

НЕКОЛКУ ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОД НЕРАВЕНСТВА

Ќе дадеме неколку интересни неравенства, кои главно се задавани или предлагани на олимпијадите по математика.

1 (ЈММО 2013). Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 3.$$

Решение. Бидејќи $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 3 - (\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c})$ доволно е да докажеме дека важи

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Јасно $\frac{a}{a+1} \leq \frac{a}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$, $\frac{b}{b+1} \leq \frac{\sqrt{b}}{2}$ и $\frac{c}{c+1} \leq \frac{c}{2}$, од каде се добива бараното неравенство. ■

2. Нека $0 \leq a, b, c \leq 1$ и $a + b + c = 2$. Докажи го неравенството

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq 1.$$

Решение. Точни се неравенствата:

$$(a-1)^2(b-1) \leq 0, (b-1)^2(c-1) \leq 0 \text{ и } (c-1)^2(a-1) \leq 0.$$

Според тоа имаме

$$a^2b \leq a^2 + 2ab - 2a - b + 1, b^2c \leq b^2 + 2bc - 2b - c + 1 \text{ и}$$

$$c^2a \leq c^2 + 2ca - 2c - a + 1.$$

Со собирање на последните три неравенства добиваме

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) - 3(a + b + c) + 3$$

$$= (a + b + c)^2 - 3(a + b + c) + 3 = 1. \blacksquare$$

3 (Предлог ММО 2013). Нека a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи $a + b + c = 1$. Докажи дека важи неравенството

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{ab}\right) \geq 1728.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{3bc} + \frac{1}{3bc} + \frac{1}{3bc} \geq 4 \frac{1}{\sqrt[4]{27ab^3c^3}} \text{ и } \frac{1}{27} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc.$$

Од последните две неравенства и аналогните неравенства добиваме:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{ab}\right) \geq 64 \frac{1}{\sqrt[4]{27ab^3c^3}} \frac{1}{\sqrt[4]{27a^3bc^3}} \frac{1}{\sqrt[4]{27a^3b^3c}} = \frac{64}{\sqrt[4]{3^9(abc)^7}}$$

$$\geq \frac{64}{\sqrt[4]{3^9(3^{-3})^7}} = 64\sqrt[4]{3^{12}} = 64 \cdot 27 = 1728. \blacksquare$$

4. (Предлог ЖМО 2013). Нека a, b и c се позитивни реални броеви за кои $ab + bc + ca = 6abc$. Докажи дека важи неравенството

$$a + b + c \geq 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right).$$

Решение. Од $ab + bc + ca = 6abc$ следува $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6$. Ако последното равенство последователно го помножиме со a, b, c добиваме

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 6a, 1 + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} = 6b \text{ и } 1 + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 6c.$$

Ги собираме горните три равенства и добиваме

$$3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right) = 6(a + b + c).$$

Понатаму,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \frac{b}{c} \frac{c}{a}} = 3,$$

и оттука

$$6(a + b + c) \geq 6 + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right) \text{ т.е. } a + b + c \geq 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right). \blacksquare$$

5 (ММО 2012). Ако a, b, c, d се позитивни реални броеви за кои $abcd = 1$, тогаш докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{bc+cd+da-1} + \frac{1}{ab+cd+da-1} + \frac{1}{ab+bc+da-1} + \frac{1}{ab+bc+cd-1} \leq 2.$$

Решение. Од $abcd = 1$ следува $bc = \frac{1}{ad}$. Ако искористиме $x + \frac{1}{x} \geq 2$, за $x > 0$, добиваме $bc + cd + da - 1 = \frac{1}{ad} + ad + cd - 1 \geq 2 + cd - 1 = 1 + cd$, т.е.

$$\frac{1}{bc+cd+da-1} \leq \frac{1}{1+cd}. \quad (1)$$

Слично

$$\frac{1}{ab+cd+da-1} \leq \frac{1}{1+ad}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{ab+bc+da-1} \leq \frac{1}{1+ab} \text{ и} \quad (3)$$

$$\frac{1}{ab+bc+cd-1} \leq \frac{1}{1+bc}. \quad (4)$$

Со собирање на (1), (2), (3) и (4) следува:

$$\begin{aligned} \frac{1}{bc+cd+da-1} + \frac{1}{ab+cd+da-1} + \frac{1}{ab+bc+da-1} + \frac{1}{ab+bc+cd-1} &\leq \frac{1}{1+cd} + \frac{1}{1+ad} + \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{ab}} + \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+\frac{1}{bc}} + \frac{1}{1+bc} \\ &= \frac{ab}{1+ab} + \frac{1}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{1}{1+bc} = 2. \blacksquare \end{aligned}$$

6 (ЖММО 2012). Нека a, b и c се позитивни реални броеви за кои важи $a + b + c + 2 = abc$. Докажи дека $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geq 2$.

Решение. Прво воочуваме дека важи следното равенство:
 $(a+1)(b+1) + (a+1)(c+1) + (b+1)(c+1) = a + b + c + (a + b + c + 2) + ab + ac + bc + 1$
 $= a + b + c + abc + ab + ac + bc + 1$
 $= (a+1)(b+1)(c+1)$.

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} = \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} - \left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{a+1}\right) \geq 3\sqrt{\frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{b+1}{c+1} \cdot \frac{c+1}{a+1}} - \left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{a+1}\right)$$

$$= 3 - \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 3 - 1 = 2.$$

Знак за равенството важи ако и само ако $a = b = c = 2$.

7. Предлог (ММО 2011). Нека a, b и c се позитивни реални броеви за кои важи $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Докажи дека важи неравенството $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 3$.

Решение. Од неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме
 $a^{\frac{5}{2}} a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{5}{2}} c^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{a^5 + b^5 + c^5} \sqrt{a + b + c}$, т.е. $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}$.

Сега, од неравенство на Чебишев имаме $\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$, и отука следува

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = 3. \blacksquare$$

8 (ММО 2013). Нека x, y и z се позитивни реални броеви такви што $x^4 + y^4 + z^4 = 3$. Докажи дека

$$\frac{9}{x^2 + y^4 + z^6} + \frac{9}{x^4 + y^6 + z^2} + \frac{9}{x^6 + y^2 + z^4} \leq x^6 + y^6 + z^6 + 6.$$

Решение. Ако го искористиме неравенството на Коши – Буњаковски – Шварц за позитивните броеви x, y^2, z^3 и x^3, y^2, z добиваме

$$(x^4 + y^4 + z^4)^2 \leq (x^2 + y^4 + z^6)(x^6 + y^4 + z^2), \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^4 + z^6} \leq \frac{x^6 + y^4 + z^2}{9}. \quad (1)$$

Аналогно, со користење на неравенство на Коши – Буњаковски – Шварц за позитивните броеви x^2, y^3, z и x^2, y, z^3 , како и за позитивните броеви x^3, y, z^2 и x, y^3, z^2 , соодветно добиваме

$$\frac{1}{x^4+y^6+z^2} \leq \frac{x^4+y^2+z^6}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{x^6+y^2+z^4} \leq \frac{x^2+y^6+z^4}{9}. \quad (3)$$

Сега, со собирање на неравенствата (1), (2) и (3) го добиваме неравенството

$$\frac{1}{x^2+y^4+z^6} + \frac{1}{x^4+y^6+z^2} + \frac{1}{x^6+y^2+z^4} \leq \frac{x^6+y^6+z^6+x^4+y^4+z^4+x^2+y^2+z^2}{9} \quad (4)$$

Од неравенство меѓу аритметичка и квадратна средина за позитивните броеви x^2, y^2 и z^2 и од условот на задачата добиваме дека

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}} = 3$$

па ако замениме во (4) го добиваме бараното неравенство. ■

9 (Предлог БМО 2013). Нека a, b, c и d се позитивни реални броеви така што $abcd = \frac{1}{4}$. Докажи дека важи

$$(16ac + \frac{a}{c^2b} + \frac{16c}{a^2d} + \frac{4}{ac})(bd + \frac{b}{256d^2c} + \frac{d}{b^2a} + \frac{1}{64bd}) \geq \frac{81}{4}.$$

Решение. Прво забележуваме дека

$$(a + \frac{1}{a^2d})(16c + \frac{1}{c^2b}) = 16ac + \frac{a}{c^2b} + \frac{16c}{a^2d} + \frac{4}{ac} \quad \text{и}$$

$$(b + \frac{1}{b^2a})(d + \frac{1}{256d^2c}) = bd + \frac{b}{256d^2c} + \frac{d}{b^2a} + \frac{1}{64bd}.$$

Оттука доволно е да докажеме дека

$$(a + \frac{1}{a^2d})(16c + \frac{1}{c^2b})(b + \frac{1}{b^2a})(d + \frac{1}{256d^2c}) \geq \frac{81}{4}. \quad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за позитивните броеви $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{1}{a^2d}$ добиваме $a + \frac{1}{a^2d} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4d}}$. На ист начин важи

$b + \frac{1}{b^2a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4a}}$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската

средина за позитивните броеви $8c, 8c, \frac{1}{c^2b}$ добиваме $16c + \frac{1}{c^2b} \geq 12\sqrt[3]{\frac{1}{b}}$. Ана-

логно $d + \frac{1}{256d^2c} \geq \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{1}{2c}}$. Конечно, ако ги помножиме последните четири

неравенства и искористиме дека $abcd = \frac{1}{4}$ го добиваме неравенството (1).

Знак за равенство важи кога $a = 2, b = 1, c = \frac{1}{2}$ и $d = \frac{1}{4}$. ■