Monday, 21. September 2020

Problem 1. Consider the convex quadrilateral $ABCD$. The point P is in the interior of $ABCD$. The following ratio equalities hold:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Prove that the following three lines meet in a point: the internal bisectors of angles $\angle ADP$ and $\angle PCB$ and the perpendicular bisector of segment AB.

Problem 2. The real numbers a, b, c, d are such that $a \geq b \geq c \geq d > 0$ and $a + b + c + d = 1$. Prove that

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Problem 3. There are $4n$ pebbles of weights $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Each pebble is coloured in one of n colours and there are four pebbles of each colour. Show that we can arrange the pebbles into two piles so that the following two conditions are both satisfied:

- The total weights of both piles are the same.
- Each pile contains two pebbles of each colour.

понедельник, 21 сентября 2020 г.

Задача 1. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P, такая что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ и серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Задача 2. Даны вещественные числа a, b, c, d, такие что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Задача 3. Имеется $4n$ камушков массами $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Каждый из камушков покрашен в один из n цветов, причём имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равного суммарного веса так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.