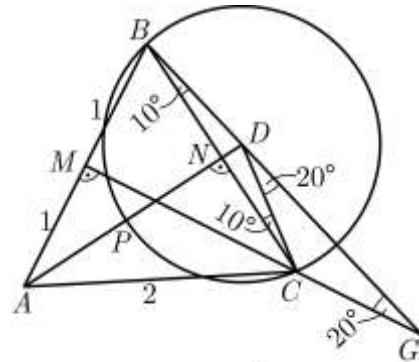


ГЕОМЕТРИСКИ ДОКАЗИ НА НЕКОИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНСТВА

Во овој прилог ќе дадеме неколку навистина интересни (дури и изненадувачки) геометриски докази на некои тригонометриски равенства.

Пример 1. Докажи дека $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ$.

Решение. Да конструираме рамностран триаголник ABC со страна со должина 2. Нека M и N се средини на страните AB и AC , соодветно. Над страната BC конструираме рамнокрак триаголник BCD со агли на основата од 10° и да ја продолжиме BD од страната на D до пресекот со MC . Пресечната точка да ја означиме со



црт.1

G (црт. 1). Потоа, да конструираме кружница k со центар D и радиус \overline{BD} и нека $k \cap AD = \{P\}$. Тогаш $\sphericalangle MBG = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$ и $\overline{MB} = 1$, па

$$\overline{MG} = \operatorname{tg} 70^\circ = \overline{MC} + \overline{CG} = \operatorname{tg} 60^\circ + \overline{CG}.$$

Освен тоа $\sphericalangle CDG = 20^\circ$ и $\sphericalangle DCG = 140^\circ$, па $\sphericalangle DGC = 20^\circ$. Тоа значи дека триаголникот DCG е рамнокрак и $\overline{DC} = \overline{CG}$. Натаму, $\overline{DC} = \overline{DP} = \overline{DN} + \overline{NP}$. Заради $\overline{BN} = 1$ и $\sphericalangle DBN = 10^\circ$ следува $\overline{DN} = \operatorname{tg} 10^\circ$.

Од $\sphericalangle PDC = 80^\circ$ добиваме $\sphericalangle NBP = \frac{1}{2} \sphericalangle PDC = 40^\circ$. Затоа $\overline{NP} = \operatorname{tg} 40^\circ$.

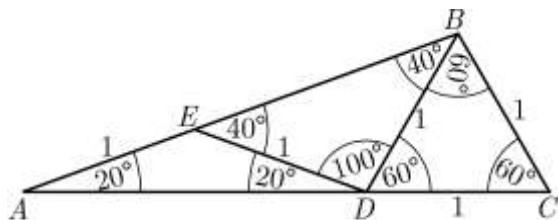
Конечно добиваме

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \overline{MG} = \overline{MC} + \overline{CG} = \operatorname{tg} 60^\circ + \overline{DN} + \overline{NP} = \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ. \blacksquare$$

Пример 2. Докажи дека

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Решение. Да го разгледаме триаголникот ABC со агли $\sphericalangle A = 20^\circ$, $\sphericalangle B = 100^\circ$ и $\sphericalangle C = 60^\circ$ и $\overline{BC} = 1$ (цртеж 2).



црт.2

Нека точките D и E лежат на страните AC и AB , соодветно, така што $\overline{DC} = \overline{ED} = \overline{BC} = \overline{BD} = 1$ и $\overline{AE} = 1$. Сега имаме

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AE} + \overline{EB} = 1 + 2 \cos 40^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} + \cos 40^\circ \right) = 2(\cos 60^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ = 4 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ. \end{aligned} \quad (1)$$

Со примена на синусната теорема на триаголникот ABC добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sin 20^\circ}, \text{ од што следува}$$

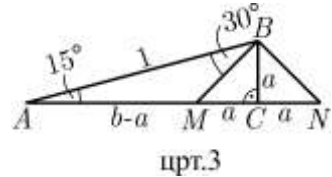
$$\overline{AB} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ &= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ} \Leftrightarrow 4 \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \sin 60^\circ \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 3. Докажи дека $\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$.

Решение. Да го разгледаме правоаголниот триаголник ABC со $\sphericalangle A = 15^\circ$ и $\sphericalangle C = 90^\circ$ и $\overline{AB} = 1$ (цртеж 3). Тогаш $a = \overline{BC} = \sin 15^\circ$ и $b = \overline{AC} = \cos 15^\circ$. На AC и на нејзиното



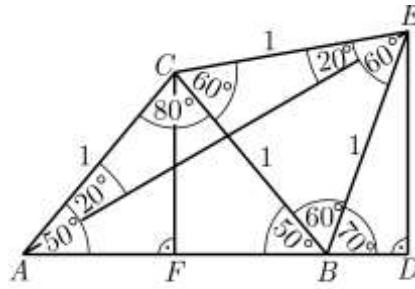
продолжение да земеме две точки M и N така што $\overline{CM} = \overline{CN} = a$. Сега, $\overline{AN} = a + b$ и $\overline{AM} = b - a$. Лесно се добива дека $\sphericalangle ABM = 30^\circ$. Со примена на синусната теорема на триаголниците ABM и ABN добиваме $\frac{\overline{BM}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{AM}}{\sin 30^\circ}$ и $\frac{\overline{BN}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{AN}}{\sin 120^\circ}$, па заради $\overline{BM} = \overline{BN}$ следува

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AM}}{\sin 30^\circ} &= \frac{\overline{AN}}{\sin 120^\circ} \Leftrightarrow \frac{b-a}{\sin 30^\circ} = \frac{b+a}{\sin 120^\circ} \Leftrightarrow \frac{b+a}{b-a} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 3. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 4. Докажи дека $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{2 \cos 50^\circ + \cos 70^\circ}$.

Решение. Да го разгледаме рамнокракиот триаголник ABC во кој $\overline{CA} = \overline{CB} = 1$ и $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 50^\circ$.

Над страната \overline{BC} да го конструираме рамностраниот триаголник BCE . Тогаш $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{EB} = 1$ и $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CEB = \sphericalangle EBC = 60^\circ$. Нека точката D е подножјето на нормалата повлечена од E на AB и нека \overline{CF} е висината на триаголникот ABC (цртеж 4). Лесно се докажува дека



црт.4

$\sphericalangle CAE = \sphericalangle AEC = 20^\circ$, $\sphericalangle EBD = 70^\circ$ и $\sphericalangle EAD = 30^\circ$. Натаму имаме

$$\cos 50^\circ = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}, \text{ т.е. } \overline{AF} = \cos 50^\circ = \overline{FB}, \sin 70^\circ = \frac{\overline{ED}}{\overline{EB}},$$

т.е. $\overline{ED} = \sin 70^\circ$, $\overline{BD} = \cos 70^\circ$ и на крајот

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AF} + \overline{FB} + \overline{BD}} = \frac{\sin 70^\circ}{2 \cos 50^\circ + \cos 70^\circ}. \blacksquare$$

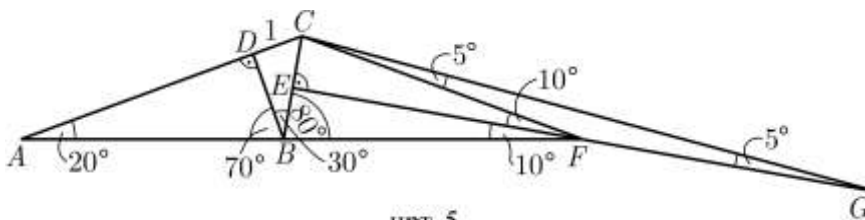
Пример 5. Докажи дека $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$.

Решение. Од цртеж 5 гледаме дека

$$\overline{GE} = \overline{GF} + \overline{FE} = \overline{FC} + \overline{FE} = \overline{CA} + \overline{FE} = \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{FE}.$$

Од правоаголниот триаголник BCD имаме $\overline{BC} = 2\overline{CD} = 2 \cdot 1 = 2$ и $\overline{BD} = \sqrt{3}$, па следува дека $\overline{CE} = 1$. Натаму, од триаголникот ABD имаме

$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{3}}$, од триаголникот CEF , $\operatorname{tg} 80^\circ = \frac{\overline{EF}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EF}}{1} = \overline{EF}$, а од триаголникот CEG , $\operatorname{tg} 85^\circ = \frac{\overline{EG}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EG}}{1} = \overline{EG}$. Тогаш



црт. 5

$$\operatorname{tg} 85^{\circ} = \operatorname{tg} 45^{\circ} + \operatorname{tg} 60^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 70^{\circ} + \operatorname{tg} 80^{\circ},$$

што требаше да се докаже. ■

Литература

[1] Opgavehjørnet 1983 – 1993, Jens Carstensten og matematiklærerforeningen 1993.

[2] J. Carstensen, A. Muminagić, TRIANGLE, vol. 1 (1997) No. 2, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 87 – 88.