

XXXVIII олимпијада

1. Точките во рамнината со целобројни координати се темиња на единечни квадрати. Квадратите се наизменично обоени со бела и црна боја (како шаховска табла). За секој пар позитивни цели броеви m и n разгледуваме правоаголен триаголник чии темиња имаат целобројни координати, а неговите катети, со должини m и n , лежат на страните на единечните квадрати. Нека S_1 е вкупната плоштина на црниот дел од триаголникот и S_2 е вкупната плоштина на белиот дел од триаголникот. Нека

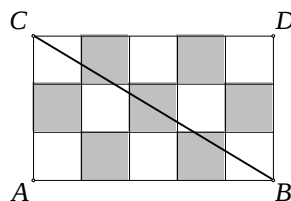
$$f(m, n) = |S_1 - S_2|.$$

а) Најди го $f(m, n)$ за кои било позитивни цели броеви m и n со иста парност.

б) Докажи дека $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ за секои природни броеви m и n .

в) Докажи дека не постои константа C таква што $f(m, n) < C$ за секои природни броеви m и n .

Решение. а) Нека ABC е правоаголен триаголник чии темиња се темиња на квадрат, чии катети лежат на страните на квадратот, при што $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = n$ и $\overline{AC} = m$. Разгледуваме $n \times m$ правоаголник $ABCD$ како што е покажано на цртежот десно. За било кој полигон P со $S_1(P)$ ќе ја означиме вкупната плоштина на црниот дел од P , а со $S_2(P)$



Црп. 38.1.

вкупната плоштина на белиот дел.

Кога m и n се со иста парност, бојењето на правоаголникот $ABCD$ е централно симетрично во однос на средината на хипотенузата BC . Затоа

$$S_1(ABC) = S_1(BCD), \quad S_2(ABC) = S_2(BCD) \quad \text{и}$$

$$f(m, n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2} |S_1(ABCD) - S_2(ABCD)|.$$

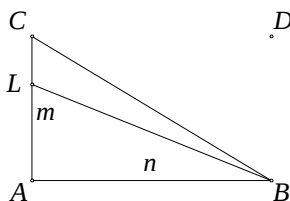
Затоа $f(m, n) = 0$, ако m и n се парни, а $f(m, n) = \frac{1}{2}$ ако m и n се непарни.

б) Ако m и n се со иста парност, тврдењето следува од а). Да претпоставиме дека m е непарен, а n е парен. Нека L е точка на страната AC , така што $\overline{AL} = m-1$, како што е покажано на цртежот.

Бидејќи $m-1$ е парен број, тогаш

$$f(m-1, n) = 0, \quad \text{т.е.} \quad S_1(ABL) = S_2(ABL).$$

Оттука следува:



Црп. 38.2.

$$\begin{aligned}
 f(m, n) &= |S_1(ABC) - S_2(ABC)| \\
 &= |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \\
 &\leq P(LBC) = \frac{n}{2} \\
 &\leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}.
 \end{aligned}$$

в) Да го најдеме $f(2k+1, 2k)$. Нека L е точка на страната AC таква што $\overline{AL} = 2k$. Бидејќи

$$f(2k, 2k) = 0 \text{ и } S_1(ABL) = S_2(ABL),$$

следува

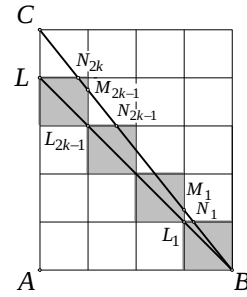
$$f(2k+1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|.$$

Плоштината на триаголникот LBC е еднаква на k . Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека дијагоналата BL е црна (црт. 38.3). Тогаш белиот дел од триаголникот LBC се состои од неколку триаголници: $CLN_{2k}, M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}, \dots, M_1L_1N_1$, од кои секој е сличен со триаголникот CAB . Нивната вкупна плоштина е еднаква на:

$$\begin{aligned}
 S_2(LBC) &= \frac{1}{2} \frac{2k}{2k+1} \left(\left(\frac{2k}{2k} \right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4k(2k+1)} (1^2 + 2^2 + \dots + (2k)^2) = \frac{4k+1}{12}.
 \end{aligned}$$

Значи,

$$S_1(LBC) = k - \frac{1}{12} (4k+1) = \frac{1}{12} (8k-1), \quad f(2k+1, 2k) = \frac{2k-1}{6}.$$



Црт. 38.3.

2. Нека $\angle A$ е најмалиот агол во $\triangle ABC$. Точките B и C ја делат опишаната кружница околу триаголникот на два кружни лака. Нека U е внатрешна точка од лакот меѓу B и C кој не ја содржи точката A . Симетралите на страните AB и AC ја сечат правата AU во точките V и W соодветно. Правите BV и CW се сечат во точката T . Докажи дека $\overline{AU} = \overline{TB} + \overline{TC}$.

Решение. Нека $\alpha = \angle A$, B' , C' се средини на страните AC и AB соодветно и $\theta = \angle BAU$, $\varphi = \angle UAC$. Бидејќи WB' е симетрала на страната AC , $\angle ACW = \varphi$ и аналогно, бидејќи VC' е симетрала на страната AB , $\angle ABV = \theta$. Оттука добиваме

$$\angle BTC = \pi - (\beta - \theta + \gamma - \varphi) = \alpha + (\theta + \varphi) = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

Применувајќи ја синусната теорема за триаголникот BTC добиваме

$$\frac{\overline{TB}}{\sin(\gamma - \varphi)} = \frac{\overline{TC}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{\overline{BC}}{\sin 2\alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

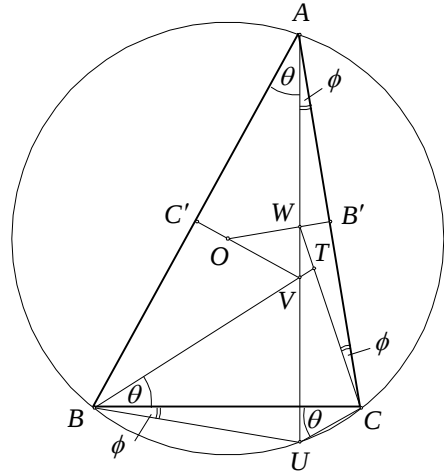
каде што R е радиусот на опишаната кружница. (Да забележиме дека заради условот на α , $\cos \alpha > 0$ и дека $\beta - \theta > 0, \gamma - \varphi > 0$). Следува:

$$\begin{aligned}
\overline{TB} + \overline{TC} &= \frac{R}{\cos \alpha} (\sin(\beta - \theta) + \sin(\gamma - \varphi)) \\
&= \frac{2R \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma + \varphi - \theta}{2}}{\cos \alpha} \\
&= 2R \cos \frac{\beta - \gamma + \varphi - \theta}{2}.
\end{aligned}$$

Бидејќи точките U , A , B и C лежат на кружницата, $\angle UBC = \varphi$ и $\angle UCB = \theta$, а оттука следува:

$$\begin{aligned}
\overline{AU} &= 2R \sin(\beta + \varphi) = 2R \sin(\gamma + \theta) \\
&= R(\sin(\varphi + \varphi) + \sin(\gamma + \theta)) \\
&= 2R \sin \frac{\beta + \gamma + \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma + \varphi - \theta}{2} \\
&= 2R \cos \frac{\beta - \gamma + \varphi - \theta}{2}.
\end{aligned}$$

односно $\overline{AU} = \overline{TB} + \overline{TC}$.



Црп. 38.4.

3. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ се реални броеви кои ги задоволуваат условите

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1, \quad |x_i| \leq \frac{n+1}{2} \text{ за } i = 1, 2, \dots, n.$$

Докажи дека постои пермутација $y_1, y_2, \dots, y_n$ на $x_1, x_2, \dots, x_n$ така што

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Решение. За секоја пермутација $\pi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ од $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ со $S(\pi)$ ќе го означиме збирот $y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$. Нека $r = \frac{n+1}{2}$. Треба да покажеме дека $S(\pi) \leq r$ барем за една пермутација π .

Нека $\pi_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\tilde{\pi} = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$. Ако $|S(\pi_0)| \leq r$ или $|S(\tilde{\pi})| \leq r$, тогаш тврдењето е точно. Затоа, нека претпоставуваме дека $|S(\pi_0)| > r$ и $|S(\tilde{\pi})| > r$. Забележуваме дека

$$S(\pi_0) + S(\tilde{\pi}) = (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + \dots + nx_1) = (n+1)(x_1 + \dots + x_n)$$

па $|S(\pi_0) + S(\tilde{\pi})| = n+1 = 2r$. Бидејќи секој од броевите $S(\pi_0)$ и $S(\tilde{\pi})$ по апсолутна вредност е поголем од r , следува дека тие мора да бидат со спротивен знак. Еден од нив е поголем од r , а другиот е помал од $-r$.

Почнувајќи од пермутацијата π_0 можеме да ја добиеме секоја пермутација со последоватено заменување на соседни елементи. Специјално, постои низа од пермутации $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m$ така што $\pi_m = \tilde{\pi}$ и за секој $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ пермутацијата π_{i+1} се добива од π_i со замена на последователни членови.

Тоа значи дека ако $\pi_i = (y_1, \dots, y_n)$ и $\pi_{i+1} = (z_1, \dots, z_n)$, тогаш постои индекс $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ така што

$$z_k = y_{k+1}, z_{k+1} = y_k, z_j = y_j \text{ за } j \neq k, k+1.$$

Бидејќи броевите x_i по апсолутна вредност не се поголеми од r , добиваме

$$\begin{aligned} |S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| &= |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| \\ &= |y_k - y_{k+1}| \leq |y_k| + |y_{k+1}| \leq 2r. \end{aligned}$$

Тоа значи дека разликата меѓу два соседни члена од низата $S(\pi_0), S(\pi_1), \dots, S(\pi_m)$ не е поголема од $2r$.

Броевите $S(\pi_0)$ и $S(\pi_m)$, разгледувани како броеви на реалната права, лежат надвор од интервалот $[-r, r]$ и тоа од негова различна страна. Оттука следува дека барем еден од броевите $S(\pi_i)$ се наоѓа во тој интервал. Затоа $|S(\pi_i)| \leq r$ за некоја пермутација π_i .

4. $n \times n$ матрица чии елементи се броевите од множеството $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ се нарекува *сребрена* матрица, ако за секој $i = 1, 2, \dots, n$, i -тата редица и i -тата колона заедно ги содржат сите елементи од S . Покажи дека:

а) не постои сребрена матрица за $n = 1997$,

б) постојат сребрени матрици за бесконечно многу броеви n .

Решение. а) Нека $n > 1$ е цел број. Да претпоставиме дека постои $n \times n$ сребрена матрица A . Нека x е некој елемент од множеството $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ кој што не се појавува на дијагоналата. (Таков елемент постои, бидејќи има n елементи на дијагоналата, но вкупно имаме $2n-1$ броеви.) Унијата на i -тата редица и i -тата колона ќе ја наречеме i -ти „дел“. Елементот x се појавува во секој „дел“ само по еднаш. Ако x е (i, j) -ти елемент од A , тогаш тој припаѓа во i -тиот j -тиот „дел“. Во овој случај двата „дела“ се означени со x . (На пример во вториот пример под б) првиот и четвртиот дел се означени со 6.) Тоа значи дека сите n „делови“ сме ги поделиле во парови x -обележани, па затоа n е парен број. Бидејќи $n = 1997$ е непарен број, следува дека не постои сребрена матрица за овој број n .

б) За $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

е сребрена матрица. За $n = 4$ има повеќе примери, од кои еден е

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Со помош на математичка индукција може да се конструираат бесконечно многу сребрени матрици, како што може да се види од следниот пример:

$$B = \begin{bmatrix} A & Y \\ X & A \end{bmatrix}$$

каде што A е сребрена матрица со елементи од множеството $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$,

$$X = \begin{bmatrix} 2n & 2n+1 & \dots & 3n-1 \\ 3n-1 & 2n & \dots & 3n-2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 3n+1 & 2n+2 & \dots & 2n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 3n & 3n+1 & \dots & 4n-1 \\ 4n-1 & 3n & \dots & 4n-2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 3n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \end{bmatrix}.$$

Матрицата B е исто така сребрена.

5. Најди ги сите парови (a, b) природни броеви кои ја задоволуваат равенката

$$a^{b^2} = b^a.$$

Решение. Равенката

$$x^{y^2} = y^x \tag{1}$$

ја запишуваме во облик

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{y^2} = y^{x-2y^2}. \tag{2}$$

Очигледно, потребно е $x^2 \neq 2y^2$.

Ако $x^2 > 2y^2$, тогаш $\frac{x}{y^2} = k \in \mathbb{N}$, $x = ky^2$, па од (2) добиваме:

$$ky^2 = y^{ky^2-2y^2}, \text{ т.е. } k = y^{k-2}.$$

За $k=1$ решение е $(1,1)$. За $k=2$ нема решение. За $k=3$ решение е $(27,3)$. За $k=4$ решение е $(16,2)$. За $k \geq 5$ имаме:

$$y^{k-2} \geq 2^{k-2} = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 \cdot \frac{k-3}{k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 4(k-3) > k.$$

Ако $x^2 < 2y^2$ од (2) добиваме:

$$\left(\frac{y^2}{x}\right)^{y^2} = y^{2y^2-x} \Rightarrow \frac{y^2}{x} = m \in \mathbb{N}, \quad y^2 = mx.$$

Оттука и од (1) добиваме:

$$x^{2y^2} = y^{2x} \Rightarrow x^{2m} = (mx)^x, \quad x^{2m} = mx, \quad \text{т.е. } x^{2m-1} = m.$$

За $m=1$, решение е $(1,1)$, кое веќе го најдовме.

За $m \geq 2$ имаме:

$$x^{2m-1} \geq 2^{2m-1} = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \geq \frac{2m-1}{2m-1} \cdot \frac{2m-2}{2m-3} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 2m-1 > m$$

па во овој случај равенката нема решение.

6. За секој позитивен цел број n , со $f(n)$ е означен бројот од различни записи на бројот n како збир од степени на бројот 2 со ненегативни целобројни по-

казатели. Записите кои се разликуваат само во редоследот на собираците се сметаат за еднакви. На пример, $f(4) = 4$ бидејќи бројот 4 може да се претстави на следните четири начини: 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$.

Докажи дека за секој цел број $n \geq 3$ важи $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$.

Решение. Ако $n = 2k + 1$ е било кој непарен цел број поголем од 1, тогаш секое запишување на n во бараниот запис го има 1 како еден од собираците. Ако го отстраниме, добиваме запис на бројот $2k$. Обратно, ако додадеме 1 во записот на бројот $2k$ ќе го добиеме записот на бројот $2k+1$. Ова придружување е биективно. Затоа важи рекурзивната формула

$$f(2k+1) = f(2k) \quad (1)$$

Понатаму, ако $n = 2k$ е било кој позитивен парен цел број, тогаш секој запис на n има еден од следните два беда: или содржи еден собирик 1 или нема таков собирик. Во првиот случај мажеме да одземеме 1 и да добиеме запис на бројот $2k-1$. На тој начин добиваме биекција меѓу записот од првиот вид на $2k$ и сите записи на $2k-1$. Во записите од вториот вид (овде ниту еден член не е 1), можеме секој член да го поделеме со 2 и ќе го добиеме записот на бројот k . На тој начин ќе добиеме друга рекурзивна формула

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k) \quad (2)$$

Секоја од овие формули важи за секој цел број $k \geq 1$. Очигледно $f(1) = 1$. Ако ставиме $f(0) = 1$, формулата (1) ќе важи и за $k = 0$. Од (1) и (2) следува дека функцијата f е неопаѓачка.

Од (1) следува дека бројот $f(2k-1)$ во формулата (2) може да се замени со $f(2k-2)$, па добиваме

$$f(2k) - f(2k-2) = f(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ако ги собериме овие равенства за $k = 1, 2, \dots, n$, ја добиваме формулата

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n) \quad \text{за } n = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Во формулата (3) ниту еден собирик не е поголем од последниот. Бидејќи $2 = f(2) \leq f(n)$ за $n \geq 2$, добиваме

$$f(2n) = 2 + (f(2) + \dots + f(n)) \leq 2 + (n-1)f(n) \leq f(n) + (n-1)f(n) = nf(n),$$

за $n = 2, 3, \dots$. Специјално, во нашиот случај имаме:

$$\begin{aligned} f(2^n) &\leq 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leq \dots \\ &\leq 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} \cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2. \end{aligned}$$

Бидејќи $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ за $n > 3$, следува дека важи горната оценка.

Пред да ја докажеме долната оценка, ќе го покажеме прво неравенството

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a) \quad (4)$$

за целите броеви $b \geq a \geq 0$ со иста парност. Имено, ако a и b се парни броеви, тогаш од (1) следува дека двете страни се нула; ако a и b се двата непарни, тогаш од (2) следува

$$f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right), f(a+1) - f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right),$$

па неравенството (4) важи бидејќи функцијата f е непоаѓачка.

Нека r и k се цели броеви така што $r \geq k \geq 1$ и r е парен. Ставајќи во (4)

$$a = r - j, b = r + j, j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

и собирајќи ги добиените неравенства, добиваме

$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$$

Бидејќи r е парен, $f(r+1) = f(r)$ и

$$f(r+k) - f(r-k+1) \geq 2f(r), k = 1, 2, \dots, r.$$

Собирајќи ги овие неравенства, добиваме

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2r) \geq 2rf(r).$$

Од (3) следува дека збирот на левата страна е $f(4r) - 1$ и

$$f(4r) \geq 2rf(r) + 1 > 2rf(r) \text{ за секој цел број } r > 2.$$

Ставајќи $r = 2^{m-2}$, добиваме

$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}) \quad (5)$$

За $r = 2^{m-2}$ да биде парен број, m мора да биде цел број поголем од 2; да забележиме дека (5) важи за $m = 2$.

Нека n е било кој цел број поголем од 1. Ако l е позитивен цел број таков што $2l < n$, тогаш применувајќи го неравенството (5) за $m = n, n-1, \dots, n-2l+2$ и добиваме

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-4}) \\ &> \dots > 2^{(n-1)+(n-3)+\dots+(n-2l+1)} \cdot f(2^{n-2l}) = 2^{l(n-l)} \cdot f(2^{n-2l}) \end{aligned}$$

Ако n е парен број, ставаме $l = \frac{n}{2}$; ако n е непарен, нека $l = \frac{n-1}{2}$. Се добиваат следните неравенства:

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} \cdot f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}} \text{ за } n \text{ парен број,}$$

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2-1}{4}} \cdot f(2^1) = 2^{\frac{n^2-1}{4}} \cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}} \text{ за } n \text{ непарен број.}$$

Ја добивме бараната оценка за $n \geq 2$. Таа важи и за $n=1$, што може непосредно да се провери.