А. Муминагиќ, J. Carstensen, Данска

ЕДНА ЗАДАЧА, ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА НЕЈЗИНО РЕШАВАЊЕ

Во СИГМА, вол. 23 (01|02), по. 1 го читавме чланакот ЕДНА ЗАДАЧА ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА РЕШАВАЊЕ, која ја напиша Ристо Малчески, Скопје. Такви статии се секогаш интересни, да се реши една задача на повеќе начини. Во оваа мала статија ние ќе го направиме тоа со следната задача.

Задача. Докажи дека

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}\,.$$

Решение 1. Воведуваме ознаки $a=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ и $b=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$. Според тоа треба да докажеме дека

$$a+b<2\sqrt[3]{3} \tag{1}$$

Ако замениме во изразот a^3+b^3 добиваме

$$a^3+b^3=\left(\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\right)^3=3+\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3}=6\,. \tag{2}$$

За $a\neq b$, од $(a-b)^2>0$ добиваме

$$a^2-2ab+b^2>0 \;\Leftrightarrow\; a^2-ab+b^2>ab\,. \tag{3}$$

Ако ги искористиме претходните неравенства, непосредно добиваме

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b) \;\Leftrightarrow\; 3(a^3+b^3)>3ab(a+b) \tag{4}$$

и

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)<a^3+b^3+3(a^3+b^3)=4(a^3+b^3)=4\cdot 6=24$$

(заради (2)). Од $(a+b)^3<24$ добиваме $a+b<\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$, т.е. неравенството (1) е точно.

Решение 2. Ќе покажеме дека

$$\tfrac{a+b}{2}<\sqrt[3]{\tfrac{a^3+b^3}{2}}\,. \tag{5}$$

каде a и b се различни позитивни реални броеви. Јасно е дека

$$0>-(a-b)^2(a+b)\,.$$

Ако последното неравенство го помножиме со 3 добиваме

$$0>-3(a-b)^2(a+b) \;\Leftrightarrow\; 0>-3a^3+3a^2b+3ab^2-3b^3 \;\Leftrightarrow$$

$$4a^3+4b^3>a^3+3ab^2+3a^2b+b^3 \;\Leftrightarrow$$

(ако поделиме со 8)

$$\tfrac{a^3+b^3}{2}>\tfrac{(a+b)^3}{8} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{\tfrac{a^3+b^3}{2}}>\tfrac{a+b}{2}\,.$$

Значи, неравенството (5) е точно. Ако во неравенството (5) замениме $a=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ и $b=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ добиваме

$$\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\right)^3}{2}} > \frac{\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3} > \frac{\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\cdot\sqrt[3]{3}\,.$$

Значи, почетното неравенство е точно.

Решение 3. Воведуваме ознаки $a=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$, $b=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ и $c=\sqrt[3]{3}$. Треба да покажеме дека $a+b<2c$, т.е.

$$a+b-2c<0\,. \tag{6}$$

Неравенството (6) е еквивалентно со неравенството $(a-c)+(b-c)<0$. Последното неравенство е еквивалентно со

$$\frac{a^3-c^3}{a^2+ac+c^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}<0\,.$$

Ако во левата страна на последното неравенство замениме $a=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$, $b=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ и $c=\sqrt[3]{3}$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a^3-c^3}{a^2+ac+c^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}&=\frac{\left(\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}{a^2+ac+c^2}+\frac{\left(\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}{b^2+bc+c^2}\\&=\frac{\sqrt[3]{3}}{a^2+ac+c^2}-\frac{\sqrt[3]{3}}{b^2+bc+c^2}=\frac{\sqrt[3]{3}(b^2+bc+c^2)-\sqrt[3]{3}(a^2+ac+c^2)}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)}\\&=\frac{\sqrt[3]{3}[b^2-a^2+(b-a)c]}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)}<0.\end{aligned}$$

Последното неравенство е исполнето бидејќи

$$b-a<0\ (b^2-a^2<0),\quad a^2+ac+c^2>0 \quad \text{и} \quad b^2+bc+c^2>0\,.$$

Значи неравенството (6) е точно, т.е. $a+b-2c<0$. Ако во последното неравенство замениме $a=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$, $b=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ и $c=\sqrt[3]{3}$ добиваме

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$$

што требаше да се докаже.

Обопштување. Како и во многу други случаи, така и во овој случај даденото неравенство може да се обопшти. Обопштеното неравенство би било

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}<2\cdot\sqrt[n]{n}\,,\quad n\in\mathbf{N}\,. \tag{7}$$

Ќе покажеме дека неравенството (7) е точно за било кој природен број.

Доказ 1. Воведуваме ознаки $a=\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}$, $b=\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}$, т.е.

$$a^n=n+\sqrt[n]{n}\,, \tag{8}$$

$$b^n=n-\sqrt[n]{n}\,. \tag{9}$$

Ако ги собереме (8) и (9) добиваме

$$a^n+b^n=2n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^n+b^n}{2}=n\,. \tag{10}$$

Од (7) со воведените ознаки имаме

$$a+b<2\sqrt[n]{n} \;\Leftrightarrow\; \frac{a+b}{2}<\sqrt[n]{n} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{a+b}{2}\right)^n<n \;\Leftrightarrow\; \text{(заради (10))}\; \left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{a^n+b^n}{2}. \qquad (11)$$

Ќе го покажеме дека неравенството

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2} \qquad (11')$$

е исполнето за било кои позитивни реални брови a и b.

Доказот ќе го изведеме со помош на принципот на математичка индукција. Јасно е дека за $n=1$ неравенството (11') е точно. За $n=2$ имаме

$$a^2+b^2\ge 2ab \;\Leftrightarrow\; 2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

при што равенство важи ако и само ако $a=b$.Бидејќи во нашиот случај $a\ne b$, добиваме

$$\frac{a^2+b^2}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Значи, за $n=2$ неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за $n=k$, т.е. $\frac{a^k+b^k}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^k$, при што равенство е исполнето ако и само ако $a=b$. Ако последното неравенство го помножиме со $\frac{a+b}{2}$ добиваме

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\le\frac{a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1}}{4}. \qquad (12)$$

Бидејќи

$$a^{k+1}+b^{k+1}-a^kb-ab^k=(a^k-b^k)(a-b)=(a-b)^2(a^{k-1}+a^{k-2}b+...+ab^{k-2}+b^{k-1})\ge 0,$$

односно

$$a^kb+ab^k\le a^{k+1}+b^{k+1}$$

кое е исполнето за било кои позитивни реални броеви a и b. Ако последното неравенство го примениме во неравенството (12) добиваме

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\le\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

со што индуктивниот доказ е завршен. Со тое е докажано и неравенстовото (7).

Доказ 2. Ќе дадеме само скица на доказот. Како и во доказот 1 добиваме

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{a^n+b^n}{2}.$$

Покажи дека функцијата $f(x)=x^k$, k е природен број поголем од 1, е конвексна функција за $x\ge 0$, а потоа примени го неравенството на Јенсен. (За секоја функција $f(x)$ конвексна на интервалот $[\alpha,\beta]$ исполнето е неравенството $f\left(\frac{1}{n}\sum_{\upsilon=1}^{n}a_\upsilon\right)\le\frac{1}{n}\sum_{\upsilon=1}^{n}f(a_\upsilon)$, $a_\upsilon\in[\alpha,\beta]$; $n\in\mathbf{N}$).

Конвексноста на функцијата $f(x)=x^k$, k е природен број поголем од 1, за $x\ge 0$, може да се докаже и со помош на математичка индукција.