Валентина Гоговска, Скопје

МАКСИМУМ И МИНИМУМ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ И НИВНА ПРИМЕНА

Во оваа работа ќе го разгледаме наоѓањето на максимум и минимум на пословени тригонометриски функции и на примената на тригонометриските функции во наоѓање на екстремни вредности на некои рационални функции.

Суштината на постапката се состои во користењето на ограниченоста на функциите $\sin x$ и $\cos x$ при наоѓање на минимум и максимум на дадена функција.

1. Дефиниција и основни својства на минимумот и максимумот

Дефиниција 1. За реалниот број M ќе велиме дека е максимум на функцијата $F(x)$ во множеството D ако:

1° за секој $x \in D$, $F(x) \leq M$

2° постои $x_0 \in D$, таков што $F(x_0) = M$.

Притоа пишуваме $y_{\max} = F(x_0)$.

Дефиниција 2. За реалниот број m ќе велиме дека е минимум на функцијата $F(x)$ во множеството D ако:

1° за секој $x \in D$, $F(x) \geq m$

2° постои $x_0 \in D$, за кое $F(x_0) = m$

Притоа пишуваме $y_{\min} = F(x_0)$.

Теорема 1. Ако $k > 0$, тогаш kM е максимум за функцијата $kF(x)$ во множеството D ако и само ако M е максимум на функцијата $F(x)$ во D.

Доказ. Нека kM е максимум на функцијата $kF(x)$ во D. Според дефиниција 1 имаме:

1° за секој $x \in D$, $kF(x) \leq kM$

2° постои $x_0 \in D$, таков што $kF(x_0) = kM$.

Од претходно изнесеното, множејќи со $\frac{1}{k} > 0$ добиваме

3° за секој $x \in D$, $F(x) \leq M$

4° постои $x_0 \in D$, таков што $F(x_0) = M$,

што значи дека M е максимум на функцијата $F(x)$.

Нека M е максимум на функцијата $F(x)$ во множеството D. Од дефиниција 1 следува

5° за секој $x \in D$, $F(x) \leq M$

6° постои $x_0 \in D$, таков што $F(x_0) = M$.

Ако во 5° и 6° помножиме $k > 0$ добиваме

7° за секој $x \in D$, $kF(x) \leq kM$

8° постои $x_0 \in D$, таков што $kF(x_0) = kM$,

што значи дека kM е максимум за функцијата $kF(x)$ во D. ♦

Доказите на теоремите 2, 3 и 4 се аналогни на доказот на теорема 1. Деталите ги препуштаме на читателот за вежба.

Теорема 2. Ако $k > 0$, тогаш km е минимум за функцијата $kF(x)$ во множеството D ако и само ако m е максимум на функцијата $F(x)$ во D.

Теорема 3. Ако $k < 0$, тогаш km е максимум за функцијата $kF(x)$ во множеството D ако и само ако m е минимум на функцијата $F(x)$ во D.

Теорема 4. Ако $k < 0$, тогаш kM е минимум за функцијата $kF(x)$ во множеството D ако и само ако M е максимум на функцијата $F(x)$ во D.

2. Максимум и минимум на тригонометриски функции

Како што рековме, при нашите разгледувања со трансформирање на дадената функција со помош на тригонометриските функции $\sin x$ и $\cos x$, користејќи дека $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1$, ќе наоѓаме максимум и минимум на дадената функција. Ќе разгледаме неколку задачи.

Пример 1. Одреди го минимумот и максимумот на функцијата

$$f(x) = 4 - 3\cos x,\ x \in \mathbf{R}.$$

Решение. Од двојното неравенство $-1 \leq \cos x \leq 1$ наоѓаме

$$3 \geq -3\cos x \geq -3,$$
$$7 \geq \underbrace{4 - 3\cos x}_{f(x)} \geq 1$$

Значи, минимум за функцијата $f(x)$ е 1, а максимум е 7. ♦

Пример 2. Најди го минимумот и максимумот на функцијата

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x,\ x \in \mathbf{R}.$$

Решение. Ако искористиме дека $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$$\cos\ (x - t) = \cos\ x \cos\ t + \sin\ x \sin\ t$$

последователно наоѓаме

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\cos x + \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\sin x = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$
$$= 3\left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Но, за функцијата $y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ важи $y_{1_{\min}} = -1$, за $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$ и $y_{1_{\max}} = 1$, за $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$. Конечно, $y_{\min} = -3$, за $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$ и $y_{\max} = 3$, за $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$. ♦

Пример 3. Определи го минимумот и максимумот на функцијата
$$f(x)=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x,\ x\in[0,\pi].$$

Решение. Ако искористиме дека $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и
$$\cos(x-t)=\cos x\cos t+\sin x\sin t$$
последователно наоѓаме
$$f(x)=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x)$$
$$=2\,(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x)=2\cos(\frac{\pi}{6}-2x)=2\cos(2x-\frac{\pi}{6}).$$

Сега од $-1\le\cos(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$, што значи дека $-2\le 2\cos(2x-\frac{\pi}{6})\le 2$, па затоа $f(x)\in[-2,2]$. Јасно, $f_{\min}=-2$ кога $\cos(2x-\frac{\pi}{6})=-1$ т.е. кога $2x-\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ односно $x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Но, $x\in[0,\pi]$ па затоа $f_{\min}=-2$ за $x=\frac{7\pi}{12}$.

Аналогно, $f_{\max}=2$, за $x=\frac{\pi}{12}$. ♦

Пример 4. Да се определат минимум и максимум на функцијата
$$y=\cos 2x-4\sin x.$$

Решение. Ја трансформираме дадената функција
$$y=\cos 2x-4\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x-4\sin x$$
$$=1-2\sin^2 x-4\sin=-2\,(\sin^2 x+2\sin x-\frac{1}{2})$$
$$=-2\,[(\sin x+1)^2-1-\frac{1}{2}]=-2\,(\sin x+1)^2+3.$$

Според тоа, $y_{\max}=3$, кога $\sin x+1=0$, т.е. кога $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ и $y_{\min}=-5$, кога $\sin x+1=\pm2$, т.е. кога $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. ♦

Пример 5. Докажи дека функцијата $y=3+4\cos x+\cos 2x$ е ненегативна за секој $x\in\mathbf{R}$.

Решение. Ја трансформираме дадената функција и добиваме
$$y=3+4\cos x+\cos 2x=3+4\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=3+4\cos x+2\cos^2 x-1=2\cos^2 x+4\cos x+2=2\,(\cos x+1)^2.$$

Но, $2(\cos x+1)^2\ge 0$, за секое $x\in\mathbf{R}$, што значи дека функцијата е ненегативна за секој $x\in\mathbf{R}$. ♦

Пример 6. Да се определи минимумот на функцијата $y=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^4$.

Решение. Имаме
$$y=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^4=(\frac{\sin x}{cox}+\frac{\cos x}{\sin x})^4=(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x})^4=(\frac{2}{\sin 2x})^4=\frac{16}{\sin^4 2x}.$$

Бидејќи количникот $\frac{16}{\sin^4 2x}$ достигнува минимум кога именителот достигнува максимум, а максимум на $\max\{\sin^4 2x \mid x \in \mathbf{R}\} = 1$ за $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ добиваме дека $y_{\min} = 16$, за $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. ♦

Пример 7. Да се определи минимумот на функцијата $y = \frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x}$.

Решение. Ја трансформираме дадената функција и добиваме

$$y = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^6 x \cos^6 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x)}{\frac{2^6}{2^6} \cdot \sin^6 x \cos^6 x} = \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x}{\frac{\sin^6 2x}{2^6}}$$

$$= \frac{2^6[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4}\sin^2 2x]}{\sin^6 2x} = \frac{2^6(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x)}{\sin^6 2x} = \frac{2^4(4 - 3\sin^2 2x)}{\sin^6 2x}.$$

Јасно, дадената функција прима најмала вредност, ако истовремено броителот прима најмала вредност, а именителот прима најголема вредност, а тоа е кога $\sin 2x = \pm 1$, т.е. кога $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$. Притоа, $y_{\min} = 16$. ♦

3. Примена на тригонометриските функции во задачи за наоѓање на максимум и минимум

Во овој дел ќе решиме една задача од која може да се види примената на тригонометриските функции во решавањето на екстремални задачи за триаголник, како и две задачи за наоѓање на максимум и минимум од некои функции.

Пример 8. Должината на едната страна на ΔABC е еднаква на a, а аголот спроти неа е еднаков на α. Да се определат должините на другите две страни на триаголникот така што ΔABC да има најголем периметар.

Решение. Од синусна теорема $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ наоѓаме $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ и $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Ако замениме во $L = a + b + c$ и го трансформираме добиениот израз добиваме:

$$L = a + b + c = a + \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = a + \frac{a(\sin\beta + \sin\gamma)}{\sin\alpha}$$

$$= a + \frac{a}{\sin\alpha} \cdot 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = a + \frac{a}{\sin\alpha} \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Јасно, периметарот L има најголема вредност, кога $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ има најголема вредност, т.е. за $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 1$, оттука $\frac{\beta-\gamma}{2} = 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ добиваме дека најголемата вредност периметарот ја достигнува за $\beta = \gamma$. Значи, ΔABC е рамнокрак т.е. $b = c$.

Според тоа, ако за ΔABC е дадена страна и аголот спроти неа, тогаш тој ќе има најголем периметар ако е рамнокрак триаголник чија основа е дадената страна, а кракот е:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \sin\frac{\pi-\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \ ♦$$

Пример 9. Да се определи минимум на функцијата $y=\sqrt{x^2-2x+8}$.

Решение. Бидејќи $D_f=\mathbf{R}$ можеме да ја воведеме смената $x=\mathrm{tg}\alpha$.
Имаме,

$$g(x)=x^2-2x+8=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+8=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha+7\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}+7,$$

што значи дека $g_{\min}=7$, кога $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $k\in\mathbf{Z}$. Конечно, $y_{\min}=\sqrt{7}$. ♦

Пример 10. Да се определат максимум и минимум на функцијата

$$F(x)=\frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}.$$

Решение. Бидејќи $D_f=\mathbf{R}$ можеме да ја воведеме смената $x=\mathrm{tg}\alpha$.
Имаме,

$$F(x)=\frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}=\frac{1+\mathrm{tg}^4\alpha}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^2}=\frac{1+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}}{(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})^2}=\frac{\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}}{\frac{1}{\cos^4\alpha}}=\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=...=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Но, $0\le\sin^2\alpha\le1$, па затоа $F(x)$ прима најмала вредност кога $\sin^2\alpha$ прима најголема вредност и тоа е 1. Притоа, $F_{\min}=\frac{1}{2}$, за $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, т.е. за $x=1$. Аналогно $F_{\max}=1$ за $\alpha=k\pi, k\in\mathbf{Z}$ т.е. за $x=0$. ♦

4. Задачи за самостојна работа

На крајот од оваа работа ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи.

Задача 1. Да се определи вредностите на x , за кои функцијата

$$y=2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x-\sin^2 x+5$$

достигнува максимум, односно минимум.

Задача 2. Да се определат максимум и минимум на функцијата

$$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x.$$

Задача 3. Да се определи минимум за функцијата

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}+\frac{1}{\mathrm{ctg}^2 x}.$$