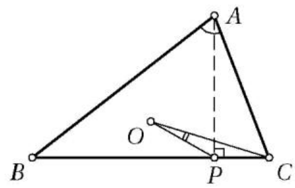
XLII олимпијада

1. Нека ABC е остроаголен триаголник, O е центар на неговата опишана кружница и P е подножјето на висината повлечена од темето A кон страната BC. Ако $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30^\circ$, докажи дека $\measuredangle CAB + \measuredangle COP < 90^\circ$.

Решение. Бидејќи $\measuredangle OCP = 90^\circ - \measuredangle A$, треба да се докаже дека $\measuredangle OCP > \measuredangle COP$, т.е. $\overline{OP} > \overline{CP}$. Според неравенството на триаголник доволно е да се докаже дека $\overline{CP} < \frac{1}{2}\overline{CO} = \frac{1}{2}R$. Навистина,



$$\begin{aligned}\overline{CP} &= \overline{AC}\cos\gamma = 2R\sin\beta\cos\gamma \\ &\leq 2R\sin\beta\cos(\beta+30^\circ) \\ &= R(\sin(2\beta+30^\circ)-\sin 30^\circ) < \tfrac{1}{2}R.\end{aligned}$$

2. Докажи, дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

за секои позитивни реални броеви a,b,c.

Решение. Ќе определиме константа $k>0$ така што

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}\text{, за секои } a,b,c>0. \qquad (1)$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^k+b^k+c^k)^2 \geq a^{2k-2}(a^2+8bc),$$

т.е. со неравенството

$$(a^k+b^k+c^k)^2 - a^{2k} \geq 8a^{2k-2}bc.$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a^k+b^k+c^k)^2 - a^{2k} = (a^{2k}+b^k+c^k)(b^k+c^k) \geq 8a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{3k}{4}}c^{\frac{3k}{4}}.$$

Според тоа, неравенството (1) е исполнето за $k=\frac{4}{3}$. Сега, ако (1) го собереме со соодветните неравенства за $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$ и $\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ го добиваме бараното неравенство.

3. На математички натпревар учествувале 21 момче и 21 девојче. Секој од нив решил најмногу 6 задачи. За секое момче и за секое девојче постои барем една задача која и двајцата ја решиле. Докажи, дека постои задача која ја решиле барем три момчиња и барем три девојчиња.

Решение. За една задача ќе велиме дека е *тешка за момчињата* ако ја решиле најмногу две момчиња, а *тешка за девојчињата* ако ја решиле најмногу две девојчиња.

Ќе го оцениме бројот на паровите момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача тешка за момчињата. Да разгледаме произволно девојче. Според условот, меѓу шесте задачи кои ги решила, најмногу 5 се тешки за момчињата, т.е. решени се од најмногу 2 момчиња. Според тоа, бројот на разгледуваните парови е помал или еднаков на $21\cdot 5\cdot 2=210$.

Слично, има најмногу 210 парови момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача која е тешка за девојчињата. Меѓутоа, вкупниот број парови момче-девојче е $21^2=441$. Значи, во најмалку 21 пар задачата која и двајцата ја решиле не е тешка ниту за девојчињата ниту за момчињата.

4. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и нека $k_1,k_2,...,k_n$ се цели броеви. За секоја пермутација $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ нека

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n}k_i a_i \ .$$

Докажи, дека постојат различни пермутации b и c такви што $n!$ е делител на бројот $S(b)-S(c)$.

Решение. Нека претпоставиме дека сите $n!$ броеви $S(a)$ се различни по модул $n!$. Тогаш збирот $\sum_a S(a)$ по сите пермутации е кунгруентна со

$$0+1+...+(n!-1)=\tfrac{(n!-1)n!}{2}\equiv \tfrac{n!}{2} (\text{mod } n!)$$

Од друга страна, секој од броевите k_i во збирот $\sum_a S(a)$ се јавува со коефициент

$$(n-1)!(1+2+...+n)=\tfrac{n+1}{2}n!\,,$$

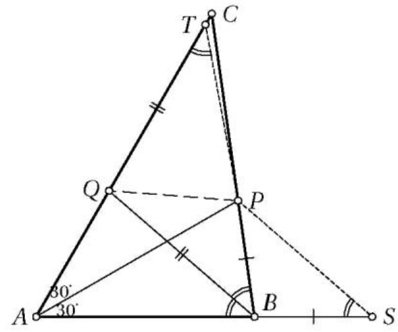
а овој збир за непарен n е делив со $n!$. Затоа, $\sum_a S(a)\equiv 0(\text{mod } n!)$, што е противречност.

5. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle CAB=60^\circ$. Симетралата на аголот BAC ја сече страната BC во точка P, а симетралата на аголот ABC ја сече страната CA во точка Q. Ако $\overline{AB}+\overline{BP}=\overline{AQ}+\overline{QB}$, определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Нека S и T се точки на правите AB и AC, со распоред $A-B-S$ и $A-Q-T$, соодветно такви што $\overline{BS}=\overline{BP}$ и $\overline{QT}=\overline{QB}$. Дадено е дека

$$\overline{AS}=\overline{AB}+\overline{BP}=\overline{AQ}+\overline{QB}=\overline{AT}\ .$$

Бидејќи $\measuredangle PAS = \measuredangle PAT$, триаголниците APS и APT се складни, па затоа $\measuredangle ATP = \measuredangle ASP = \frac{1}{2}\beta = \measuredangle QBP$, т.е. $\measuredangle QTP = \measuredangle QBP$.



Ако точката P не е на правата BT, триаголниците QBP и QTP мора да се складни, па затоа P лежи на симетралата на аголот BQT. Бидејќи AP е симетрала на аголот QAB, P е центар на припишаната кружница на $\triangle QAB$, па затоа и BP симетрала на аголот QBS. Според тоа,

$$\measuredangle PBQ = \frac{1}{2}\beta = \measuredangle PBS = 180^\circ - \beta,$$

па затоа $\beta = 120^\circ$, што не е можно.

Според тоа, $P \in BT$, што значи дека $T \equiv S$. Сега, од $\overline{QC} = \overline{QB}$ добиваме $120^\circ - \beta = \gamma = \frac{1}{2}\beta$, па затоа $\beta = 80^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$.

6. Нека a,b,c,d се природни броеви, такви што $a > b > c > d$ и

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c). \quad (1)$$

Докажи, дека $ab + cd$ не е прост број.

Решение. Равенството (1) е еквивалентно на равенството

$$a^2 - ac + b^2 = b^2 + bd + d^2.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(ab + cd)(ad + bc) &= ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2) \\ &= (ac + bd)(a^2 - ac + c^2).\end{aligned} \quad (2)$$

Нека претпоставиме дека $ab + cd$ е прост број. Од $a > b > c > d$ следува дека $ab + cd > ac + bd > ad + bc$ и како $ab + cd$ е прост број следува дека

$$\mathrm{NZD}(ab + cd, ac + bd) = 1.$$

Сега, од (2) следува дека $ac + bd \mid ad + bc$, што противречи на

$$ac + bd > ad + bc.$$

Конечно, од добиената противречност следува дека $ab + cd$ не е прост број.