



XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Problem 1. Find all prime numbers a, b, c and positive integers k which satisfy the equation

$$a^2 + b^2 + 16 \cdot c^2 = 9 \cdot k^2 + 1.$$

Solution:

The relation $9 \cdot k^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ implies

$$a^2 + b^2 + 16 \cdot c^2 \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Since $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $b^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $c^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, we have:

a^2	0	0	0	0	1	1	1	1
b^2	0	0	1	1	0	0	1	1
c^2	0	1	0	1	0	1	0	1
$a^2 + b^2 + c^2$	0	1	1	2	1	2	2	0

From the previous table it follows that two of three prime numbers a, b, c are equal to 3.

Case 1. $a = b = 3$

We have

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 16 \cdot c^2 = 9 \cdot k^2 + 1 &\Leftrightarrow 9 \cdot k^2 - 16 \cdot c^2 = 17 \Leftrightarrow (3k - 4c) \cdot (3k + 4c) = 17, \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3k - 4c = 1, \\ 3k + 4c = 17, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2, \\ k = 3, \end{cases} \text{ and } (a, b, c, k) = (3, 3, 2, 3). \end{aligned}$$

Case 2. $c = 3$

If $(3, b_0, c, k)$ is a solution of the given equation, then $(b_0, 3, c, k)$ is a solution too.

Let $a = 3$. We have

$$a^2 + b^2 + 16 \cdot c^2 = 9 \cdot k^2 + 1 \Leftrightarrow 9 \cdot k^2 - b^2 = 152 \Leftrightarrow (3k - b) \cdot (3k + b) = 152.$$

Both factors shall have the same parity and we obtain only 2 cases:

- $\begin{cases} 3k - b = 2, \\ 3k + b = 76, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 37, \\ k = 13, \end{cases} \text{ and } (a, b, c, k) = (3, 37, 3, 13);$
- $\begin{cases} 3k - b = 4, \\ 3k + b = 38, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 17, \\ k = 7, \end{cases} \text{ and } (a, b, c, k) = (3, 17, 3, 7).$

So, the given equation has 5 solutions:

$$\{(37, 3, 3, 13), (17, 3, 3, 7), (3, 37, 3, 13), (3, 17, 3, 7), (3, 3, 2, 3)\}.$$

Problem 2. Let a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Find the minimum value of the expression

$$A = \frac{2 - a^3}{a} + \frac{2 - b^3}{b} + \frac{2 - c^3}{c}.$$



XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Solution:

We can rewrite A as follows:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - a^2 - b^2 - c^2 = \\ &= 2\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right) - (a^2 + b^2 + c^2) = 2\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right) - ((a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)) = \\ &= 2\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right) - (9 - 2(ab+bc+ca)) = 2\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right) + 2(ab+bc+ca) - 9 = \\ &= 2(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc} + 1\right) - 9. \end{aligned}$$

Recall now the well-known inequality $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ and set $x=ab, y=bc, z=ca$, to obtain $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 9abc$, where we have used $a+b+c=3$. By taking the square roots on both sides of the last one we obtain:

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc}. \quad (1)$$

Also by using AM-GM inequality we get that

$$\frac{1}{abc} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{abc}}. \quad (2)$$

Multiplication of (1) and (2) gives:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc} + 1\right) \geq 3\sqrt{abc} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{abc}} = 6.$$

So $A \geq 2 \cdot 6 - 9 = 3$ and the equality holds if and only if $a=b=c=1$, so the minimum value is 3.

Problem 3. Let $\triangle ABC$ be an acute triangle. The lines l_1, l_2 are perpendicular to AB at the points A, B respectively. The perpendicular lines from the midpoint M of AB to the sides of the triangle AC, BC intersect the lines l_1, l_2 at the points E, F , respectively. If D is the intersection point of EF and MC , prove that

$$\angle ADB = \angle EMF.$$

Solution:

Let H, G be the points of intersection of ME, MF with AC, BC respectively. From the similarity of triangles $\triangle MHA$ and $\triangle MAE$ we get $\frac{MH}{MA} = \frac{MA}{ME}$, thus

$$MA^2 = MH \cdot ME. \quad (1)$$

Similarly, from the similarity of triangles $\triangle MBG$ and $\triangle MFB$ we get $\frac{MB}{MF} = \frac{MG}{MB}$, thus

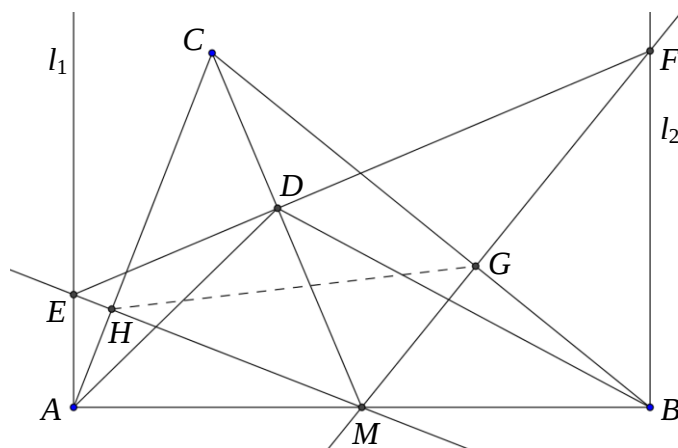
$$MB^2 = MF \cdot MG. \quad (2)$$

Since $MA=MB$, from (1), (2), we conclude that the points E, H, G, F are concyclic.



XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia



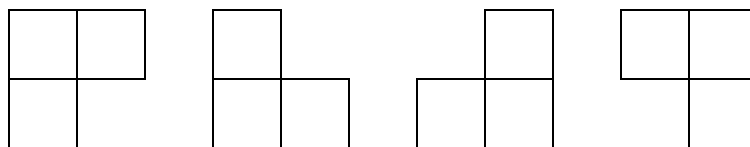
Therefore, we get that $\angle FEH = \angle FEM = \angle HGM$. Also, the quadrilateral $CHMG$ is cyclic, so $\angle CMH = \angle HGC$. We have

$$\angle FEH + \angle CMH = \angle HGM + \angle HGC = 90^\circ,$$

thus $CM \perp EF$. Now, from the cyclic quadrilaterals $FDMB$ and $EAMD$, we get that $\angle DFM = \angle DBM$ and $\angle DEM = \angle DAM$. Therefore, the triangles $\triangle EMF$ and $\triangle ADB$ are similar, so $\angle ADB = \angle EMF$.

Problem 4.

An **L-figure** is one of the following four pieces, each consisting of three unit squares:



A 5×5 board, consisting of 25 unit squares, a positive integer $k \leq 25$ and an unlimited supply **L-figures** are given. Two players, **A** and **B**, play the following game: starting with **A** they alternatively mark a previously unmarked unit square until they marked a total of k unit squares.

We say that a placement of **L-figures** on unmarked unit squares is called **good** if the **L-figure** do not overlap and each of them covers exactly three unmarked unit squares of the board. **B** wins if every **good** placement of **L-figures** leaves uncovered at least three unmarked unit squares. Determine the minimum value of k for which **B** has a winning strategy.

Solution:

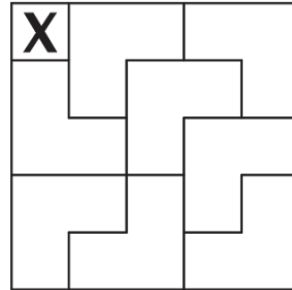
We will show that player **A** wins if $k = 1, 2, 3$, but player **B** wins if $k = 4$. Thus the smallest k for which **B** has a winning strategy exists and is equal to 4.

If $k = 1$, player **A** marks the upper left corner of the square and then fills it as follows.



XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia



If $k = 2$, player **A** marks the upper left corner of the square. Whatever square player **B** marks, then player **A** can fill in the square in exactly the same pattern as above except that he doesn't put the L -figure which covers the marked square of **B**. Player **A** wins because he has left only two unmarked squares uncovered.

For $k = 3$, player **A** wins by following the same strategy. When he has to mark a square for the second time, he marks any yet unmarked square of the L -figure that covers the marked square of **B**.

Let us now show that for $k = 4$ player **B** has a winning strategy. Since there will be 21 unmarked squares, player **A** will need to cover all of them with seven L -figures. We can assume that in his first move, player **A** does not mark any square in the bottom two rows of the chessboard (otherwise just rotate the chessboard). In his first move player **B** marks the square labeled 1 in the following figure.

			1	4
		5	3	2

If player **A** in his next move does not mark any of the squares labeled 2, 3 and 4 then player **B** marks the square labeled 3. Player **B** wins as the square labeled 2 is left unmarked but cannot be covered with an L -figure.

If player **A** in his next move marks the square labeled 2, then player **B** marks the square labeled 5. Player **B** wins as the square labeled 3 is left unmarked but cannot be covered with an L -figure.

Finally, if player **A** in his next move marks one of the squares labeled 3 or 4, player **B** marks the other of these two squares. Player **B** wins as the square labeled 2 is left unmarked but cannot be covered with an L -figure.

Since we have covered all possible cases, player **B** wins when $k = 4$.

1. Определи ги сите прости броеви a, b, c и природни броеви k кои што ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

Решение. Од $9k^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ следува

$$a^2 + b^2 + 16c^2 \equiv 1 \pmod{3}, \text{ т.е. } a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Бидејќи $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $b^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ и $c^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, добиваме

a^2	0	0	0	0	1	1	1	1
b^2	0	0	1	1	0	0	1	1
c^2	0	1	0	1	0	1	0	1
$a^2 + b^2 + c^2$	0	1	1	2	1	2	2	0

Од претходната табела следува дека два од трите прости броеви треба да се еднакви на 3.

Прв случај. $a = b = 3$. Добиваме

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1 &\Leftrightarrow 9k^2 - 16c^2 = 17 \Leftrightarrow \\ (3k - 4c)(3k + 4c) = 17 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3k - 4c = 1 \\ 3k + 4c = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} c = 2, \\ k = 3, \end{cases} \end{aligned}$$

па едно решение на задачата е $(a, b, c, k) = (3, 3, 2, 3)$.

Втор случај. $c = 3$. Јасно, ако $(3, b, 3, k)$ е решение на задачата, тогаш и $(b, 3, 3, k)$ е решение на задачата. Нека $a = 3$. Имаме

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1 &\Leftrightarrow \\ 9k^2 - b^2 = 153 &\Leftrightarrow \\ (3k - b)(3k + b) = 152. \end{aligned}$$

Бидејќи броевите $3k - b$ и $3k + b$ се со иста парност, од последната равенка добиваме

$$\begin{cases} 3k - b = 2 \\ 3k + b = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 37, \\ k = 13, \end{cases}$$

и решение е $(a, b, c, k) = (3, 37, 3, 13)$, односно

$$\begin{cases} 3k - b = 4 \\ 3k + b = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 17, \\ k = 7, \end{cases}$$

и решение е $(a, b, c, k) = (3, 17, 3, 7)$.

Конечно, дадената равенка има пет решенија и тоа:

$$(3, 3, 2, 3), (3, 37, 3, 13), (37, 3, 3, 13), (3, 17, 3, 7), (17, 3, 3, 7).$$

2. Нека a, b, c се позитивни реални броеви, такви што $a + b + c = 3$. Определи ја најмалата (минимална) вредност што може да ја има изразот

$$A = \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A &= \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= \frac{2(ab+bc+ca)}{abc} - (a+b+c)^2 + 2(ab+bc+ca) \\ &= 2(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc} + 1\right) - 9. \end{aligned}$$

Понатаму, ако во добро познатото равенство $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ ставиме $x=ab, y=bc, z=ca$ и искристиме дека $a+b+c=3$, добиваме:

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 9abc, \text{ т.е.}$$

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc}. \quad (1)$$

Од неравенството еѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{abc} + 1 \geq 2\frac{1}{\sqrt{abc}}. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме

$$A = 2(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc} + 1\right) - 9 \geq 2 \cdot 3\sqrt{abc} \cdot 2\frac{1}{\sqrt{abc}} - 9 = 3$$

т.е. најмалата можна вредност на A е 3 која се достигнува за $a=b=c=1$.

3. Нека ABC е остроаголен триаголник. Правите l_1 и l_2 се нормали на AB во точките A и B , соодветно. Нека точката M е средина на отсечката AB . Нормалите повлечени од точката M на правите AC и BC ги сечат l_1 и l_2 во точките E и F , соодветно. Ако D е пресек на правите EF и MC , докажи дека $\angle ADB = \angle EMF$.

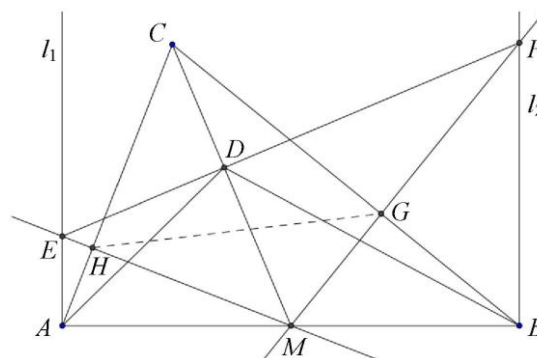
Решение. Нека H, G се пресечните точки на ME, MF со AB, BC соодветно. Од сличноста на $\triangle MHA$ и $\triangle MAE$ следува $\frac{MH}{MA} = \frac{MA}{ME}$, односно

$$MA^2 = MH \cdot ME. \quad (1)$$

Од сличноста на $\triangle MBG$ и $\triangle MFB$ следува $\frac{MB}{MF} = \frac{MG}{MB}$, односно

$$MB^2 = MF \cdot MG. \quad (2)$$

Но, $MA = MB$, па затоа од (1) и (2) добиваме $MH \cdot ME = MF \cdot MG$, што значи дека точките E, H, G, F лежат на една кружница. Затоа важи $\angle FEH = \angle FEM = \angle HGM$. Исто така четириаголникот $CHMG$ е тетивен, па важи $\angle CMH = \angle HGC$. Според тоа, $\angle FEH + \angle CMH = \angle HGM + \angle HGC = 90^\circ$, па затоа $CM \perp EF$. Сега, од тетивноста на четириаголниците $FDMB$ и $EAMD$ следува $\angle DFM = \angle DBM$ и $\angle DEM = \angle DAM$. Затоа $\triangle EMF$ е сличен со $\triangle ADB$, од што следува $\angle ADB = \angle EMF$.



4. L-тримино е фигура која може да има еден од четирите облици прикажани на цртежот (секој од нив се состои од 3 единечни квадрати):



Дадена е табла 5×5 , која се состои од 25 единични квадрати и неограничен број на L-тримина. Нека k е даден природен број, таков што $k \leq 25$.

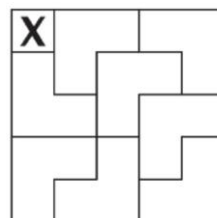
Двајца играчи, A и B , ја играат следата игра: играта ја почнува играчот A и наизменично бојат (со иста боја) по еден единичен квадрат, кој што претходно не е обоен. Велиме дека играта е завршена, кога на таблата се обоени вкупно k единечни квадрати.

Велиме дека L-тримината *добро* ги покриваат необоените единични квадрати на таблата ако тие не се преклопуваат и секое од нив покрива точно три необоени единични квадрати на таблата.

Играчот B победува ако секое *добро* прекривање со L-тримина остава непокриени најмалку три необоени единични квадрати. Најди ја најмалата можна вредност за k за која играчот B има победничка стратегија.

Решение. Ќе докажеме дека играчот A победува ако $k = 1, 2, 3$, а играчот B победува за $k = 4$. Според тоа, најмалиот k за кој играчот B победува постои и е еднаков на 4.

Ако $k = 1$, тогаш играчот A го бои горниот лев агол на таблата и потоа таблата ја покрива како што е прикажано на цртежот десно.



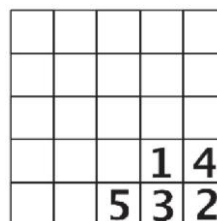
Ако $k = 2$, тогаш играчот A го бои горниот лев агол на таблата.

Потоа без разлика кое поле ќе го обои играчот B , играчот A може да ја покрие таблата на истиот начин како во претходниот случај, со тоа што не поставува L-тримино кое го покрива полето кое го обоил играчот B . Јасно, играчот A победува бидејќи има две непокриеби необоени полиња.

За $k = 3$ играчот A ја следи истата стратегија. Кога играчот A треба да го обои второто поле, тој го бои едно од двете необоени полиња кои ги покрива L-триминото кое го покрива поето кое веќе го обоил играчот B .

Ќе докажеме дека за $k = 4$ играчот B има победничка стратегија.

Бидејќи има 21 необоено поле, играчот A мора сите да ги покрие со седум L-тримина. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека во првиот чекор играчот A не обоил ниту едно поле во долните два реда на таблата (во спротивно едноставно ќе ја завртиме таблата). Во првиот чекор играчот B го обои квадратот кој на цртежот десно е означен со 1. Ако играчот A во



следниот чекот не обои ниту еден од квадратите означени со 2, 3 и 4, тогаш играчот B го бои квадратот 3. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 2 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино. Ако играчот A во следниот чекор го обои квадратот 2, тогаш играчот B го бои квадратот 5. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 3 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино. Конечно, ако во следниот чекор играчот A обои еден од квадратите 3 или 4, тогаш играчот B го бои другиот од овие два квадрати. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 2 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино.

Забелешка. Во последниот случај играчот B може да го обои било кој необоен квадрат од таблата.