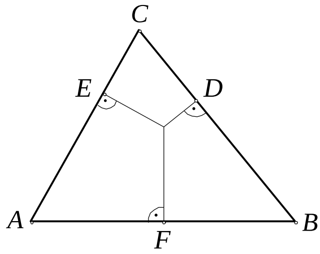
XXII олимпијада

1. Нека P е внатрешна точка во $\triangle ABC$ е нека D, E и F се нејзините ортогонални проекции на правите BC, CA и $AB,$ соодветно. Најди ги сите точки P за кои збирот

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}}+\frac{\overline{CA}}{\overline{PE}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$$

е најмал.



Црт. 22.1.

Решение. Ако ги воведеме ознаките $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}$, тогаш треба да го определиме минимумот на изразот

$$S=\frac{a}{\overline{PD}}+\frac{b}{\overline{PE}}+\frac{c}{\overline{PF}}.$$

Ако со P ја означиме плоштината на триаголникот ABC, тогаш

$$2P=a\cdot\overline{PD}+b\cdot\overline{PE}+c\cdot\overline{PF}$$

па според тоа

$$\begin{aligned}2PS&=a^2+b^2+c^2+bc(\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}+\frac{\overline{PE}}{\overline{PF}})+ca(\frac{\overline{PD}}{\overline{PF}}+\frac{\overline{PF}}{\overline{PD}})+ca(\frac{\overline{PD}}{\overline{PE}}+\frac{\overline{PE}}{\overline{PD}})\\&\geq a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)\\&=(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

Равенство е исполнето ако и само ако $\overline{PD}=\overline{PE}=\overline{PF}$, т.е. ако P е центар на кружницата впишана во $\triangle ABC$. Тогаш дадениот израз има минимална вредност

$$S_{\min}=\frac{(a+b+c)^2}{2P}.$$

2. Дадени се броевите n и r $(1\leq r\leq n)$. Ги формираме сите подмножества од $\{1,2,...,n\}$ со r елементи и за секое подмножество го наоѓаме најмалиот елемент. Со $f(n,r)$ ја означуваме аритметичката средина на сите така добиени броеви. Докажи дека $f(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$.

Решение. Бројот $k\,(=1,2,...,n-r+1)$ е минимален елемент во $\binom{n-k}{r-1}$ подмножествата со r елементни од множеството $\{1,2,...,n\}$, па затоа

$$f(n,r)=\frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{k=1}^{n-r+1}k\binom{n-k}{r-1}.$$

Со индукција се докажува дека

$$\sum_{k=1}^{n-r+1}k\binom{n-k}{r-1}=\binom{n+1}{r+1}.$$

Според тоа имаме

$$f(n,r)=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}.$$

3. Нека $m,n\in\mathbb{N}$, $(1\le m\le 1981, 1\le n\le 1981)$ се такви што ја задоволуваат равенката

$$(n^2-mn-m^2)^2=1.$$

Најди ја најголемата вредност на збирот m^2+n^2.

Решение. За $m=1$, n може да биде 1 или 2. Ако $m>1$, мора да е $n>m$, бидејќи $n(n-m)=m^2\pm 1>0$. Воведуваме ознака $p=n-m>0$. Непосредно се проверува дека ако (n,m) е решение на равенката, тогаш и (m,p) е исто така нејзино решение. Важи и обратното: ако (n,m) е решение, тогаш и $(m+n,n)$ е решение на равенката. Затоа решенија се парови последователни Фибоначиеви броеви:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...$$

Бараната максимална вредност е 987^2+1597^2.

4. (a) Најди ги сите природни броеви n, $n\ge 3$ за кои постои множество од n последователни природни броеви со следното својство: најголемиот од овие броеви е делител на најмалиот заеднички содржател на останатите $n-1$ броеви.

(b) За кои природни броеви n, $n\ge 3$ постои точно едно множество со ова својство?

Решение. Нека низата

$$a-n+1, a-n+2, a-n+3,....,a-1,a \qquad (1)$$

природни броеви ги задоволува условите на задачата, т.е. нека

$$a\,|\,\mathrm{NZS}(a-n+1,...,a-1)$$

Нека $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ е канонична факторизација на бројот a на прости множители ($p_1<p_2<...<p_r$, $\alpha_j>0$ за $j=1,2,...,r$). Тогаш за секој $j\in\{1,2,...,r\}$ постои $m\in\{1,2,...,n-1\}$, таков што $p_j^{\alpha_j}\,|\,(a-m)$. Бидејќи $p_j^{\alpha_j}\,|a$, добиваме дека $p_j^{\alpha_j}\le n-1$ за секој $j\in\{1,2,...,r\}$. Ако $r=1$, тогаш

$$n\le a=p_1^{\alpha_1}\le n-1,$$

што не е можно. Значи, $r\ge 2$. Според тоа, постојат барем два прости броја помали од n, од што следува дека $n\ge 4$.

Ќе докажеме дека за секој $n \geq 4$ постои низа (1) која што ги задоволува условите на задачата, а за $n \geq 5$ постојат барем две такви низи. Според тоа, одговор на прашањето под (a) е $n \geq 4$, а одговор на прашањето под (b) е $n = 4$.

Ако $n = 4$, тогаш $p_1^{\alpha_1} \leq 3$, $p_2^{\alpha_2} \leq 3$, па затоа важи $r = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, т.е. низа од облик (1) која што ги задоволува условите на задачата е 3, 4, 5, 6.

За $n = 5$ постојат две такви низи: 2, 3, 4, 5, 6 и 8, 9, 10, 11, 12.

Нека $n \geq 6$. Со r, s, t да ги означиме природните броеви кои ги исполнуваат неравенствата $2^r \leq n-1 < 2^{r+1}$, $3^s \leq n-1 < 3^{s+1}$, $5^t \leq n-1 < 5^{t+1}$. Нека во низата (1) $a = 2^r 3^s$, односно $a = 2^r 5^t$. Тогаш

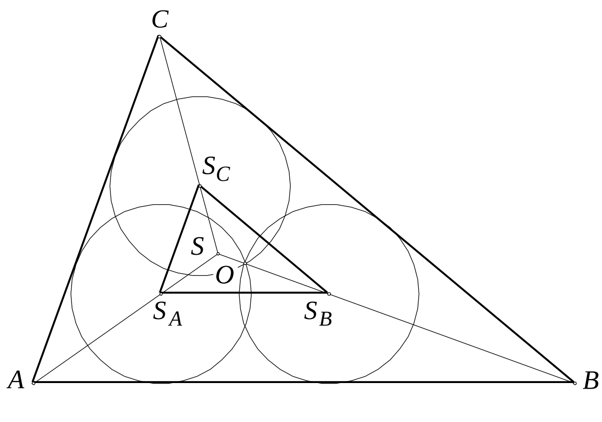
$$n-1 < 2^{r+1} < 2^r 3 \leq 2^r 3^s = a$$

$$n-1 < 2^{r+1} < 2^r 5 \leq 2^r 5^t = a$$

Јасно, низите (1) за вака избран број a ги задоволуваат условите на задачата.

5. Дадени се три кружници со еднакви радиуси и со заедничка точка O, кои што лежат во $\triangle ABC$. Секоја од овие кружници допира две страни од $\triangle ABC$. Докажи дека точката O и центрите на опишаната и впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежат на иста права.

Решение. Нека S_A, S_B, S_C се центрите на дадените кружници, така што S_A лежи на симетралата на аголот A од триаголникот ABC, итн. Тогаш, $S_A S_B \parallel AB$, $S_B S_C \parallel BC$, $S_C S_A \parallel CA$ и симетралите на аглите на $\triangle ABC$ се воедно симетрали и на аглите на $\triangle S_A S_B S_C$. Овие два триаголника имаат ист



Црт. 22.2.

центар на впишана кружница, кој го означуваме со S . Точката S е центар на хомотетија h која го пресликува $\triangle S_A S_B S_C$ во $\triangle ABC$.

Точката O е подеднакво оддалечена од S_A, S_B, S_C , т.е. таа е центар на кружницата опишана околу триаголникот $\triangle S_A S_B S_C$. Хомотетијата h ја пресликува точката O во центарот S на кружницата опишана околу на триаголникот ABC . Затоа точката O , центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежат на една права.

6. Функцијата $f(x,y)$ ги задоволува условите

(1) $f(0,y)=y+1$,

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$ и

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

за секои x , $y\in\mathbb{N}_0$. Најди $f(4,1981)$.

Решение. Од (1) и (2) добиваме $f(1,0)=f(0,1)=2$. Од последното равенство и од (1) и (3) при $x=0$ добиваме

$$f(1,y+1)=f(0,f(1,y))=f(1,y)+1\text{, за } y\geq 0\text{,}$$

од што со индукција добиваме

$$f(1,y)=y+2\text{, за } y\geq 0\text{.} \tag{4}$$

Од (2) и (4) следува $f(2,0)=f(1,1)=3$. Од (3) за $x=1$ и (4) се добива

$$f(2,y+1)=f(1,f(2,y))=f(2,y)+2\text{, за } y\geq 0\text{.}$$

Користејќи ги овие два резултати со помош на математичка индукција добиваме

$$f(2,y)=2y+3\text{, за } y\geq 0\text{.} \tag{5}$$

Ако во (3) ставиме $x=2$, тогаш од (5) добиваме

$$f(3,y+1)=f(2,f(3,y))=2f(3,y)+3\text{, за } y\geq 0\text{.}$$

Од последното равенство и од равенството $f(3,0)=f(2,1)=5=2^3-3$ и со примена на индукција добиваме

$$f(3,y)=2^{y+3}-3\text{, за } y\geq 0\text{.} \tag{6}$$

Ако во (3) ставиме $x=3$, тогаш од (6) добиваме

$$f(3,y+1)=f(3,f(4,y))=2^{f(4,y)+3}-3\text{, за } y\geq 0\text{.}$$

Бидејќи $f(4,0)=f(3,1)=2^4-3$, со индукција добиваме

$$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3 \text{ (} y+3 \text{ двојки) за } y\geq 0\text{,}$$

односно

$$f(4,1981)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3 \qquad \text{(1984 двојки).}$$