

МАТЕМАТИЧКИ КЕНГУР, МАРТ 1995
за ученици од III и IV клас средни училишта

1) Ако $x \neq y$ и низите x, a_1, a_2, y и x, b_1, b_2, b_3, y се аритметички прогресии, тогаш $(a_2 - a_1) / (b_2 - b_1)$ е:

- A) $2/3$ B) $3/4$ C) 1 D) $4/3$ E) $3/2$.

2) За секоја тројка (a,b,c) од ненулти реални броеви да се разгледа изразот $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$. Кои вредности можат да се добијат за тој израз?

- A) {0} B) {-4, 0, 4} C) {-4, -2, 0, 2, 4} D) {-4, -2, 2, 4} E) ниедна

3) Да се определат вредностите на параметарот p за кој равенките $(p - 1)x = 1$ и $p(x - 1) = 1 - p$ имаат заеднички корен.

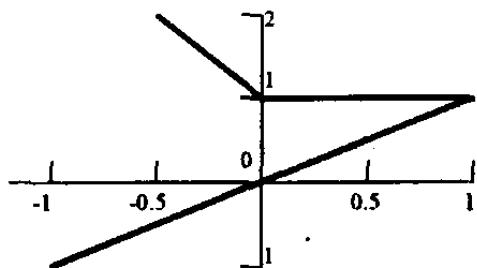
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 0 и 1 E) не постои таков p .

4) Ако $x < 0$, тогаш $x - \sqrt{(x - 1)^2}$ е еднакво на:

- A) 1 B) $1 - 2x$ C) $-2x - 1$ D) $1 + 2x$ E) $2x - 1$

5) Кои се двесте функции чии графици од -1 до 1 даваат таков пртеж?

- A) $f(x) = |1-x| \cdot x$ и $g(x) = 1$
 B) $f(x) = |x| + |1-x|$ и $g(x) = x$
 C) $f(x) = -2x + 1$ и $g(x) = x$
 D) $f(x) = x - |2x|$ и $g(x) = 1$
 E) друг одговор.



6) Ако r е позитивен и ако правата со равенка $x + y = r$ е тангента на кружницата со равенка $x^2 + y^2 = r$, тогаш r е:

- A) $1/2$ B) 1 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

7) Живеев во Сиракуза пред 22 века; пресметав плоштина на исечок од парабола: докажав дека обиколката на цилиндер описан околу сфера е еднаква на плоштината на сферата; една спирала го има моето име; но, најмногу лутето знаат дека реков "Дајте ми лост и...". Кој сум јас?

- A) Цицерон B) Перикле C) Архимед D) Евклид E) Август

8) Во трапез со паралелни страни $AB = 40$ и $CD = 16$, Р е точка од AB таква што DP го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини. Колку е долга AP ?

- A) 16 B) 20 C) 28 D) 32 E) 36

9) Ако $(2x - 1)^{1995}$ се развие по биномната формула во облик

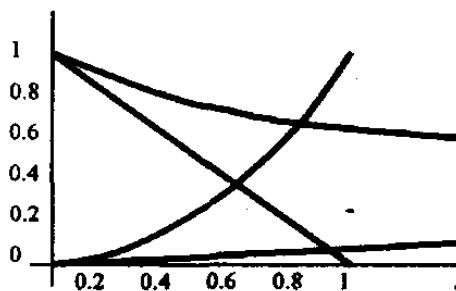
$$a_{1995} \cdot x^{1995} + a_{1994} \cdot x^{1994} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

тогаш збирот $a_{1995} + a_{1994} + \dots + a_1 + a_0$ е еднаков на:

- A) 0 B) 1 C) 1995 D) -1 E) 2

10) За која од следните функции нејзиниот график не е даден на пртежкот?

- A) $f(x) = 1 - \cos[x/\pi]$
 B) $g(x) = x^2$
 C) $h(x) = 1 - x$
 D) $j(x) = (x - 1)^2$
 E) $k(x) = 1/(x+1)$



11) Ако $1 + \sqrt{2}$ е нула на функцијата $f(x) = x^2 + px + q$, со целобројни коефициенти, тогаш $p + q$ е:

- A) -5 B) -1 C) 1 D) -3 E) 5

12) Ако $\{x, y, z\}$ е решение на системот: $yz = -6$; $zx = 2$; $xy = -3$, тогаш $x + y + z$ е:

- A) 0 B) 1 C) 0 или 1 D) 0 или -1 E) 1 или -1

13) Во триаголник ABC, M е средина на BC. Познато е дека AB=4cm, BC=6cm и AM=5cm. Плоштината на триаголникот ABC е:

- A) 15cm² B) 14cm² C) 12cm² D) 10cm² E) друг одговор

14) Дадна е низа со општ член $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

- A) Низата е дивергентна;
 B) Низата конвергира кон 1;
 C) Низата конвергира кон 0;
 D) Низата конвергира кон $l \in (0, 1)$;
 E) Низата конвергира кон $l \in (1, \infty)$;

15) За дадена низа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ дефинираме $\Delta^1(u_n) = u_{n+1} - u_n$ и за секој $k > 1$, $\Delta^k(u_n) = \Delta^1(\Delta^{k-1}(u_n))$. Ако $u_n = n^3 + n$, тогаш $\Delta^k(u_n) = 0$ за секој n ,

- A) ако $k = 1$ B) ако $k = 2$, но не ако $k = 1$ C) ако $k = 3$, но не ако $k = 2$
 D) ако $k = 4$, но не ако $k = 3$ E) за ниедна вредност на k .

16) Ако θ е острар агол за кој $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$, тогаш $\tan \theta$ е:

- A) x B) 1/2 C) $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$ D) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ E) $\sqrt{x^2-1}$.

17) Ако функцијата f е дефинирана со $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, $x \neq -\frac{3}{2}$, c е константа и задоволува $f(f(x)) = x$ за сите реални броеви x освен за $-3/2$, тогаш c е:

- A) -3 B) -3/2 C) 3/2 D) 3 E) нема доволно податоци за одговор.

18) Ако с е реален број и едно од негативните решенија на равенката $x^2 - 3x + c = 0$ е истовремено и решение на равенката $x^2 + 3x - c = 0$, тогаш решенијата на $x^2 - 3x + c = 0$ се:

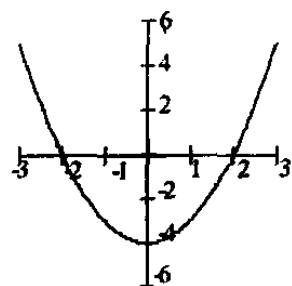
- A) 1 и 2 B) -1 и -2 C) 0 и 3 D) 0 и -3 E) $3/2$ и $-3/2$.

19) Нека C_1 , C_2 и C_3 се три паралелни тетиви од кружница. Растојанието меѓу C_1 и C_2 е еднакво со растојанието меѓу C_2 и C_3 . Должините на тетивите се 20, 16 и 8. Радиусот на кружницата е:

- A) 12 B) $4\sqrt{7}$ C) $\frac{5\sqrt{65}}{3}$ D) $\frac{5\sqrt{22}}{2}$ E) нема доволно податоци.

20) Дадениот график, симетричен во однос на у-оската, претставува непрекината функција која е извод на функцијата f . Кое од следните тврдења е грешно?

- A) f е дефинирана и непрекината од -3 до 3
 B) ако $f(0)=0$, тогаш f е непарна од -3 до 3
 C) графикот на f има максимум во точка со апсиса -2
 D) f нема константен знак од -3 до 3
 E) графикот на f има превојна точка во 0 .



21) Две еднакви кружници со радиус $r=10$ се допираат од надвор. Две тангенти на десната кружница се сечат во центарот на левата. Ако S е плоштината на осенчената фигура, колку е приближно S ?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

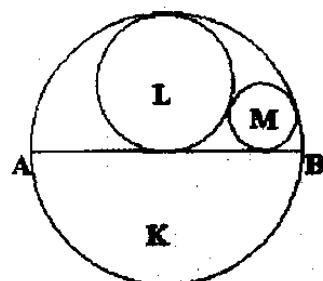


22) Ако m , n , p и q се реални броеви, $f(x) = mx + n$ и $g(x) = px + q$, тогаш равенката $f(g(x)) = g(f(x))$ има решение:

- A) за секој избор на m , n , p и q B) ако $m = p$ и $n = q$
 C) ако $mq - np = 0$ D) ако $n(1-p) - q(1-m) = 0$
 E) ако $(1-n)(1-p) - (1-q)(1-m) = 0$

23) На цртежот е дадена кружница K со дијаметар AB . Кружницата L е тангентна на кружницата K и на дијаметарот AB во центарот на кружницата K . Кружницата M е тангентна на кружниците K и L и на AB . Односот на плоштината на кружницата K со плоштината на кружницата M е:

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18
 E) ниеден од овие одговори



24) Околу кружен исечок со агол θ од круг со радиус 6 описаната е кружница. Радиусот на описаната кружница е:

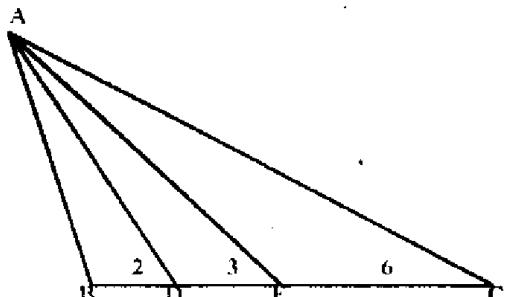
- A) $3 \cos \theta$ B) $\frac{3}{\cos \theta}$ C) $3 \cos \frac{\theta}{2}$ D) $\frac{3}{\cos \frac{\theta}{2}}$ E) 3.

25) Ако (a, b) и (c, d) се две точки од права определена со $y = mx + k$, тогаш растојанието помеѓу (a, b) и (c, d) како функција од a, c и m е:

- A) $|a - c| \cdot \sqrt{1 + m^2}$
 B) $|a + c| \cdot \sqrt{1 + m^2}$
 C) $\frac{|a - c|}{\sqrt{1 + m^2}}$
 D) $|a - c| \cdot (1 + m^2)$
 E) друг одговор.

26) Во дадениот триаголник на цртежот AD и AE го делат аголот $\angle BAC$ на три еднакви делови. Должините на BD , DE и EC се 2, 3 и 6 соодветно. Должината на најкусата страна на триаголникот ABC е:

- A) $2\sqrt{10}$
 B) 11
 C) $2\sqrt{6}$
 D) 6
 E) нема доволно податоци за одговор.



27) Бројот на локални екстреми на функцијата $f(x) = 2x - x^3 + \sin x$ е:

- A) 4
 B) 2
 C) 1
 D) 0
 E) друг одговор.

28) Најди позитивен цели број n кој е решение на равенката

$$\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{115}{116}$$

- A) 110
 B) 115
 C) 116
 D) 231
 E) равенката нема позитивно целобройно решение.

29) Ако k е цел број и f е функција за која, за секој позитивен број x , важи

$$\left| f(x^2 + 1) \right|^{\sqrt{x}} = k, \text{ тогаш за секој позитивен број } y, \left| f\left(\frac{y^2 + 9}{y^2}\right) \right|^{\sqrt[12]{y}} \text{ е:}$$

- A) \sqrt{k}
 B) $2k$
 C) $k\sqrt{k}$
 D) k^2
 E) $y\sqrt[12]{k}$.

30) Бројот на реални решенија на равенката $(x^2 - 1)^3 - 3(x^2 - 1)^2 + 1 = 0$ е:

- A) 6
 B) 4
 C) 2
 D) 1
 E) 0.