# Problems and Solutions, JBMO 2014

**Problem 1.** *Find all distinct prime numbers* $p$, $q$ *and* $r$ *such that*

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

**Solution.** First notice that if both primes $q$ and $r$ differ from $3$, then $q^2 \equiv r^2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, hence the left hand side of the given equation is congruent to zero modulo 3, which is impossible since $26$ is not divisible by $3$. Thus, $q = 3$ or $r = 3$. We consider two cases.

**Case 1.** $q = 3$.

The equation reduces to $3p^4 - 4r^2 = 431 \qquad (1)$.

If $p \neq 5$, by Fermat's little theorem, $p^4 \equiv 1 \pmod 5$, which yields $3 - 4r^2 \equiv 1 \pmod 5$, or equivalently, $r^2 + 2 \equiv 0 \pmod 5$. The last congruence is impossible in view of the fact that a residue of a square of a positive integer belongs to the set $\{0, 1, 4\}$. Therefore $p = 5$ and $r = 19$.

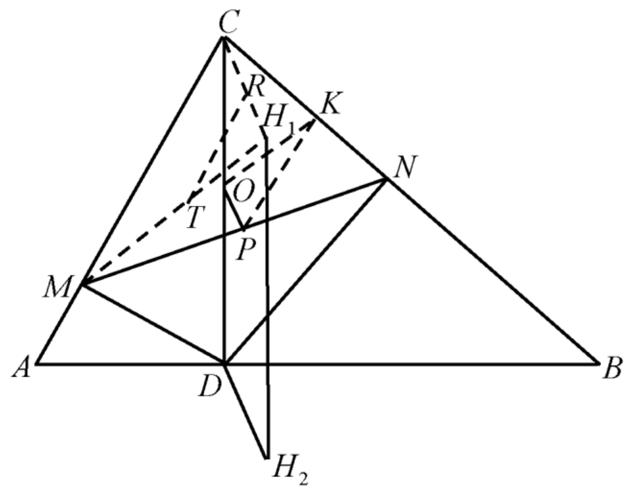
**Case 2.** $r = 3$.

The equation becomes $3p^4 - 5q^4 = 62 \qquad (2)$.

Obviously $p \neq 5$. Hence, Fermat's little theorem gives $p^4 \equiv 1 \pmod 5$. But then $5q^4 \equiv 1 \pmod 5$, which is impossible.

Hence, the only solution of the given equation is $p = 5$, $q = 3$, $r = 19$.

**Problem 2.** *Consider an acute triangle $ABC$ with area $S$. Let $CD \perp AB$ $(D \in AB)$, $DM \perp AC$ $(M \in AC)$ and $DN \perp BC$ $(N \in BC)$. Denote by $H_1$ and $H_2$ the orthocentres of the triangles $MNC$ and $MND$ respectively. Find the area of the quadrilateral $AH_1BH_2$ in terms of $S$.*




**Solution 1.** Let $O$, $P$, $K$, $R$ and $T$ be the mid-points of the segments $CD$, $MN$, $CN$, $CH_1$ and $MH_1$, respectively. From $\Delta MNC$ we have that $\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{MC}$ and $PK \parallel MC$. Analogously, from $\Delta MH_1C$ we have that $\overline{TR} = \frac{1}{2}\overline{MC}$ and $TR \parallel MC$. Consequently, $\overline{PK} = \overline{TR}$ and $PK \parallel TR$. Also $OK \parallel DN$ (from $\Delta CDN$) and since $DN \perp BC$ and $MH_1 \perp BC$, it follows that $TH_1 \parallel OK$. Since $O$ is the circumcenter of $\Delta CMN$, $OP \perp MN$. Thus, $CH_1 \perp MN$ implies $OP \parallel CH_1$. We conclude $\Delta TRH_1 \cong \Delta KPO$ (they have parallel sides and $\overline{TR} = \overline{PK}$), hence $\overline{RH_1} = \overline{PO}$, i.e. $\overline{CH_1} = 2\overline{PO}$ and $CH_1 \parallel PO$.

Analogously, $\overline{DH_2} = 2\overline{PO}$ and $DH_2 \parallel PO$. From $\overline{CH_1} = 2\overline{PO} = \overline{DH_2}$ and $CH_1 \parallel PO \parallel DH_2$ the quadrilateral $CH_1H_2D$ is a parallelogram, thus $\overline{H_1H_2} = \overline{CD}$ and $H_1H_2 \parallel CD$. Therefore the area of the quadrilateral $AH_1BH_2$ is $\dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{H_1H_2}}{2} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = S$.

**Solution 2.** Since $MH_1 \parallel DN$ and $NH_1 \parallel DM$, $MDNH_1$ is a parallelogram. Similarly, $NH_2 \parallel CM$ and $MH_2 \parallel CN$ imply $MCNH_2$ is a parallelogram . Let $P$ be the midpoint of the segment $\overline{MN}$. Then $\sigma_P(D) = H_1$ and $\sigma_P(C) = H_2$, thus $CD \parallel H_1H_2$ and $\overline{CD} = \overline{H_1H_2}$.

From $CD \perp AB$ we deduce $A_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = S$.

**Problem 3.** *Let $a, b, c$ be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that*

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3\left(a+b+c+1\right).$$

*When does equality hold?*

**Solution 1.** By using AM-GM ( $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ ) we have

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 &\geq \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right)\\ &= \left(ab+1+\frac{a}{c}+a\right)+\left(bc+1+\frac{b}{a}+b\right)+\left(ca+1+\frac{c}{b}+c\right)\\ &= ab+bc+ca+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3+a+b+c.\end{aligned}$$

Notice that by AM-GM we have $ab+\frac{b}{a} \geq 2b$, $bc+\frac{c}{b} \geq 2c$, and $ca+\frac{a}{c} \geq 2a$.

Thus ,

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq \left(ab+\frac{b}{a}\right)+\left(bc+\frac{c}{b}\right)+\left(ca+\frac{a}{c}\right)+3+a+b+c \geq 3(a+b+c+1).$$

The equality holds if and only if $a=b=c=1$.

**Solution 2.** From QM-AM we obtain

$$\sqrt{\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2}{3}} \geq \frac{a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{\left(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}\right)^2}{3} \quad \left(1\right)$$

From AM-GM we have $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3$ , and substituting in $\left(1\right)$ we get

$$\begin{aligned}&\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{\left(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}\right)^2}{3} \geq \frac{\left(a+b+c+3\right)^2}{3}=\\ &=\frac{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c\right)+6\left(a+b+c\right)+9}{3} \geq \frac{\left(a+b+c\right)3\sqrt[3]{abc}+6\left(a+b+c\right)+9}{3}=\\ &=\frac{9\left(a+b+c\right)+9}{3}=3\left(a+b+c+1\right).\end{aligned}$$

The equality holds if and only if $a=b=c=1$.

**Solution 3.**

By using $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}\geq$$
$$\geq ab+ac+bc+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}.$$

Clearly

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{abc}{bc}+\frac{abc}{ca}+\frac{abc}{ab}=a+b+c,$$
$$ab+\frac{a}{b}+bc+\frac{b}{c}+ca+\frac{c}{a}\geq 2a+2b+2c,$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3.$$

Hence

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq\left(ab+\frac{a}{b}\right)+\left(ac+\frac{c}{a}\right)+\left(bc+\frac{b}{c}\right)+a+b+c+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq$$
$$\geq 2a+2b+2c+a+b+c+3=3\left(a+b+c+1\right).$$

The equality holds if and only if $a=b=c=1$.

**Solution 4.** $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{x}\right)^2\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+1\right)$$

$$(x+z)^2x^2z^2+(y+x)^2y^2x^2+(z+y)^2z^2y^2\geq 3xyz(x^2z+y^2x+z^2y+xyz)$$

$$x^4z^2+2x^3z^3+x^2z^4+x^2y^4+2x^3y^3+x^4y^2+y^2z^4+2y^3z^3+y^4z^2\geq 3x^3yz^2+3x^2y^3z+3xy^2z^3+3x^2y^2z^2$$

1)$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\geq 3x^2y^2z^2$.

$$\left.\begin{array}{l}2)x^4z^2+z^4x^2+x^3y^3\geq 3x^3z^2y\\ 3)x^4y^2+y^4x^2+y^3z^3\geq 3y^3x^2z\\ 4)z^4y^2+y^4z^2+x^3z^3\geq 3z^3y^2x\end{array}\right\}$$

Equality holds when $x=y=z$, i.e., $a=b=c=1$.

**Solution 5.** $\sum_{cyc}(a+\frac{1}{b})^2\geq 3\sum_{cyc}a+3$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}\left(a^2+\frac{1}{a^2}-3a-1\right)\geq 0$$

$$2\sum_{cyc}\frac{a}{b}\geq 6\sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}}=6 \qquad (1)$$

$$\forall a > 0,\ a^2 + \frac{1}{a^2} - 3a \geq \frac{3}{a} - 4$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 3a + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a-1\right)^2 \left(a^2 - a + 1\right) \geq 0$$

$$\sum_{cyc}\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 3a - 1\right) \geq 3\sum_{cyc}\frac{1}{a} - 15 \geq 9\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} - 15 = -6 \qquad (2)$$

Using (1) and (2) we obtain

$$2\sum_{cyc}\frac{a}{b} + \sum\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 3a - 1\right) \geq 6 - 6 = 0$$

Equality holds when $a = b = c = 1$.

**Problem 4.** For a positive integer $n$, two players A and B play the following game: Given a pile of $s$ stones, the players take turn alternatively with A going first. On each turn the player is allowed to take either one stone, or a prime number of stones, or a multiple of $n$ stones. The winner is the one who takes the last stone. Assuming both A and B play perfectly, for how many values of $s$ the player A cannot win?

**Solution.** Denote by $k$ the sought number and let $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ be the corresponding values for $s$. We call each $s_i$ a losing number and every other nonnegative integer a winning numbers.

**Clearly every multiple of $n$ is a winning number.**

Suppose there are two different losing numbers $s_i > s_j$, which are congruent modulo $n$. Then, on his first turn of play, player $A$ may remove $s_i - s_j$ stones (since $n \mid s_i - s_j$), leaving a pile with $s_j$ stones for B. This is in contradiction with both $s_i$ and $s_j$ being losing numbers.

**Hence, there are at most $n-1$ losing numbers, i.e. $k \leq n-1$.**

Suppose there exists an integer $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, such that $mn + r$ is a winning number for every $m \in \mathbb{N}_0$. Let us denote by $u$ the greatest losing number (if $k > 0$) or 0 (if $k = 0$), and let $s = LCM(2, 3, \ldots, u+n+1)$. Note that all the numbers $s+2$, $s+3$, ..., $s+u+n+1$ are composite. Let $m' \in \mathbb{N}_0$, be such that $s+u+2 \leq m'n + r \leq s+u+n+1$. In order for $m'n + r$ to be a winning number, there must exist an integer $p$, which is either one, or prime, or a positive multiple of $n$, such that $m'n + r - p$ is a losing number or 0, and hence lesser than or equal to $u$. Since $s+2 \leq m'n + r - u \leq p \leq m'n + r \leq s+u+n+1$, $p$ must be a composite, hence $p$ is a multiple of $n$ (say $p = qn$). But then $m'n + r - p = (m' - q)n + r$ must be a winning number, according to our assumption. This contradicts our assumption that all numbers $mn + r$, $m \in \mathbb{N}_0$ are winning.

**Hence, each nonzero residue class modulo $n$ contains a loosing number.**

**There are exactly $n-1$ losing numbers .**

Lemma: No pair $(u,n)$ of positive integers satisfies the following property:

(*) In $\mathbb{N}$ exists an arithmetic progression $(a_t)_{t=1}^{\infty}$ with difference $n$ such that each segment

$\left[a_i - u, a_i + u\right]$ contains a prime.

Proof of the lemma: Suppose such a pair $(u,n)$ and a corresponding arithmetic progression $(\mathrm{a}_t)_{t=1}^{\infty}$ exist. In $\mathbb{N}$ exist arbitrarily long patches of consecutive composites. Take such a patch $P$ of length $3un$. Then, at least one segment $\left[a_i - u, a_i + u\right]$ is fully contained in $P$, a contradiction.

Suppose such a nonzero residue class modulo $n$ exists (hence $n > 1$). Let $u \in \mathbb{N}$ be greater than every loosing number. Consider the members of the supposed residue class which are greater than $u$. They form an arithmetic progression with the property (*), a contradiction (by the lemma).

**Јуниорска Балканска Математичка Олимпијада,**
**21-26.06.2014 година, Охрид, Македонија**

**1.** Најди ги сите различни прости броеви $p$, $q$ и $r$ такви што

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

**Решение.** Прво да забележиме дека ако простите броеви $q$ и $r$ се различни од 3, тогаш $q^2 \equiv r^2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, па левата страна на равенката е конгруентна со 0 по модул 3, што не е можно бидејќи 26 не се дели со 3. Значи, $q = 3$ или $r = 3$.

**Прв случај.** Нека $q = 3$. Тогаш дадената равенка го добива обликот

$$3p^4 - 4r^2 = 431. \tag{1}$$

Ако $p \neq 5$, од малата теорема на Ферма следува $p^4 \equiv 1 \ (\text{mod } 5)$, што значи $3 - 4r^2 \equiv 1 \ (\text{mod } 5)$, односно $r^2 + 2 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$. Последнта конгруенција не е можна, бидејќи остатоците при делење со 5 на квадратите на природните броеви припаѓаат на множеството $\{0,1,4\}$. Затоа, $p = 5$ и $r = 19$.

**Втор случај.** Нека $r = 3$. Тогаш дадената равенка го добива обликот

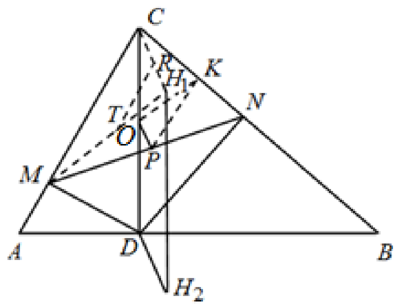
$$3p^4 - 5q^4 = 62. \tag{2}$$

Ако $p \neq 5$, повторно $p^4 \equiv 1 \ (\text{mod } 5)$ и тогаш $5q^4 \equiv 1 \ (\text{mod } 5)$, што не е можно.

Конечно, единствено решение на дадената равенка е $p = 5$, $q = 3$, $r = 19$.

**2.** Даден е произволен триаголник ABC со плоштина S. Нека $CD \perp AB$ ( $D \in AB$ ), $DM \perp AC$ ( $M \in AC$ ) и $DN \perp BC$ ( $N \in BC$ ). Со $H_1$ и $H_2$ да ги означиме ортоцентрите на триаголниците $MNC$ и $MND$, соодветно. Изрази ја плоштината на четириаголникот $AH_1BH_2$ преку S.

**Решение 1.** Нека $O, P, K, R$ и $T$ се средините на отсечките $CD$, $MN$, $CN$, $CH_1$ и $MH_1$, соодветно. Од $\Delta MNC$ имаме дека $\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{MC}$ и $PK \parallel MC$. По аналогија, од $\Delta MH_1C$ имаме дека $\overline{TR} = \frac{1}{2}\overline{MC}$ и $TR \parallel MC$. Како резултат на тоа, $\overline{PK} = \overline{TR}$ и $PK \parallel TR$. Исто така $OK \parallel DN$ (од $\Delta CDN$ ) и бидејќи $DN \perp BC$ и $MH_1 \perp BC$, следува дека $TH_1 \parallel OK$. Бидејќи $O$ е ортоцентар на $\Delta CMN$, $OP \perp MN$. Затоа, од $CH_1 \perp MN$ имаме дека $OP \parallel CH_1$. Па можеме да заклучиме дека $\Delta TRH_1 \cong \Delta KPO$ (имаат паралелни страни и $\overline{TR} = \overline{PK}$ ), оттука $\overline{RH_1} = \overline{PO}$, т.е. $\overline{CH_1} = 2\overline{PO}$ и $CH_1 \parallel PO$.




Аналогно, $\overline{DH_2} = 2\overline{PO}$ и $DH_2 \parallel PO$. Од

$$\overline{CH_1} = 2\overline{PO} = \overline{DH_2} \text{ и } CH_1 \parallel PO \parallel DH_2$$

четириаголникот $CH_1H_2D$ е паралелограм, па затоа $\overline{H_1H_2} = \overline{CD}$ и $H_1H_2 \parallel CD$. Оттука површината на четириаголникот $AH_1BH_2$ е

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{H_1H_2}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = S.$$

**Решение 2.** Бидејќи $MH_1 \parallel DN$ и $NH_1 \parallel DM$, $MDNH_1$ е паралелограм. Слично, $NH_2 \parallel CM$ и $MH_2 \parallel CN$ имплицираат дека $MCNH_2$ е паралелограм. Нека $P$ е средна точка на отсечката $\overline{MN}$. Тогаш $\sigma_P(D) = H_1$ и $\sigma_P(C) = H_2$, па затоа $CD \parallel H_1H_2$ и $\overline{CD} = \overline{H_1H_2}$. Од $CD \perp AB$ можеме да заклучиме дека $P_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = S$.

**3.** Нека $a,b,c$ се позитивни реалнио броеви такви што $abc=1$.Докажи дека

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\geq 3(a+b+c+1)\,.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** ***Прв начин.*** Од неравенството меѓу аритметичката (АС) и геометриската средина (ГС), односно неравенството

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (a+\tfrac{1}{b})(b+\tfrac{1}{c})+(b+\tfrac{1}{c})(c+\tfrac{1}{a})+(c+\tfrac{1}{a})(a+\tfrac{1}{b})\\ &=(ab+1+\tfrac{a}{c}+a)+(bc+1+\tfrac{b}{a}+b)+(ca+1+\tfrac{c}{b}+c)\\ &=ab+bc+ca+\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{b}{a}+3+a+b+c.\end{aligned}$$

Повторно од неравенството меѓу АС и ГС добиваме

$$ab+\tfrac{b}{a}\geq 2b,\ bc+\tfrac{c}{b}\geq 2c \ \text{ и } \ ca+\tfrac{a}{c}\geq 2a\,.$$

Така,

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (ab+\tfrac{b}{a})+(bc+\tfrac{c}{b})+(ca+\tfrac{a}{c})+3+a+b+c\\ &\geq 3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

***Втор начин.*** Од неравенството меѓу АС и ГС следува

$$\sqrt{\frac{(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2}{3}}\geq\frac{a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}}{3}\Leftrightarrow$$

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\geq\frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}\,, \tag{1}$$

и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3$, па ако замениме во (1) наоѓаме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq\frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}\geq\frac{(a+b+c+3)^2}{3}\\ &=\frac{(a+b+c)(a+b+c)+6(a+b+c)+9}{3}\\ &\geq\frac{(a+b+c)3\sqrt[3]{abc}+6(a+b+c)+9}{3}\\ &=\frac{9(a+b+c)+9}{3}=3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

***Трет начин.*** Користејќи го неравенството $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &=a^2+b^2+c^2+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{1}{c^2}+\tfrac{1}{a^2}+\tfrac{2a}{b}+\tfrac{2b}{c}+\tfrac{2c}{a}\\ &\geq ab+ac+bc+\tfrac{1}{bc}+\tfrac{1}{ca}+\tfrac{1}{ab}+\tfrac{2a}{b}+\tfrac{2b}{c}+\tfrac{2c}{a}.\end{aligned}$$

Јасно,

$$\tfrac{1}{bc}+\tfrac{1}{ca}+\tfrac{1}{ab}=\tfrac{abc}{bc}+\tfrac{abc}{ca}+\tfrac{abc}{ab}=a+b+c$$

$$ab+\tfrac{a}{b}+bc+\tfrac{b}{c}+ca+\tfrac{c}{a}\geq 2a+2b+2c$$

$$\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\tfrac{a}{b}\tfrac{b}{c}\tfrac{c}{a}}=3$$

Затоа

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 \ge (ab+\tfrac{a}{b})+(bc+\tfrac{b}{c})+(ca+\tfrac{c}{a})+a+b+c+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}$$
$$\ge 2a+2b+2c+a+b+c+3=3(a+b+c+1).$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$

***Четврт начин.*** Нека $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$. Имаме

$$(\tfrac{x}{y}+\tfrac{z}{y})^2+(\tfrac{y}{z}+\tfrac{x}{z})^2+(\tfrac{z}{x}+\tfrac{y}{x})^2 \ge 3(\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{z}+\tfrac{z}{x}+1)$$
$$(x+z)^2x^2z^2+(y+x)^2y^2x^2+(z+y)^2z^2y^2 \ge 3xyz(x^2z+y^2x+z^2y+xyz)$$
$$x^4z^2+2x^3z^3+x^2z^4+x^2y^4+2x^3y^3+x^4y^2+y^2z^4+2y^3z^3+y^4z^2 \ge$$
$$\ge 3x^3yz^2+3x^2y^3z+3xy^2z^3+3x^2y^2z^2$$

Последното неравенство следува од очигледните неравенства:

1) $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \ge 3x^2y^2z^2$.
2) $x^4z^2+z^4x^2+x^3y^3 \ge 3x^3z^2y$
3) $x^4y^2+y^4x^2+y^3z^3 \ge 3y^3x^2z$
4) $z^4y^2+y^4z^2+x^3z^3 \ge 3z^3y^2x$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ ,т.е. $a=b=c=1$.

***Петти начин.*** Имаме

$$\sum_{cyc}(a+\tfrac{1}{b})^2 \ge 3\sum_{cyc}a+3 \Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1)\ge 0$$
$$2\sum_{cyc}\tfrac{a}{b} \ge 6\sqrt[3]{\tfrac{a}{b}\tfrac{b}{c}\tfrac{c}{a}}=6. \qquad (1)$$

Понатаму, за секој $a>0$ важи

$$a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a \ge \tfrac{3}{a}-4 \quad \Leftrightarrow \quad a^4-3a^3+4a^2-3a+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (a-1)^2(a^2-a+1)\ge 0$$

па затоа

$$\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1) \ge 3\sum_{cyc}\tfrac{1}{a}-15 \ge 9\sqrt[3]{\tfrac{1}{abc}}-15=-6 \qquad (2)$$

Сега од неравенствата (1) и (2) следува

$$2\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1)\ge 6-6=0.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

**4.** За позитивен број $n$, двајца играчи $A$ и $B$ ја играат следната игра: Даден е куп од $s$ камчиња, играчите играат наизменично, но $A$ игра прв. При секое играње играчот има право да земе или едно камче, или прост број на камчиња, или $nk, k \geq 1$ камчиња. Победник е оној кој ќе го земе последното камче. Под претпоставка дека играчите $A$ и $B$ играат перфектно, за колку вредности на $s$ играчот $A$ не може да победи?

**Решение.** Со $k$ ќе го означиме бараниот број и нека $\{s_1, s_2, ..., s_k\}$ се соодветните вредности на $s$. Секој $s_i$ ќе го нарекуваме губитники број, а секој друг ненегативен цел број е победнички број.

Јасно, секој број од видот $nk, k \geq 1$ е победнички број

Да претпоставиме дека постојат два различни губитнички броеви $s_i > s_j$, кои се конгурентни по модул $n$. Потоа, при својот прв потег, играчот $A$ може да острани $s_i - s_j$ камчиња (бидејќи $n \mid (s_i - s_j)$), оставајќи куп со $s_j$ камчиња за $B$. Последното противречи на фактот дека броевите $s_i$ и $s_j$ се губитнички. Сега од принципот на Дирихле следува дека постојат најмногу $n-1$ губитнички броеви, т.е. $k \leq n-1$.

Да претпоставиме дека постои цел број $r \in \{1, 2, ..., n-1\}$, таков што $mn + r$ е победнички број за секој $m \in \mathbb{N}_0$. Со $u$ да го означиме најголемиот губитнички број (ако $k > 0$) или 0 (ако $k = 0$), и нека $s = LCM(2, 3, ..., u+n+1)$. Да забележиме дека сите броеви $s+2$, $s+3$, …, $s+u+n+1$ се сложени. Нека земеме $m' \in \mathbb{N}_0$, така што

$$s+u+2 \leq m'n+r \leq s+u+n+1.$$

За да $m'n+r$ биде победнички број, мора да постои цел број $p$, кој е или еден, или прост број или број од видот $nk, k \geq 1$, таков што $m'n+r-p$ е губитнички број или 0, и притоа помал или еднаков на $u$. Бидејќи

$$s+2 \leq m'n+r-u \leq p \leq m'n+r \leq s+u+n+1,$$

добиваме $p$ мора да биде сложен, оттука $p$ се дели со $n$, на пример $p = qn$. Но тогаш, според претпоставката,

$$m'n+r-p = (m'-q)n+r$$

мора да биде победнички број. Ова е спротивно на претпоставката дека сите броеви $mn+r$, $m \in \mathbb{N}_0$ се победнички. Од досега изнесеното следува дека сите ненулти класи по модул $n$ содржат губитнички број.

Од претходно изнесеното следува дека постојат точно $n-1$ губитнички броеви.