

Ѓорѓи Цветков, Кратово

## ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПЛОШТИНА И ПЕРИМЕТАР НА ПРАВИЛЕН ОСУМАГОЛНИК И ПРАВИЛЕН ДВАНАЕСЕТАГОЛНИК ВПИШАН ВО КРУЖНИЦА СО РАДИУС $R$

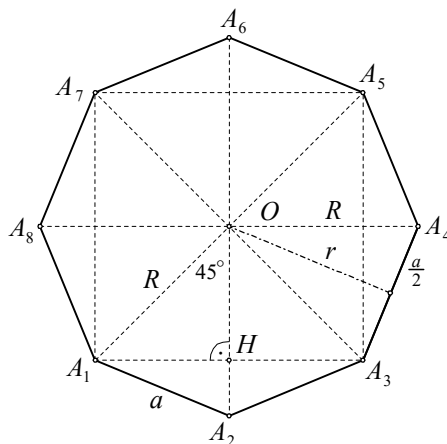
Во оваа статија ќе ги изведеме формулите за пресметување на плоштината и периметарот на правилен осумаголник и правилен дванаесетаголник впишани во кружница со радиус  $R$ . Исто така, ќе ги најдеме врските меѓу страната и радиусите на впишаната и опишаната кружница за секој од овие правилни многуаголници.

а) Да го разгледаме правилниот осумаголник  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ , впишан во кружница со радиус  $R$ . Четириаголникот  $A_1A_3A_5A_7$  е квадрат (зошто?). Нека  $H = A_1A_3 \cap OA_2$ . Јасно  $OH \perp A_1A_3$ , од што следува дека  $\angle A_1OH = \angle HA_1O = 45^\circ$ , т.е.  $\triangle OA_1H$  е рамнокрак правоаголник, со прав агол во темето  $H$ , цртеж 1.

Со примена на питагоровата теорема за  $\triangle OA_1H$  добиваме

$$2\overline{A_1H}^2 = \overline{A_1H}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OA_1}^2 = R^2$$

т.е.  $\overline{A_1H} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ .



Црт. 1

За плоштината на триаголникот  $A_1A_2O$  добиваме  $P_{\triangle A_1A_2O} = \frac{1}{2} \overline{A_1H} \cdot \overline{OA_2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$ , што значи дека плоштината на осумаголникот е

$$P = 8P_{\triangle A_1A_2O} = 8 \frac{R^2\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}R^2.$$

Понатаму, со примена на на питагоровата теорема за  $\triangle A_1HA_2$  наоѓаме

$$a^2 = \overline{A_1A_2}^2 = \overline{A_1H}^2 + \overline{HA_2}^2 = \frac{2R^2}{4} + \left( R - \frac{R\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{R^2}{4} [2 + (2 - \sqrt{2})^2] = R^2(2 - \sqrt{2}),$$

што значи

$$a = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Според тоа, периметарот на осумаголникот е

$$L = 8a = 8R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Останува уште да го определиме радиусот на впишаната кружница во осумаголникот  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ . Повторно, користејќи ја питагоровата теорема добиваме

$$r^2 = R^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 = R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{2})}{4} = \frac{R^2(2 + \sqrt{2})}{4}$$

т.е.  $r = \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ .

Да забележиме дека  $r$  може да се пресмета и од релацијата

$$\frac{ar}{2} = P_{\Delta A_1 A_2 O} = \frac{R^2 \sqrt{2}}{4}$$

од каде наоѓаме

$$\begin{aligned} r &= \frac{R^2 \sqrt{2}}{2a} = \frac{R^2 \sqrt{2}}{2R\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ &= \frac{R^2 \sqrt{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}}{2R\sqrt{2^2-2}} = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}. \end{aligned}$$

	преку $R$	преку $a$	преку $r$
$R$			
$a$	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$		
$r$	$\frac{1}{2} R\sqrt{2+\sqrt{2}}$		
$P$	$2R^2 \sqrt{2}$		
$L$	$8R\sqrt{2-\sqrt{2}}$		

На крајот на овој дел ви предлагаме да ја пополните дадената таблица, а потоа да ги пресметате радиусот на опишаната, радиусот на впишаната кружница, плоштината и периметарот на правилен осумаголник со страна  $a = 3 \text{ cm}$ .

b) Да го разгледаме правилниот дванаесетаголник  $A_1 A_2 \dots A_{12}$ , со страна  $a$  (цртеж 2). Над страните  $A_2 A_3, A_4 A_5, A_6 A_7, A_8 A_9, A_{10} A_{11}$  и  $A_{12} A_1$  во внатрешноста на дванаесетаголникот конструираме рамнострани триаголници. Внатрешниот агол на дванаесетаголникот е  $150^\circ = 60^\circ + 90^\circ$ , па затоа новоповлечените страни се нормални на страните на дванаесетаголникот, што значи дека четириаголниците  $A_1 A_2 B_1 B_2, A_3 A_4 B_3 B_2, A_5 A_6 B_4 B_3, A_7 A_8 B_5 B_6, A_9 A_{10} B_6 B_5$  и  $A_{11} A_{12} B_1 B_6$  се квадрати. Според тоа, шестаголникот  $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$  е правилен. (зошто?).

Значи, правилниот дванаесетаголник со страна  $a$  го поделивме на 6 рамнострани триаголници, шест квадрати и еден правилен шестаголник, сите со страна  $a$ . Затоа за неговата плоштина ја имаме формулата

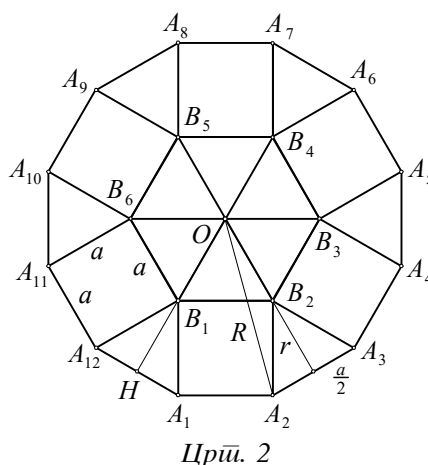
$$P = 6a^2 + 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} = 3a^2 (2 + \sqrt{3}).$$

Бидејќи  $\overline{OB_1} = a$  и  $\overline{B_1 H} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , како висина на рамностран триаголник, за радиусот  $r$  на впишаната кружница во дванаесетаголникот добиваме

$$r = \overline{OB_1} + \overline{B_1 H} = a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}.$$

Ако ја искористиме питагоровата теорема, тогаш за радиусот на опишаната кружница околу дванаесетаголникот добиваме

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}\right)^2} = a\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$



**Забелешка.** Формулите за  $r$  и  $R$  на правилниот дванаесетаголник можеме да ги добиеме и на друг начин. Имено, од  $P = 3a^2 (2 + \sqrt{3})$  и  $P = \frac{12ar}{2} = 6ar$  добиваме

$$6ar = 3a^2 (2 + \sqrt{3})$$

т.е.  $r = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$ . Слично, од  $P = 3a^2 (2 + \sqrt{3})$  и  $P = 6 \frac{R \cdot R}{2}$ , (зошто?) наоѓаме

$$3a^2(2 + \sqrt{3}) = 3R^2$$

$$\text{т.е. } R = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

На крајот од овој дел ви предлагаме да ја пополните дадената таблица, а потоа да ги пресметате страната, радиусот на впишаната кружница, плоштината и периметарот на правилен дванаесетаголник впишан во кружница со радиус  $R = 3 \text{ cm}$ .

	преку $R$	преку $a$	преку $r$
$R$		$a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	
$a$			
$r$		$\frac{1}{2}a(2 + \sqrt{3})$	
$P$		$3a^2(2 + \sqrt{3})$	
$L$		$12a$	

с) На крајот од оваа статија ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи.

1. Ако хипотенузата на правоаголниот триаголник е  $c$ , а еден негов внатрешен агол е еднаков на  $22^\circ 30'$ , тогаш плоштината на овој триаголник е  $\frac{c^2\sqrt{2}}{8}$ . Докажете!

2. Ако во правоаголниот триаголник еден негов внатрешен агол е еднаков на  $15^\circ$ , тогаш радиусот на опишаната кружница на овој триаголник е еднаков на геомтриската средина на катетите.

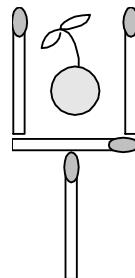
3. Ако хипотенузата на правоаголниот триаголник е  $c$ , а еден негов внатрешен агол е еднаков на  $15^\circ$ , тогаш плоштината на овој триаголник е  $\frac{c^2}{8}$ . Докажете!

4. Ако остриат агол на ромбот е  $30^\circ$ , тогаш неговата страна е геометриска средина на дијагоналите на ромбот. Докажи!

5. Во внатрешноста на квадратот  $ABCD$  е дадена точка  $M$ , но таква што  $\overline{AM} = \overline{BM}$  и  $\angle AMB = 150^\circ$ . Докажете дека  $\triangle CDM$  е рамностран.

### ИСПРАЗНИ ЈА ЧАШАТА

На цртежот е прикажана една стара и доста позната загатка. Четири кибритчиња формираат чаша во која се наоѓа вишна. Со поместување на само две кибритчиња, потребно е да се испразни чашата (вишната да биде надвор од неа). Чашата може да се превртува со врвот надолу, да се спушти и крева, така што да не го смени обликот.



### ПРОБЛЕМ НА ОСУМ ДАМИ

На шаховска табла да се постават осум дами така што една со друга да не се напаѓаат.