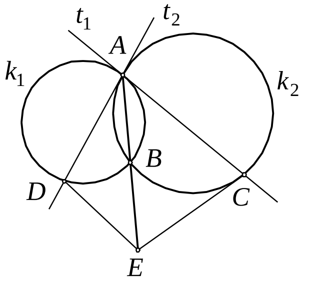
Црт. 19б

$$\overline{AB} \cdot \overline{AK} = \overline{AC} \cdot (\overline{AB} - \overline{AK}),$$

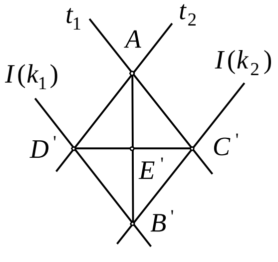
од каде $\overline{AK} \cdot (\overline{AB} + \overline{AC}) = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$, односно $\frac{1}{\overline{AK}} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}}$. Одовде директно следува дека K е постојана точка.

Задача 10. Нека k_1 и k_2 се две кружници кои се сечат во точките A и B. Нека t_1 и t_2 се тангенти на k_1 и k_2 во точката A, соодветно. При тоа нека $t_1 \cap k_2 = \{A, C\}$, а $t_2 \cap k_1 = \{A, D\}$. Ако E е точка од полуправата AB за која важи $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AB}$, докажи дека точките A, C, E и D лежат на иста кружница.

Решение. Да избереме инверзија $I(A, r)$, црт. 20 а, б. Според Т.6, сликите на кружниците k_1 и k_2 ќе бидат правите $I(k_1)$ и $I(k_2)$, кои според забелешката на Т.5. и Т.1., се паралелни со тангентите t_1 и t_2 соод-



Црт. 20а



Црт. 20б

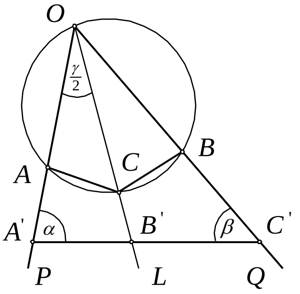
ветно, кои пак се пресликуваат во самите себе бидејки минуваат низ центарот на инверзијата I. Тогаш четириаголникот $AD'B'C'$ е паралелограм и точката $E'\in AB'$. Бидејки $\overline{AE'}\cdot\overline{AE}=r^2=\overline{AB'}\cdot\overline{AB}$ и $\overline{AE}=2\cdot\overline{AB}$, добиваме $\overline{AE'}=\frac{\overline{AB'}}{2}$ и E' е средина на $\overline{AB'}$, т.е. $\overline{AB'}\cap\overline{D'C'}=\{E\}$. Значи, ако D', E', C' се колинеарни, тогаш D, E, C и A се точки од иста кружница.

Задача 11. Нека OL е симетрала на аголот $\angle POQ$. Низ точката O нека минува кружница k, при што $k\cap OP=\{A\}$, $k\cap OQ=\{B\}$, $k\cap OL=\{C\}$. Докажи дека за произволната кружница k важи дека пропорцијата $\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{\overline{OC}}$ е константа.

Решение. Да избереме инверзија $I(O,r)$ (црт. 21). При тоа кружницата k ќе се преслика во права и нека $I(A)=A'$, $I(B)=B'$, $I(C)=C'$, значи тоа ќе биде правата што минува низ точките A', B', C'. Нека означиме $\angle AOB=\gamma$, $\angle OA'B'=\alpha$ и $\angle OB'A'=\beta$. Освен тоа од инверзијата добиваме:

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OC}\cdot\overline{OC'} \text{ и } \overline{OC}\cdot\overline{OC'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'},$$

а одовде имаме: $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}$, односно $\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}}$. И, на крајот користејки ја синусната теорема ќе дојдеме до следното:



Црт. 21

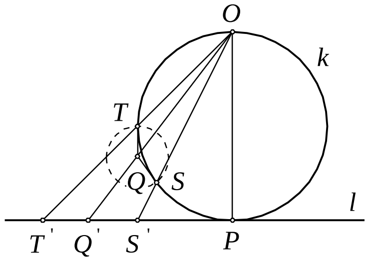
$$\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}+\frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma/2)}+\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma/2)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2})}+\frac{\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}+\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}=2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}$$

Вредноста $2\cos\frac{\gamma}{2}$ е константа, а тоа требаше и да се докаже.

Задача 12. Кружницата k ја допира правата l во точката P. Нека точката $O\in k$ е дијаметрално спротивна на P. Потоа, нека точките T и S се произволни точки од кружницата k, за кои $OT\cap l=\{T'\}$ и $OS\cap l=\{S'\}$. На крај, во точките S и T да повлечеме две тангенти на кружницата k и тие нека се сечат во точката Q, за која $OQ\cap l=\{Q'\}$. Докажи дека точката Q' е средина на отсечката $\overline{T'S'}$, (црт.22).

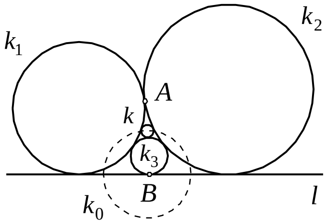
Решение. Да избереме инверзија $I\ (O,\overline{OP})$. Тогаш $I(k)=l$, додека $I(T)=T'$ и $I(S)=S'$ се точки од правата l. Нека кружницата k_1 (Q,



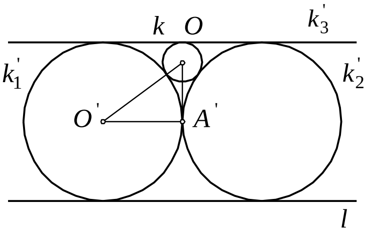
Црт.22

$\overline{QS}=\overline{QT}$) ја пресликуваме со инверзија I со центар во точка X, која секако припаѓа на полуправата OQ. И, бидејќи $k_1 \perp k$, тогаш $I(k_1) = l$, т.е. l минува низ центарот X. Ова значи дека $X=Q'$ и $\overline{XT'}=\overline{XS'}$, па јасно е дека Q' е средина на $\overline{T'S'}$.

Задача 13. Кружниците k_1, k_2, k_3 се допираат меѓу себе, а ја допираат и правата l. Четвртата кружница k ги допира k_1, k_2, k_3, но $k \cap l = \varnothing$. Најди го растојанието од центарот на кружницата k до правата l, ако радиусот на k е 1. (Црт. 23 а,б).



Црт. 23а

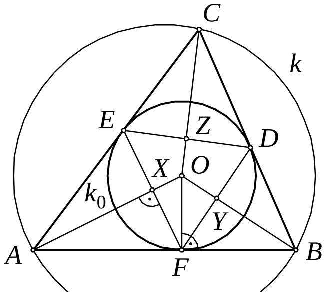


Црт. 23б

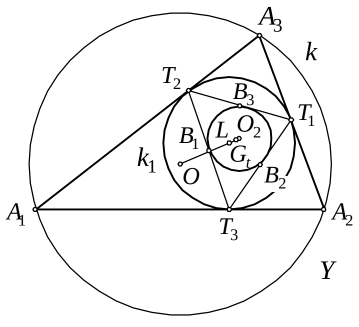
Решение. Нека $k_3 \cap l = \{B\}$ и да избереме R да биде радиусот на кружницата k_0 $(B, R) \perp k$. Сега да избереме инверзија $I(B, R)$. Тогаш $I(k) = k(O, 1)$, $I(l) = l$, а $I(k_3)=k_3'$ е права паралелна со правата l, додека $I(k_1)=k_1'(O', R')$ и $I(k_2)=k_2'$ се две кружници кои ги допираат l, k, k_3' а се допираат и меѓу себе и имаат еднакви радиуси R'. Ако A' е нивната допирна точка, тогаш од $\Delta O'A'O$ имаме: $R'^2+(R'-1)^2=(R'+1)^2$. Одовде добиваме дека $R'=4$, додека бараното растојание е $2R'-1=7$.

Задача 14. Впишаната кружница во ΔABC ги допира страните $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$ во точките D, E и F соодветно. Нека со X, Y и Z ги означиме средините на отсечките $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ и $\overline{DE}$ соодветно. Да се докаже дека центрите на впишаната кружница во ΔABC, опишаната околу ΔABC и опишаната околу ΔXYZ лежат на една права.

Решение. Ќе ја искористиме забелешката на Т.6 дека центрите на кружницата на инверзија, кружницата оригинал и кружницата слика лежат на иста права. Сега да го означиме со O центарот на впишаната кружница k_0 во ΔABC, (црт 24). Јасно е, дека дека AO ја сече EF во точката X и $\angle OFA = \angle FXA = 90^\circ$. Тогаш $\Delta AFO \sim \Delta FXO$, бидејќи и $\angle O$ им е заеднички. Одовде следува дека $\overline{OF} : \overline{OA} = \overline{OX} : \overline{OF}$ односно имаме $\overline{OX} \cdot \overline{OA} = \overline{OF}^2$. Ова значи дека точките A и X



Црт. 24



Црт. 25

се инверзни во однос на точката O. Аналогно се докажува дека и точките B и Y, како и C и Z се исто така инверзни во однос на O. Значи дека кружницата опишана околу ΔXYZ е инверзна слика на кружницата опишана околу ΔABC со центар на инверзија во точката O, па нивните центри лежат на иста права со точката O. Тоа требаше и да се докаже.

Задача 15. Да се докаже дека, ако L и O се центри на вписаната и опишаната кружница со радиуси r и R во даден триаголник A_1 A_2 A_3, а T_1, T_2 и T_3 се допирните точки на вписаната кружница со страните на тој триаголник, важи $\overrightarrow{LT_1}+\overrightarrow{LT_2}+\overrightarrow{LT_3}=\frac{r}{R}\overrightarrow{OL}$. (Црт. 25.)

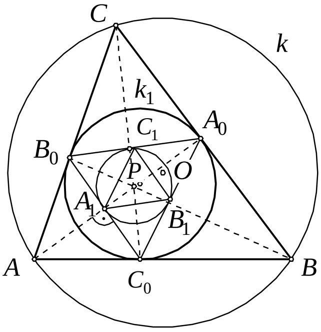
Решение. Нека k_1 и k се соодветно вписаната и опишаната кружница на дадениот $\Delta A_1A_2A_3$ и нека B_1, B_2, B_3 и G_t се соодветно средините на страните $\overline{T_2T_3}$, $\overline{T_3T_1}$, $\overline{T_1T_2}$ и тежиштето на $\Delta T_1T_2T_3$. Најнапред да разгледаме хомотетија H (G_t , -2). При тоа добиваме H (B_j) = T_j за j = 1, 2, 3. Тогаш ако k_2 е опишаната кружница околу $\Delta B_1B_2B_3$, а O_2 и r_2 се соодветно центарот и нејзиниот радиус, ќе имаме H (k_2) = k_1, од каде $r = 2r_2$ и $\overrightarrow{G_tL}=-2\overrightarrow{G_tO_2}$ (*). Сега ќе разгледаме ин-верзија I (O, r^2) и наоѓаме I (A_j) = B_j за j = 1, 2, 3. Тогаш I (k) = k_2 од каде $\frac{\overrightarrow{OL}}{\overrightarrow{LO_2}}=\frac{R}{r_2}$, т.е. $\overrightarrow{LO_2}=\frac{r}{2R}\cdot\overrightarrow{OL}$. Од последното равенство и од (*) следува:

$$3\overrightarrow{LG_t}=2\overrightarrow{LG_t}+\overrightarrow{LG_t}=2\overrightarrow{LG_t}+2\overrightarrow{G_tO_2}=2\overrightarrow{LO_2}=\frac{r}{R}\overrightarrow{OL}.$$

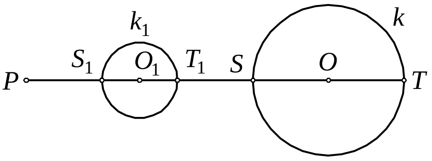
Значи имаме $\overrightarrow{LT_1}+\overrightarrow{LT_2}+\overrightarrow{LT_3}=3\overrightarrow{LG_t}=\frac{r}{R}\overrightarrow{OL}$, што требаше и да се докаже.

Задача 16. Најди го растојанието меѓу центрот P на вписаната и центарот O на опишаната кружница во ΔABC, ако нивните радиуси се r и R соодветно. (црт. 26 а,б)

Решение. Нека A_0, B_0, C_0 се допирните точки на впишаната кружница k_P (P, r) со $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ соодветно. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на соодветните страни на триаголникот $A_0B_0C_0$. Да забележиме дека: $\{A_1\} = PA \cap C_0B_0$, и слично за B_1 и C_1. Сега избираме инверзија I (P, r). Бидејки $PA \perp C_0B_0$, следува I (A) = A_1, и слично I (B) = B_1, I (C) = C_1. Ова значи дека опишаната кружница околу ΔABC, кружницата k (O, R) со инверзијата I, се пресликува во опишаната кружница околу $\Delta A_1B_1C_1$, кружницата $k_1(O_1, r_1)$, т.е. I (k)=k_1.



Црт. 26а



Црт. 26б

Да забележиме дека при тоа имаме r_1=r/2. Ова е доволно да го одредиме растојанието меѓу O и P. Поопшто, од инверзијата I (P, r), за тоа растојание d(=OP) важи: $r_1 \cdot |\, d^2 – R^2 \,| = r^2 \cdot R$. Од друга страна за дијаметрално спротивните точки S, T $\in PO \cap k$ и нивните слики S_1, $T_1 \in PO \cap k_1$, (црт. 25б) важи следното: $\overline{S_1T_1} = \frac{\overline{ST} \cdot r^2}{\overline{PS} \cdot \overline{PT}}$, од каде имаме: $2r_1 = \frac{2R \cdot r^2}{|d-R|(d+R)}$. Заменувајки r_1 = r/2 и од очигледната релација R > d, добиваме: $d = \sqrt{R\,(R-2r)}$. Да забележиме дека за d = 0, имаме рамностран триаголник ABC и R=2r.

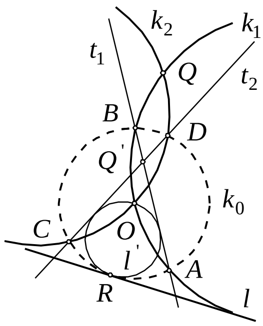
Сега ќе разгледаме две конструктивни задачи од т.н. Аполониеви задачи (останатите му се препуштат на поставување и решавање на читателот). Аполониј Пергиски (околу 265-170 год. п.н.е.) ја поставил следната задача:

Да се конструира кружница која допира три дадени кружници.

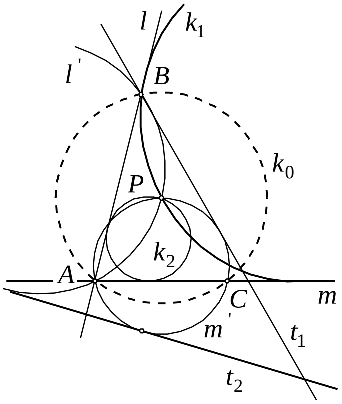
Разгледувајки ги точката и правата како кружници добиваме 9 посебни случаи на оваа задача за сите можни варијанти. Овие задачи можат да се решат и со помош на елементарните геометриски методи, но користејки погодно избрана инверзија, задачите се сведуваат на многу едноставни конструкции, како што е конструкција на тангента на кружница, конструкција на кружница низ три точки или слично.

Задача 17. Да се конструира кружница која минува низ две дадени точки и допира дадена права.

Решение. Нека тоа се точките O и Q и правата l, (црт. 27). Да повлечеме нормала од точката O до правата l и нивната пресечна точка нека ја означиме со R. Сега да избереме инверзија со центар во точката O и радиус $\overline{OR}$ на кружницата на



Црт. 27



Црт. 28

инверзија k_0. При оваа инверзија правата l се пресликува во кружница l', а точката Q во точката Q'. И бидејки бараната кружница треба да ја допира правата l, според Т. 7 и нејзината слика, кружницата l', ќе ја допира сликата на бараната кружница. Според тоа сликата на бараната кружница ќе биде тангентата до l', повлечена од точката Q'. Бидејки такви тангенти има две t_1 и t_2 ќе има и две кружници што ги задоволуваат условите од задачата: $k_1=I(t_1)$ и $k_2=I(t_2)$. Јасно е дека пресечните точки A и B на t_1 и C и D на t_2 со k_0 се неподвижни, па бараните кружници k_1 и k_2 ќе минуваат низ точката Q и низ точките A и B, односно C и D, соодветно и секако ќе поминуваат и низ точката O.

Задача 18. Да се конструира кружница која минува низ дадена точка и допира две дадени прави.

Решение. Нека тоа се точката P и правите l и m кои во овој случај се сечат во точката A, (црт. 28). Да избереме инверзија I со центар во точката P и радиус $\overline{PA}$ на кружницата на инверзијата k_0, пресеците на правите l и m со k_0 нека се точките B и C соодветно. При оваа инверзија правите l и m се пресликуваат во кружниците l' и m', кои според Т. 5 минуваат низ центарот на инверзијата P како и низ точките A и B односно A и C, соодветно, кои при инверзијата остануваат неподвижни бидејки припаѓаат на кружницата на инверзијата k_0. И бидејки бараната кружница треба да ги допира правите l и m, според Т. 7 и нивните слики кружниците l' и m' ќе бидат допрени од сликата на бараната кружница. Според тоа сликата на бараната кружница ќе биде заедничката тангента на l' и m'.

Бидејки такви тангенти има две t_1 и t_2 ќе има и две кружници што ги задоволуваат условите од задачата $k_1=I\ (t_1)$ и $k_2=I\ (t_2)$. Бараната кружница (k_1) лесно ќе ја конструираме, бидејки t_1 ја сече k_0, па таа минува низ точката P и низ пресеците на t_1 со k_0. За конкретната поставеност на правите l и m како и на точката P на цртежот, t_2 не ја сече k_0, па затоа другата кружница (k_2) ќе ја конструираме така што ќе минува низ точката P и низ други две точки, слики на произволни точки од t_2 добиени со основната конструкција за добивање на слики на точки при инверзија.

7. Задачи за самостојна работа

Задача 19. Во кружница k со радиус 5 избрана е отсечка $\overline{AB}$ со должина 8. Кружницата k_1 ја допира отсечката $\overline{AB}$ и еден од лаците со крајни точки A и B. Кружницата k_2 ги допира отсечката $\overline{AB}$ во точката A и кружницата k_1, додека кружницата k_3 ги допира отсечката $\overline{AB}$ во точката B и кружницата k_1. Да се докаже дека кружниците k_2 и k_3 се допираат. (Упат.: Разгледувај $I\,(A,\ \overline{AB}\,)$.)

Задача 20. Точката O е внатрешна за отсечката $\overline{AB}$. Кружниците k_1, k_2, k_3 се со дијаметри $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ и $\overline{AB}$. Дадена е кружница што ги допира k_1, k_2, k_3 и допирната точка со k_3 и е C. Да се докаже дека $\angle ACO = 45^\circ$.

(*Упатство*: Разгледувај инверзија со центар во точката A.)

Задача 21. Дадени се права и кружница кои немаат заеднички точки. Докажи дека постои инверзија која што нив ги пресликува во две концентрични кружници.

Задача 22. Да се конструира кружница која што минува низ дадена точка, а ортогонално сече две дадени кружници.

Задача 23. Да се конструира кружница која што минува низ дадена точка и допира две дадени кружници, (Аполониева задача).

(Останатите Аполониеви задачи му се препуштат на поставување и решавање на читателот.)

Литература

1. **Байчева, Ц., Кирилова К.:** Приложение на инверсията при решаване на задачи, Велико Търново.

2. **Петров, К.:** Аполониеви задачи, Наука и изкуство, София, 1969.

3. **Самарџиски, А.:** Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, (1988).

4. ***Schrek, D.J.E.:*** Beknopte Analytische Meetkunde, P. Noordhoff N.V., Grongingen (1964).

5. ***Stankova-Frenkel Zvezdalina:*** Inversion in the Plane, UC BERKELEY MATH CIRCLE, (1998-1999).