Вангел Каруловски

ЕДЕН АЛГЕБАРСКИ МЕТОД ЗА РЕШАВАЊЕ НА КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

1.Апсолутна вредност ан реален број

Во средношколските учебници се сретнуваме со следната дефинција за апсолутна вредност на реален број:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Релацијата (1) експлицитно можеме да ја искажеме на следниуот начин:

$$(\forall x \in \mathbf{R})(x \geq 0 \Rightarrow |x| = x) \vee (x < 0 \Rightarrow |x| = -x) \tag{2}$$

Пример 1.а) $5 > 0 \Rightarrow |5| = 5$, **б)** $-5 < 0 \Rightarrow |-5| = 5$.

Да забележиме дека релациите (1) и (2) ни овозможуваат да се ослободиме од знакот на апсолутна вредност. Следната дефиниција е еквивалентна на (1) и (2) и истата ќе ја користиме во натамошните разгледувања.

Дефинција 1.За секој $x \in \mathbf{R}$ и за секој $y \geq 0$ важи

$$|x| = y \Leftrightarrow [(x \geq 0 \Rightarrow y = x) \vee (x < 0 \Rightarrow y = -x)]. \tag{3}$$

2.Квадратен корен од реален број

Дефиниција 2. Нека $x \geq 0$ е реален број. Позитивниот број y го нарекуваме квадратен корен од x, во ознака $\sqrt{x}$ или $x^{\frac{1}{2}}$, ако

$$x = y^2. \tag{4}$$

Дефинцијата 2 можеме да ја запишеме во облик:

$$(\forall x \geq 0)[\sqrt{x} = y \Leftrightarrow (y \geq 0 \wedge x = y^2)]. \tag{5}$$

Во претходната дефинција не е прецизирано дали воопшто постои квадратен корен од секој позитивен реален број. Одговор на ова прашање дава следната теорема, чиј доказ поради тежината го изоставуваме.

Теорема 1.За секој реален број $x \geq 0$ постои еден и само еден реален број $y \geq 0$, таков што $x = y^2$, т.е.

$$(\forall x \geq 0)(\exists! y)(y \geq 0 \wedge x = y^2). \tag{6}$$

Често пати, наместо релацијата (6) може да се сретне следната релација

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x \tag{7}$$

која не е коректна, а нејзината неточност може да се види од следниот пример.

Пример 2.Ако важи релацијата (7), тогаш од $4 = 2^2$ добиваме $\sqrt{4} = 2$, а од $4 = (-2)^2$ следува $\sqrt{4} = -2$. Според тоа, $2 = \sqrt{4} = -2$, што противречи на $2 > -2$.

Од досега изнесеното е очигледно дека неточноста во (7) е поврзана со единственоста на квадратниот корен од позитивен реален број.

3.Квадратен корен и апсолутна вредност на реален број

Теорема 2. За секој $x \in \mathbf{R}$ важи $\sqrt{x^2} = |x|$.

Доказ.Според (5) и (3) имаме:

$$\sqrt{x^2} = t \Leftrightarrow (t \geq 0 \wedge x^2 = t^2) \Leftrightarrow (t \geq 0 \wedge x^2 - t^2 = 0) \Leftrightarrow (t \geq 0 \wedge (x-t)(x+t) = 0) \Leftrightarrow [t \geq 0 \wedge (x = t \vee x = -t)]$$

$$\Leftrightarrow [t \geq 0 \wedge x = t] \vee [t \geq 0, x = -t] \Leftrightarrow [x \geq 0 \wedge x = t] \vee [x < 0 \wedge x = -t] \Leftrightarrow |x| = t.$$

Пример 3.а) за $x = 2$ имаме: $\sqrt{2^2} = \sqrt{x^2} = |x| = |2| = 2$.

б)За $x = -2$ имаме $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{x^2} = |x| = |-2| = -(-2) = 2$.

4.Апсолутна вредност на двојни неравенки

Нека $A(x), B(x), C(x)$ се алгебарски изрази со една реално независна променлива, така што

$$A(x) < B(x) \wedge B(x) < C(x). \tag{8}$$

Системот (8) можеме да го запишеме во обликот

$$A(x) < B(x) < C(x). \tag{9}$$

Записот (9) ќе го наречеме двојна неравенка. За двојните неравенки важат истите својства како и за обичните неравенки, т.е. важи следната теорема, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Теорема 3.а) $A(x) < B(x) < C(x) \Leftrightarrow sA(x) < sB(x) < sC(x)$, $s > 0$.

б) $A(x) < B(x) < C(x) \Leftrightarrow sA(x) > sB(x) > sC(x)$, $s < 0$.

в) $A(x) < B(x) < C(x) \Leftrightarrow A(x) + D(x) < B(x) + D(x) < C(x) + D(x)$.

Пример 4.Решете ги двојните неравенки

а) $-1 < 2x - 3 < 2$, **б)** $2 \le 5 - 2x < 3$.

Решение.а)Според теоремата (3) имаме:

$$-1 < 2x - 3 < 2 \Leftrightarrow 3 - 1 < 2x < 3 + 2 \Leftrightarrow 2 < 2x < 5 \Leftrightarrow 1 < x < 1{,}5 .$$

Значи, решение на дадената неравенка е множеството

$$M = \{x / x \in \mathbf{R}, 1 < x < 2{,}5\} = \left(1 , \frac{1}{2}\right) .$$

б) Аналогно како под а) добиваме

$$2 \le 5 - 2x < 3 \Leftrightarrow 2 - 5 \le -2x < 3 - 5 \Leftrightarrow -3 \le -2x < -2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \ge x > 1 .$$

Значи, решение на дадената неравенка е множеството

$$M = \{x / x \in \mathbf{R}, 1 < x \le 1{,}5\} = \left(1 , \frac{3}{2}\right] .$$

Теорема 4.За секој $x \in \mathbf{R}$ и за секој $a > 0$ важи

$$|\, x \,| < a \Leftrightarrow -a < x < a . \tag{10}$$

Доказ.Нека $a > 0$.Тогаш,

$$|\, x \,| < a \Leftrightarrow (x \ge 0 \wedge x < a) \vee (x < 0 \wedge -x < a) \Leftrightarrow (0 \le x < a) \vee (x < 0 \wedge x > -a) \Leftrightarrow (-a < x < 0) \vee (0 \le x < a) \Leftrightarrow -a < x < a .$$

Пример. Решете ги неравенките

а) $|\, x - 4 \,| < 5$, б) $|\, x - 6 \,| \le 7$.

Решение.а)Според теоремата 4 имаме:

$$|\, x - 4 \,| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 4 < 5 \Leftrightarrow -5 + 4 < x < 5 + 4 \Leftrightarrow -1 < x < 9 .$$

Значи, решение на дадената неравенка е множеството

$$M = \{x / x \in \mathbf{R}, -1 < x < 9\} = (-1 , 9) .$$

б)Аналогно како под а) добиваме

$$|\, x - 6 \,| \le 7 \Leftrightarrow -7 \le x - 6 \le 7 \Leftrightarrow -1 \le x \le 13 .$$

Теорема 5.За секој $x \in \mathbf{R}$ и за секој $a > 0$ важи

$$|\, x \,| > a \Leftrightarrow (x < -a \vee x > a) . \tag{11}$$

Доказ.Нека $a > 0$. Тогаш

$$|\, x \,| > a \Leftrightarrow (x \ge 0 \wedge x > a) \vee (x < 0 \wedge -x > a) \Leftrightarrow (x < 0 \wedge x < -a) \vee (x \ge 0 \wedge x > a) \Leftrightarrow x < -a \vee x > a .$$

Пример 6.Решете ја неравенката $|\, x - 5 \,| > 4$.

Решение.Според теорема 5 имаме:

$$|\, x - 5 \,| > 4 \Leftrightarrow (x - 5 < -4 \vee x - 5 > 4) \Leftrightarrow (x < 1 \vee x > 9) .$$

Значи, решение на дадената неравенка е множеството

$$M = \{x / x \in \mathbf{R}, x < 1 \vee x > 9\} = (-\infty, 1) \cup (9, +\infty) .$$

Пример 7.Решете ги неравенките

а) $|\, 2x - 1 \,| \le 4$, б) $|\, 1 - 2x \,| \ge 6$.

Решение.а)Според теорема 4 и теорема 3 имаме:

$$|\, 2x - 1 \,| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le 2x - 1 \le 4 \Leftrightarrow -4 + 1 \le 2x \le 4 + 1 \Leftrightarrow -3 \le 2x \le 5 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2} ,$$

т.е. решение на дадената неравенка е множеството

$$M = \left\{x / x \in \mathbf{R}, -\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] .$$

б)Според теорема 3 и теорема 5 имаме:

$$|\, 1 - 2x \,| \ge 6 \Leftrightarrow 1 - 2x \le -6 \vee 1 - 2x \ge 6 \Leftrightarrow -2x \le -7 \vee -2x \ge 5 \Leftrightarrow x \ge \frac{7}{2} \vee x \le -\frac{5}{2} ,$$

т.е. решение на дадената неравенка е множеството

$$M = \left\{ x / x \in \mathbf{R} , -\frac{5}{2} \ge x \vee x \ge \frac{7}{2} \right\} = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2} , +\infty\right) .$$

5.Алгебарско решавање на квадратни неравенки

Во оваа точка ќе ги искористиме претходните сознанија за да презентираме еден алгебарски метод за решавање на квадратни неравенки. Пред да ги разгледаме примерите со кои методот ќе биде илустриран, без доказ ќе наведеме едно својство на квадратната функција, кое својство повеќе пати ќе го користиме.

Теорема 6. Ако $x_1 \ge 0, x_2 > 0$ и $x_1 < x_2$, тогаш $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

Пример 8.Решете ја неравенката $x^2 < 1$.

Решение.Бидејќи $x^2>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$ и $1>0$ од теоремата 6 добиваме $\sqrt{x^2}<1$. Според теорема 2 имаме $|x|<1$, па од теорема 4 следува $-1<x<1$.

Значи, решение на неравенката е множеството

$M=\{x/x\in\mathbb{R},-1<x<1\}=(-1,1)$.

Пример 9.Решете ја неравенката $x^2-4x\le 0$.

Решение.Имаме,

$$x^2-4x\le 0 \iff x^2-4x+4\le 4 \iff (x-2)^2\le 4 \iff \sqrt{(x-2)^2}\le 2 \iff |x-2|\le 2 \iff -2\le x-2\le 2 \iff 0\le x\le 4 .$$

Конечно, решение на дадената неравенка е множеството

$M=\{x/x\in\mathbb{R},0\le x<4\}=[0,4]$.

Пример 10. Решете ја неравенката $4x^2-4x-8\ge 0$.

Решение.Имаме,

$$4x^2-4x-8\ge 0 \iff 4x^2-4x+1\ge 9 \iff (2x-1)^2\ge 9 \iff \sqrt{(2x-1)^2}\ge 3 \iff |2x-1|\ge 3 \iff 2x-1\ge 3\vee 2x-1\le -3 \iff x\le -1\vee x\ge 2$$

Значи, решение на дадената неравенка е множеството

$M=\{x/x\in\mathbb{R},x\le -1\vee x\ge 2\}=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

Пример 11. Решете ја неравенката $x^2-5x+6\le 0$.

Решение.Имаме

$$x^2-5x+6\le 0 \iff x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6\le 0 \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25-24}{4}\le 0 \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2\le\frac{1}{4} \iff$$

$$\iff \left|x-\frac{5}{2}\right|\le\frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2}\le x-\frac{5}{2}\le\frac{1}{2} \iff 2\le x\le 3 ,$$

т.е. решение на дадената неравенка е множеството

$M=\{x/x\in\mathbb{R},2\le x\le 3\}=[2,3]$.

Пример 12.Решете ги неравенките

а) $x^2\ge -9$, б) $x^2-x+1\ge 0$, в) $x^2\le -9$.

Решение.а)Бидејќи $-9<0$ не можеме да ја примениме теорема 6. Од својствата на реалните броеви имаме $x^2\ge 0$, за секој реален број x и како $0>-9$ добиваме $x^2\ge 0>-9$, за секој $x\in\mathbb{R}$, т.е. решение на дадената рљавенка е множеството реални броеви $\mathbb{R}$.

б)Имаме, $x^2-x+1\ge 0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\ge 0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge -\frac{3}{4}$

Аналогно како под а) заклучуваме дека решение на почетната неравенка се сите реални броеви $\mathbb{R}$.

в)Не постои реален број x, така што $x^2\le -9$ (зошто?). Значи, множеството решенија на дадената равенка е $M=\varnothing$.

6.Задачи за вежба

Задача 1.Решете ги неравенките

а) $|x|\le 0$, б) $|x|<0$, в) $|x|\le -2$, г) $|x|>0$.

(Одговор: а) $\{0\}$, б) $\varnothing$, в) $\varnothing$, г) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$)

Задача 2.Решете ги неравенките

а) $d>0\wedge|mx+n|<d$, б) $d>0\wedge|mx+n|>d$.

(Одговор: а) $\begin{cases}-\frac{d+n}{m}<x<-\frac{n-d}{m}, & m>0\\ -\frac{n-d}{m}<x<-\frac{d+n}{m}, & m<0\end{cases}$, б) $\begin{cases}x<-\frac{n+d}{m}\vee x>-\frac{n-d}{m}, & m>0\\ x<-\frac{n-d}{m}\vee x>-\frac{n+d}{m}, & m<0\end{cases}$

Задача 3.Решете ги неравенките:

а) $x^2>1$, б) $x^2-4x-5\le 0$, в) $4x^2-2x-2\ge 0$.

(Одговор:а) $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$, б) $[-1,5]$, в) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.)